ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΕΙΑΣ

Φεβρουάριος 2016

ΘΕΜΑ 1ο (2.5 Μ)

(1) Να εξεταστεί η σύγκλιση της ακολουθίας

$$a_1 = 1, \quad a_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{a_\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Αν η ακολουθία συγκλίνει, να προσδιορίσετε το όριο αυτής

Λύση:
Ισχύει ότι $a_1 > 0$ και αν $a_\nu > 0$ τότε και το $a_{\nu+1} > 0$

Για να εξετάσουμε την μονοτονία, θα εξετάσουμε το πρόσημο δύο διαδοχικών διαφορών

$$a_{\nu+2} - a_{\nu+1} = \left(1 + \frac{1}{a_{\nu+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_\nu}\right)$$

$$= \cancel{1} + \frac{1}{a_{\nu+1}} - \cancel{1} - \frac{1}{a_\nu} = \frac{a_\nu - a_{\nu+1}}{a_\nu \cdot a_{\nu+1}} =$$

$$= -\frac{a_{\nu+1} - a_\nu}{a_\nu \cdot a_{\nu+1}}$$

άρα οι διαδοχικές διαφορές δεν έχουν το ίδιο πρόσημο και επομένως η a_ν με $\nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι μονότονη.

Θα ελέγξουμε το πρόσημο της διαφοράς δύο όρων με διαφορά δεικτών δύο.

$$a_{\nu+2} - a_\nu = \left(1 + \frac{1}{a_{\nu+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_{\nu-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{a_{\nu+1}} - \frac{1}{a_{\nu-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{a_\nu}} - \frac{1}{1+\frac{1}{a_{\nu-2}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1+a_\nu}{a_\nu}} - \frac{1}{\frac{1+a_{\nu-2}}{a_{\nu-2}}} = \frac{a_\nu}{1+a_\nu} - \frac{a_{\nu-2}}{1+a_{\nu-2}}$$

$$= \frac{a_\nu(1+a_{\nu-2}) - a_{\nu-2}(1+a_\nu)}{(1+a_\nu)(1+a_{\nu-2})} =$$

$$= \frac{a_\nu + \cancel{a_\nu a_{\nu-2}} - a_{\nu-2} - \cancel{a_\nu a_{\nu-2}}}{(1+a_\nu)(1+a_{\nu-2})} =$$

$$= \frac{a_\nu - a_{\nu-2}}{(1+a_\nu)(1+a_{\nu-2})}$$

άρα οι υπακολουθίες $a_{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ και $a_{2\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι μονότονες

Η $a_{2\nu}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα

$\underline{\nu = 1}$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$\nu = 2$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{a_3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$a_4 - a_2 = \frac{5}{3} - 2 = \frac{5}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{1}{3} < 0$

$a_3 - a_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$

Επομένως η $a_{2\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα

Φραγμένη

$a_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{a_\nu}$

$a_1 = 1$ άρα $1 + a_\nu > 1$

$\Rightarrow \frac{1}{1+a_\nu} < 1 \Rightarrow |a_\nu| \leq 2$ δηλαδή η ακολουθία είναι φραγμένη.

Επομένως η a_ν είναι μονότονη και φραγμένη άρα συγκλίνει

Θεωρούμε $\lim_{\nu\to+\infty} a = \lambda$ και $\lim a$

$\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda^2 = \lambda + 1$, αφού $\lambda > 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1(-1) = 1 + 4 = 5$

$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ → $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

→ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ απορρ. αφού $\lambda > 0$

τελικά $\boxed{\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$$\mu = 1 + \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \mu^2 = \mu + 1$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 - \mu - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

άρα $\lambda = \mu = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2) Αν ο παρακάτω ισχυρισμός είναι αληθής να αποδειχθεί. Διαφορετικά να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα στον ισχυρισμό. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Αν η ακολουθία $\gamma_\nu = \dfrac{a_\nu}{\beta_\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει, τότε οι ακολουθίες a_ν, β_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουν.

Λύση:

Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. Για αντιπαράδειγμα θεωρούμε τις $a_\nu = \beta_\nu = \nu$, οι οποίες δε συγκλίνουν, διότι είναι μη φραγμένες. Όμως $\gamma_\nu = \dfrac{\nu}{\nu} = 1$ η οποία συγκλίνει ως σταθερή.

(3) Να εξεταστεί η σύγκλιση της ακολουθίας

$$a_1 = 1, \quad a_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_\nu}, \ \nu \in \mathbb{N}$$

Αν η ακολουθία συγκλίνει να προσδιορίσετε το όριο αυτής.

Λύση:

Θα προσδιορίσουμε τις διαφορές:

$$a_{\nu+2} - a_{\nu+1} = \left(1 + \frac{1}{1+a_{\nu+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{1+a_\nu}\right)$$

$$= \frac{1}{1+a_{\nu+1}} - \frac{1}{1+a_\nu} = \frac{\cancel{1}+a_\nu - \cancel{1} - a_{\nu+1}}{(1+a_{\nu+1})(1+a_\nu)}$$

$$= -\frac{a_{\nu+1} - a_\nu}{(1+a_{\nu+1})(1+a_\nu)}$$ δηλαδή οι διαδοχικές διαφορές δεν έχουν το ίδιο πρόσημο και άρα η $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι μονότονη

$$a_{\nu+2} - a_\nu = \left(1 + \frac{1}{1+a_{\nu+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{1+a_{\nu-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{1+a_{\nu+1}} - \frac{1}{1+a_{\nu-1}} =$$

$$= \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+a_\nu}} - \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+a_{\nu-2}}}$$

$$= \frac{1}{2+\frac{1}{1+a_\nu}} - \frac{1}{2+\frac{1}{1+a_{\nu-2}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{2(1+a_\nu)+1}{1+a_\nu}} - \frac{1}{\frac{2(1+a_{\nu-2})+1}{1+a_{\nu-2}}}$$

$$= \frac{1+a_\nu}{2+2a_\nu+1} - \frac{1+a_{\nu-2}}{2+2a_{\nu-2}+1}$$

$$= \frac{1+a_\nu}{3+2a_\nu} - \frac{1+a_{\nu-2}}{3+2a_{\nu-2}}$$

$$= \frac{(1+a_\nu)(3+2a_{\nu-2}) - (1+a_{\nu-2})(3+2a_\nu)}{(3+2a_\nu)(3+2a_{\nu-2})}$$

$$= \frac{\cancel{3}+\cancel{2a_{\nu-2}}+3a_\nu+\cancel{2a_\nu a_{\nu-2}}-\cancel{3}-\cancel{2a_\nu}-3a_{\nu-2}-\cancel{2a_\nu a_{\nu-2}}}{(3+2a_\nu)(3+2a_{\nu-2})}$$

$$= \frac{3(a_\nu - a_{\nu-2})}{(3+2a_\nu)(3+2a_{\nu-2})}$$

άρα οι υπακολουθίες $a_{2\nu}, \nu\in\mathbb{N}$ και $a_{2\nu-1}, \nu\in\mathbb{N}$ είναι μονότονες

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{1+1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{7}{5}} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$$

$$a_4 - a_2 = \frac{17}{12} - \frac{3}{2} = \frac{17}{12} - \frac{18}{12} = -\frac{1}{12} < 0$$

$$a_3 - a_1 = \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5} > 0$$

Επομένως η $a_{2\nu} \downarrow$ και η $a_{2\nu-1} \uparrow$

Φραγμένη

$$a_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{1+a_\nu}, \quad a_1 = 1$$

άρα $1 + a_\nu > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+a_\nu} < 1$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1+a_\nu} < 2 \Leftrightarrow |a_\nu| \leq 2$

Άρα η ακολουθία είναι φραγμένη
Επομένως η ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη
άρα συγκλίνει

Έστω $\lim a_\nu = \lambda$ και $\lim a_{2\nu-1} = \mu$

$\lambda = 1 + \frac{1}{1+\lambda} \Leftrightarrow \lambda(1+\lambda) = 1+\lambda+1$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow \boxed{\lambda = \sqrt{2}}$ το $-\sqrt{2}$ απορρ.

Όμοια $\mu = \sqrt{2}$

Άρα $\lambda = \mu = \sqrt{2}$.

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ } 2^{ο}:}$ (3.5 Μ)

(1) Να εξεταστεί η σύγκλιση της παρακάτω σειράς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu^3}+\sqrt{\nu}-2016}{\nu^3+\nu-2016}$$

Λύση

Έστω $\alpha_\nu = \dfrac{\sqrt{\nu^3}+\sqrt{\nu}-2016}{\nu^3+\nu-2016}$

Θεωρούμε $\beta_\nu = \dfrac{\sqrt{\nu^3}}{\nu^3} = \dfrac{\nu^{\frac{3}{2}}}{\nu^3} = \nu^{\frac{3}{2}-3} = \nu^{\frac{3}{2}-\frac{6}{2}}$

$= \nu^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\nu^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\nu^3}}$

$$\lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lim \frac{\frac{\sqrt{\nu^3}+\sqrt{\nu}-2016}{\nu^3+\nu-2016}}{\frac{1}{\sqrt{\nu^3}}} = \lim \frac{\nu^3+\sqrt{\nu^4}-2016\cdot\sqrt{\nu^3}}{\nu^3+\nu-2016}$$

$$= \lim \frac{\nu^3+\nu^2-2016\sqrt{\nu^3}}{\nu^3+\nu-2016} = \lim \frac{\nu^3}{\nu^3} = 1$$

Η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει ως αρμονική

αφού $p = \frac{3}{2} > 1$. Επομένως από το οριακό κριτήριο σύγκλισης σειρών, συγκλίνει και η α_ν

(8) Να εξεταστεί η σύγκλιση της παρακάτω σειράς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\nu+2016}}{5^{\nu-1}\cdot \nu!}$$

Λύση

Θεωρούμε $a_\nu = \dfrac{\nu^{\nu+2016}}{5^{\nu-1}\cdot \nu!}$, άρα $a_{\nu+1} = \dfrac{(\nu+1)^{\nu+2017}}{5^{\nu}\cdot(\nu+1)!}$

$$\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim \frac{\dfrac{(\nu+1)^{\nu+2017}}{5^\nu(\nu+1)!}}{\dfrac{\nu^{\nu+2016}}{5^{\nu-1}\cdot\nu!}} = \lim \frac{5^{\nu-1}\cdot\cancel{\nu!}\cdot(\nu+1)^{\nu+2017}}{5^\nu\,\cancel{\nu!}\,(\nu+1)\cdot\nu^{\nu+2016}}$$

$$= \lim \frac{5^{\cancel{\nu}-1-\cancel{\nu}}\,(\nu+1)^\nu\,(\nu+1)^{2017}}{(\nu+1)\cdot\nu^\nu\cdot\nu^{2016}} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu \frac{(\nu+1)^{2017}}{\nu^{2016}(\nu+1)^1}$$

$$= \frac{1}{5}\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \frac{(\nu+1)^{2017-1}}{\nu^{2016}} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{2016}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot e\cdot 1 = \frac{e}{5} < 1$$

Άρα η αρχική σειρά συγκλίνει.

(3) Αν $|x| \leq 3$ να αποδείξετε ότι: (10)

$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{x^{\nu-1}}{\nu^3 \cdot 3^{\nu-1}} = 0, \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \nu \in \mathbb{N}$$

<u>Λύση:</u>

Θεωρούμε $a_\nu = \dfrac{x^{\nu-1}}{\nu^3 \cdot 3^{\nu-1}}$, άρα $a_{\nu+1} = \dfrac{x^\nu}{(\nu+1)^3 \cdot 3^\nu}$

$$\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim \frac{\frac{x^\nu}{(\nu+1)^3 \cdot 3^\nu}}{\frac{x^{\nu-1}}{\nu^3 \cdot 3^{\nu-1}}} = \frac{x^\nu \cdot \nu^3 \cdot 3^{\nu-1}}{x^{\nu-1} \cdot (\nu+1)^3 \, 3^\nu}$$

$$= \lim x^{\nu-\nu+1} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^3 3^{\nu-1-\nu} =$$

$$= \frac{x}{3} \lim \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^3 = \frac{x}{3} \lim \frac{\nu^3}{\nu^3+3\nu^2+3\nu+1}$$

$$= \frac{x}{3} \lim \frac{\nu^3}{\nu^3} = \frac{x}{3} \cdot 1 = \frac{x}{3} < 1$$

$$|x| \leq 3 \iff \frac{|x|}{3} \leq 1$$

Άρα συγκλίνει

$$\lim a_\nu = \lim \frac{x^{\nu-1}}{\nu^3 \cdot 3^{\nu-1}} = \lim \left(\frac{x}{3}\right)^{\nu-1} \nu^{-3}$$

$$= \text{κάτι} \cdot 0 = 0$$

ΘΕΜΑ 3ο (2.5 Μ)

(1) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to \sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{2016}{x^2-\pi}\right)$$

Σε περίπτωση που υπάρχει το παραπάνω όριο, να υπολογιστεί. Διαφορετικά να αποδείξετε τη μη ύπαρξη του.

Λύση:

Αρχικά θα πρέπει να βρούμε δύο ακολουθίες x_ν, y_ν

Λύνουμε την $\sin\left(\frac{2016}{x^2-\pi}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2016}{x_\nu^2-\pi} = \nu\pi \Leftrightarrow x_\nu^2 - \pi = \frac{2016}{\nu\pi}$

$\Leftrightarrow x_\nu^2 = \frac{2016}{\nu\pi} + \pi$

Επομένως θεωρούμε την $x_\nu = \sqrt{\frac{2016}{\nu\pi}} + \sqrt{\pi}$

Υπολογίζουμε το $\lim_{\nu \to +\infty} x_\nu = \sqrt{\pi}$

$$f(x_\nu) = \sin\left(\frac{2016}{\frac{2016}{\nu\pi} + \cancel{\pi} - \cancel{\pi}}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\nu\pi\, \cancel{2016}}{\cancel{2016}}\right) = 0$$

Λύνουμε την:

$$\sin\left(\frac{2016}{x^2-\pi}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{2016}{x_\nu^2-\pi} = n\pi+\pi/2$$

$$\Leftrightarrow x_\nu^2-\pi = \frac{2016}{\frac{2n\pi+\pi}{2}} \Leftrightarrow x_\nu^2 = \frac{4032}{2n\pi+\pi}+\pi$$

Άρα θεωρούμε την $y_\nu = \sqrt{\frac{4032}{2n\pi+\pi}\ \pi}$

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{\nu\to\infty} y_\nu = \sqrt{\pi}$$

$$f(y_\nu) = \sin\left(\frac{2016}{\frac{4032}{2n\pi+\pi}+\cancel{\pi}-\cancel{\pi}}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{2016(2n\pi+\pi)}{4032}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{2n\pi+\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

Επομένως δεν υπάρχει το όριο