ΤΜΗΜΑ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: Ποσοτικές Μέθοδοι I
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011

ΘΕΜΑ 1ο

(1) (2.5Μ) Μια εταιρεία παράγει τρία διαφορετικά (εξερχόμενα) προϊόντα σε ποσότητες Y_1, Y_2 και Y_3. Στην παραγωγική διαδικασία χρησιμοποιούνται και εισερχόμενα προϊόντα με αντίστοιχες ποσότητες x_1, x_2, x_3, ώστε:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gauss, βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι ποσότητες Y_1, Y_2 και Y_3 για να μπορούν να προσδιοριστούν οι ποσότητες των εισερχόμενων προϊόντων X_1, X_2 και X_3.

Λύση:

$$\begin{array}{c} 3 \quad 6 \quad 3 \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\Gamma_2' = \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \begin{array}{c} 5 \quad 10 \quad 5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{\Gamma_3' = \Gamma_3 - 5\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3'' = \Gamma_3' - \Gamma_2'} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{άρα} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + x_1 \\ y_2 &= -5x_2 - x_3 \\ y_3 &= 0 \end{aligned}}$$

(2) (2.5 Μ) Βρείτε τα ακρότατα σημεία της συνάρτησης $f(x,y,z) = x\cdot e^{-x} + y\cdot e^{-2y} + z\cdot e^{-z}$ και στη συνέχεια, διερευνείστε εάν αποτελούν μέγιστο ή ελάχιστο.

Λύση:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x} + x e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x} - xe^{-x}$

Θέλω $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1-x) = 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} = 0$ αδύνατο ή $1-x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-2y} + y e^{-2y}(-2)$

Θέλω $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow e^{-2y} - 2ye^{-2y} = 0 \Leftrightarrow e^{-2y}(1-2y) = 0$

$\Leftrightarrow 1-2y=0 \Leftrightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}}$

- $\frac{\partial f}{\partial z} = e^{-z} - ze^{-z}$

Θέλω $\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow e^{-z}(1-z) = 0 \Leftrightarrow \boxed{z=1}$

Επομένως πιθανό σημείο ακροτάτων είναι το

$$(x,y,z) = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Για να επιβεβαιώσουμε το ακρότατο υπολογίζουμε τους Εσσιανούς Πίνακες.

(3)

$$H_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad H_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

- $f_x = e^{-x} - xe^{-x}$, $f_{xx} = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x} - 2e^{-x}$

$f_{xx}/_{(1,\frac{1}{2},1)} = 1\cdot e^{-1} - 2\cdot e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

$f_{xy} = f_{yx} = 0$, $f_{xz} = f_{zx} = 0$

- $f_y = e^{-2y} - 2ye^{-2y}$, $f_{yy} = -2e^{-2y} - 2e^{-2y} - 2ye^{-2y}(-2)$

$= -4e^{-2y} + 4ye^{-2y}$

$f_{yy}/_{(1,\frac{1}{2},1)} = -4e^{-1} + 2e^{-1} = -\frac{2}{e}$

- $f_z = e^{-z} - ze^{-z}$, $f_{zz} = -e^{-z} - e^{-z} + ze^{-z}$

$= -2e^{-z} + z\cdot e^{-z}$

$f_{zz}/_{(1,\frac{1}{2},1)} = -2e^{-1} + 1e^{-2} = -\frac{1}{e}$

$f_{zx} = f_{zy} = 0$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ – ΘΕΩΡΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ 3ων ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

(A) Για να είναι $\boxed{\text{μέγιστο}}$ (τοπικό) πρέπει $H_2(x_0,y_0,z_0) < 0$, $H_3(x_0,y_0,z_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0,y_0,z_0) < 0$ (H_1)

(Πίνακας αρνητικά ορισμένος)

(B) Για να είναι $\boxed{\text{ελάχιστο}}$ (τοπικό) πρέπει $H_2(x_0,y_0,z_0) > 0$, $H_3(x_0,y_0,z_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0,y_0,z_0) > 0$ (H_1)

(Πίνακας θετικά ορισμένος)

$f_{xx}(1, \frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{e} < 0 \quad (H_1)$

$$H_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{e}\right)\cdot\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2} > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{e} \end{vmatrix} = -\frac{1}{e^3} < 0$$

Άρα αρνητικά ορισμένος πίνακας, επομένως τοπικό μέγιστο.

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 2º}}$

(1) (2.5 Μ). Οι μεταβλητές x, y, z συνδέονται με τις σχέσεις

$G_1(x,y,z) = \ln(x) + \ln(y) + \ln(z) = 3$

$G_2(x,y,z) = 4\ln(y) - \ln(x) + \ln(z) = 4$

(α) Εξετάστε εάν μπορούν να εκφραστούν οι μεταβλητές y και z ως συναρτήσεις της μεταβλητής x, ώστε $y = \phi(x)$ και $z = \psi(x)$, σε μια περιοχή του σημείου $(x,y,z) = (e,e,e)$

(β) Βρείτε την παράγωγο $\frac{d\phi}{dx}$ στο σημείο $(x,y,z) = (e,e,e)$

Λύση:

(α) Για να μπορούν οι μεταβλητές y και Z να εκφραστούν ως $y=\varphi(x)$ και $Z=\psi(x)$, θα πρέπει να επαληθεύσουμε τις προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος Πεπλεγμένης συνάρτησης:

$$F_1(x,y,z) = G_1(x,y,z) - 3 = 0$$
$$= \ln(x) + \ln(y) + \ln(z) - 3 = 0$$

(1) $F_1(e,e,e) = \ln e + \ln e + \ln e - 3 = 1+1+1-3=0$

$$F_2(x,y,z) = G_2(x,y,z) - 4 = 0$$
$$= 4\ln(y) - \ln(x) + \ln(z) - 4 = 0$$
$$F_2(e,e,e) = 4\ln e - \ln e - \ln e - 4 = 0$$

(2) $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{1}{z}$

Συνεχείς συναρτήσεις

$\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = -\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial y} = \dfrac{4}{y}$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial z} = \dfrac{1}{z}$

Συνεχείς συναρτήσεις

(3) Πρέπει η ορίζουσα του πίνακα Jacobi να είναι διάφορη του μηδενός

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{z} \\[2ex] \dfrac{4}{y} & \dfrac{1}{z} \end{vmatrix}_{(e,e,e)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{e} & \frac{1}{e} \\ \frac{4}{e} & \frac{1}{e} \end{vmatrix} = \frac{1}{e^2} - \frac{4}{e^2} = \frac{1-4}{e^2} = -\frac{3}{e^2} \neq 0$$

Άρα μπορούμε να το γράψουμε σε μορφή
$y=\varphi(x)$ και $z=\psi(x)$

(B) Βρείτε την παράγωγο $\frac{d\varphi}{dx}$ στο σημείο
$(x,y,z)=(e,e,e)$ $\rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$ (αφού $y=\varphi(x)$)

Λύση:

Θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος Πεπλεγμένης συνάρτησης για να παραγωγίσουμε τις συναρτήσεις $F_1(x,y,z)$, $F_2(x,y,z)$ ως προς x.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{x}\cdot 1 + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{1}{x}\cdot 1 + \frac{4}{y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Για $(x,y,z)=(e,e,e)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{e}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{e}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{e} \\ \frac{4}{e}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{e}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{e} \end{aligned}\right\}$$

$$(=) \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} &= -1 \\ 4\,\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \qquad D_x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2$$

άρα $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$

<u>Παρατήρηση:</u>

Θα μπορούσε να έχεις γιατί $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{5}{-3}$

$$D_y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 4 = 5$$

(2) (2.5 Μ) Υπολογίστε το εμβαδόν που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$g(u) = \dfrac{u-1}{u^2}\, e^u$ και τον οριζόντιο άξονα

για $u = 0{,}5$ έως 2

<u>Λύση:</u>

$$\int_{0,5}^{2}\left(\frac{u-1}{u^2}\cdot e^u\right)du = \int_{0,5}^{2}\left(\frac{x-1}{x^2}\,e^x\right)dx$$

$$= \int_{0,5}^{2}\frac{e^x}{x}\,dx - \int_{0,5}^{2}\frac{1}{x^2}\cdot e^x\,dx$$

$$= \int_{0,5}^{2}(e^x)'\,\frac{1}{x}\,dx - \int_{0,5}^{2}\frac{e^x}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{e^x}{x}\right]_{0,5}^{2} - \int_{0,5}^{2} e^x\left(\frac{1}{x}\right)'dx - \int_{0,5}^{2}\frac{e^x}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^{0,5}}{0.5} + \cancel{\int_{0,5}^{2}\frac{e^x}{x^2}\,dx} - \cancel{\int_{0,5}^{2}\frac{e^x}{x^2}\,dx}$$

$$= \frac{e^2-4e^{0,5}}{2} = \frac{7,3891 - 6,5949}{2} = \frac{0,80}{2} = 0,40$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 3ο}}$

Οι πόροι που πρόκειται να διατεθούν από μια εταιρεία για τη διαφημιστική της εκστρατεία σε δύο χώρες ανέρχονται σε 20 (δεκάδες χιλιάδες €). Εκτεταμένη έρευνα αγοράς, έδειξε ότι εάν η εταιρεία διαθέσει ένα ποσό χρημάτων X (σε δεκάδες χιλιάδες €) σε διαφήμιση στη χώρα A, οι πωλήσεις της (σε δεκάδες χιλιάδες € αναμένεται να είναι $100+100X-2X^2$

Αντίστοιχα, στη χώρα Β, η διάθεση ποσού y (σε δεκάδες χιλιάδες €) σε διαφήμιση συνεπάγεται πωλήσεις $200 + 60y$ (σε δεκάδες χιλιάδες €). Η εταιρεία σκοπεύει να αναλώσει πλήρως τον προϋπολογισμό για διαφήμιση. Το περιθώριο κέρδους δηλαδή το κέρδος ως ποσοστό στις πωλήσεις είναι 20%. (9)

(α) (2Μ). Με τη μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange βρείτε το ποσό που πρέπει να διατεθεί για την διαφημιστική εκστρατεία σε κάθε χώρα, ώστε η εταιρεία να <u>μεγιστοποιήσει</u> το κέρδος της.

(β) (1Μ). Εάν η εταιρεία είναι διατεθειμένη να ενισχύσει τους πόρους που διαθέτει για τη διαφημιστική της εκστρατείας κατά 1 (δεκάδα χιλιάδα €) ποιο θα είναι το αποτέλεσμα στο κέρδος της εταιρείας.

(γ) (2Μ). Την επόμενη χρονιά η εταιρεία σχεδιάζει να δαπανήσει ποσό $x = 8$ (δεκάδες χιλιάδες €) για διαφήμιση στη χώρα Α. Στη συνέχεια, όμως σκοπεύει να αυξήσει το ποσό x που θα διαθέσει για διαφήμιση στη χώρα Α με ρυθμό 2 (δεκάδες χιλιάδες €) ανά μήνα, διατηρώντας σταθερό το ποσό των 20 (δεκάδων χιλιάδων €) που διαθέτει συνολικά για διαφήμιση και για τις δυο χώρες. Η σχέση των πωλήσεων και της διαφημιστικής δαπάνης σε καθεμία χώρα παραμένει αμετάβλητη με την πάροδο του χρόνου. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του κέρδους ανά μήνα.

Λύση:

(α) Αρχικά υπολογίζουμε το κέρδος της επαιρείας:

$$f(x,y) = [100 + 100x - 2x^2 + 200 + 60y] \cdot 0,2$$
$$= (300 + 100x - 2x^2 + 60y) \cdot 0,2$$
$$= 60 + 20x - 0,4x^2 + 12y$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Lagrange υπο του περιορισμού $g(x,y) = 20 - x - y$

άρα $L(x,y,\lambda) = 60 + 20x - 0,4x^2 + 12y + \lambda(20 - x - y)$

- $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow -0,8x + 20 - \lambda = 0 \Leftrightarrow -0,8x + 20 - 12 = 0$
  $\Leftrightarrow 0,8x = 8 \Leftrightarrow \boxed{x = 10}$

- $\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 12 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 12}$

- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 20 - x - y = 0 \Leftrightarrow 20 - 10 - y = 0$
  $\Leftrightarrow \boxed{y = 10}$

Υπολογίζουμε τον Πλαισιωμένο Εσσιανό πίνακα

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -1 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = g_{xx} = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = g_{xy} = 0 = g_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = g_{yy} = 0$$

$$f(x,y) = 60 + 20x - 0,4x^2 + 12y$$

$f_x = 20 - 0{,}8x \ , \ f_{xx} = -0{,}8$

$f_{xy} = 0 = f_{yx}$

$f_y = 12, \ f_{yy} = 0$

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & (f_{xx} - \lambda \cdot g_{xx}) & (f_{xy} - \lambda g_{xy}) \\ g_y & (f_{xy} - \lambda g_{xy}) & (f_{yy} - \lambda g_{yy}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -0{,}8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ – ΘΕΩΡΙΑ

Συνθήκες 2ης τάξης – Συνθήκες Lagrange

- Εάν $\det(\tilde{H}) < 0$, τότε έχουμε (τοπικό) ελάχιστο, υπό τον περιορισμό.
- Εάν $\det(\tilde{H}) > 0$, τότε έχουμε (τοπικό) μέγιστο, υπό τον περιορισμό.

$$\det(\tilde{H}) = 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -0{,}8 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + (-1)\left[-1 \cdot 0 - 0{,}8\right] = 0{,}8 > 0$$

Άρα έχουμε πράγματι μέγιστο

(β) Εάν η εταιρεία αυξήσει τους πόρους κατά μια μονάδα τότε η μεταβολή στον περιορισμό είναι 1 και αφού $\lambda = 12$ τότε η μεταβολή του κέρδους θα αυξηθεί κατά 12.

(γ) Η μεταβολή του κέρδους ανά μήνα είναι:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 20 - 0{,}8 \cdot x, \quad \frac{dx}{dt} = 2 \ (\text{Εκφώνηση})$$

$$\frac{df}{dy} = 12, \quad \frac{dy}{dt} = -2$$

Διότι: $y = 20 - x$

$$\frac{df}{dt} = (20 - 0{,}8 \cdot x) \cdot 2 + 12 \cdot (-2)$$

$$\overset{x=8}{=} (20 - 0{,}8 \cdot 8) \cdot 2 - 24$$

$$= (20 - 6{,}4) \cdot 2 - 24$$

$$= 27{,}2 - 24 = 3{,}2.$$

ΤΜΗΜΑ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ (1)

ΜΑΘΗΜΑ: Ποσοτικές Μέθοδοι Ι

Σεπτέμβριος 2011

ΘΕΜΑ 1ο

(1) (2.5Μ). Υπολογίστε τον δεξιά αντίστροφο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Λύση:

Ο Πίνακας A είναι 2x3. Επομένως αναζητάμε ένα πίνακα R 3x2. Δηλαδή: $R = \begin{pmatrix} x & r \\ y & s \\ z & t \end{pmatrix}$ ώστε $AR = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & r \\ y & s \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3y+5z & r+3s+5t \\ 2x+4y+6z & 2r+4s+6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x+3y+5z=1 \\ 2x+4y+6z=0 \\ \text{και} \\ r+3s+5t=0 \\ 2r+4s+6t=1 \end{array}\right\}$$

Θα εφαρμόσουμε Gauss - Jordan:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix}2 & 6 & 10 & 2 & 0\end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} \boxed{1} & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{\Gamma_2' = \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2'' = -\frac{1}{2}\Gamma_2'} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$