ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

(1)

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικός Λογισμός σε Επιχειρησιακά Προβλήματα

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
4/7/2014

Ζήτημα 1ο (25%)

(α) Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{dAEΠ}{dt} + 4 \cdot AEΠ = 12$ που περιγράφει τη διαχρονική εξέλιξη του ΑΕΠ(t) μιας χώρας. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (15%)

(Β) Να εξετασεί εαν η συνάρτηση του ΑΕΠ είναι δυναμικά ευσταθής ή όχι. Επίσης να ελέγξετε την ορθότητα της λύσης του ερωτήματος (α) (10%)

Ζήτημα 2ο (25%)

Εστω ότι το μακροοικονομικό μοντέλο που περιγράφει την εθνική οικονομία ως προς Y, C, I, r ορίζεται από τις εξισώσεις:

Εθνικό Εισόδημα: $Y = C + I + G \quad (G > 0)$

Κατανάλωση: $C = a \cdot Y + b \quad (0 < a < 1,\ b > 0)$

Επενδύσεις: $I = cr + d \quad (c < 0,\ d > 0)$

Προσφορά Χρήματος: $M = kY + \lambda r \quad (k > 0,\ \lambda < 0,\ M > 0)$

όπου G οι κυβερνητικές δαπάνες, r το επιτόκιο αγοράς και a, b, c, d, κ, λ σταθερές

(α) Να γραφτεί το σύστημα στη μορφή $AX = B$ (5%)

(β) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα Cramer να προσδιοριστεί η τιμή του επιτοκίου αγοράς δεδομένου ότι το ακόλουθο διάνυσμα γραμμή δίνει τις τιμές των σταθερών, των κυβερνητικών δαπανών και της προσφοράς χρήματος (τα b, d, G και M σε δισεκατ €):

$$w' = [\alpha, b, c, d, \kappa, \lambda, G, M] = [0.5, 50, -0.1, 2, 0.5, -0.2, 100, 150]$$

(20%)

Ζήτημα 3ο (25%)

Έστω ο πίνακας W και το διάνυσμα Z

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Z = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Να διερευνηθεί αν το σύστημα $W \cdot x = Z$ έχει μία, καμία ή άπειρες λύσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μετασχηματισμού γραμμών Gauss για την τάξη (Rank) ενός πίνακα

Ζήτημα 4ο: (25%)

(α) Έστω χαρτοφυλάκιο που περιέχει 3 μετοχές D, E και F. Οι ετήσιες αποδόσεις των στοιχείων δίνονται από του ακόλουθο διάνυσμα γραμμή: $r' = [0.10, 0.15, 0.09]$

Ο Πίνακας διακύμανσης-συνδιακύμανσης των αποδόσεων είναι:

$$X = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}02 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα των συντελεστών στάθμισης δίνεται ως εξής:

$$\Pi' = [\alpha \;\; \beta \;\; \gamma]$$

Ζητούνται οι τιμές του διανύσματος των συντελεστών στάθμισης που ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου $V(\alpha,\beta,\gamma) = \Pi' X \Pi$, υπό τον περιορισμό η απαιτούμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου να ανέρχεται 6%. Διατυπώστε μαθηματικά τη συνάρτηση Lagrange με δύο περιορισμούς και περιγράψτε τις ικανές συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για το κριτήριο 1ης παραγώγου (ΚΠΠ) και 2ης παραγώγου (ΚΔΠ). Διατυπώστε τον αντίστοιχο Πλαισιωμένο Εσιανό πίνακα και τα πρόσημα που πρέπει να έχουν οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες του Πλαισιωμένου Εσιανού για να έχει η συνάρτηση $V(\alpha,\beta,\gamma)$ ελάχιστο (15%)

(B) Αφού πολλαπλασιάσετε κάθε στοιχείο του πίνακα διακύμανσης - συνδιακύμανσης του ερωτήματος (α) επί 100 υπολογίστε την ορίζουσα, τον βαθμό και τις ιδιοτιμές του νέου πίνακα. Είναι επίσης αντιστρέψιμος (10%)

[Υποδ: επισημαίνεται ότι για το ερώτημα (α) δεν ζητείται αριθμητική επίλυση]

Ζήτημα 3

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|W| = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-10+2) + 2\cdot(0+4) = -8+8 = 0$$

Αφου $|W|=0$ το $\text{rank}(W) < 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -10+2 = -8 \neq 0$$

άρα $\text{rank}(W) = 2$

$$[W, Z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}([W,Z]) \leq 3$$

$$[W,Z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3' = r_3 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3' = r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

άρα $\text{rank}([W,Z]) \leq 2$

Παίρνουμε μια υποορίζουσα του $[w, z]$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 \neq 0 \quad \text{άρα} \quad \operatorname{rank}([w, z]) = 2$$

Επομένως οι εξισώσεις είναι εξαρτημένες και υπάρχει άπειρος αριθμός λύσεων

Ζήτημα 2

$$r' = [0.10,\ 0.15,\ 0.09], \quad X = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$\Pi' = [\alpha, \beta, \gamma], \quad V(\alpha, \beta, \gamma) = \Pi' X \Pi, \quad \text{περιορισμός } r = 0{,}08$$

Λύση

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \Pi' r - \lambda\, \Pi' X \Pi$$

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2) = f(\alpha, \beta, \gamma) + \lambda_1 [c_1 - g_1(\alpha, \beta, \gamma)] + \lambda_2 [c_2 - g_2(\alpha, \beta, \gamma)]$$

ΚΠΠ (αναγκαίες συνθήκες)

$$L_\alpha = 0, \quad L_\beta = 0, \quad L_\gamma = 0, \quad L_{\lambda_1} = 0, \quad L_{\lambda_2} = 0$$

ΚΔΠ (ικανές συνθήκες)

Εξετάζεται η ορίζουσα του ακόλουθου Περιφραγμένου Εσσιανού πίνακα:

$$HB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{1a} & g_{1B} & g_{1\gamma} \\ 0 & 0 & g_{2a} & g_{2B} & g_{2\gamma} \\ g_{1a} & g_{2a} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_{1B} & g_{2B} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_{1\gamma} & g_{2\gamma} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

Όταν $|HB| > 0$ υπάρχει ελάχιστο

(B)

$$100 \cdot X = \begin{pmatrix} 100 \cdot 0{,}01 & 100 \cdot 0 & 100 \cdot 0{,}01 \\ 100 \cdot 0 & 100 \cdot 0{,}01 & 100 \cdot 0{,}01 \\ 100 \cdot 0{,}01 & 100 \cdot 0{,}01 & 100 \cdot 0{,}02 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

<u>Ορίζουσα</u>

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (2-1) + 1(0-1) = 1 - 1 = 0$$

Άρα ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος αφού $\det(A)=0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$

ο παρονομαστής είναι μηδέν άρα δεν γίνεται να αντιστραφεί.

Τάξη - Βαθμός του A

Αφού $\det(A)=0$ άρα $\operatorname{rank}(A)<3$

Παίρνουμε μια υποορίζουσα

$$\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix} = 2-1=1\neq 0 \quad \text{άρα} \quad \operatorname{rank}(A)=2$$

Ιδιότητες

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$|A-\lambda I_3|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&1\\1-\lambda&1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-1\right]+(-1)(1-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-2\right]=0$$

$\Leftrightarrow 1-\lambda = 0$ ή $(1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 3$

άρα οι ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 3$$

Ζήτημα 1

$$\frac{dΑΕΠ}{dt} + 4 \cdot ΑΕΠ = 12$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι γραμμική 1ης τάξης της μορφής $ΑΕΠ'(t) + a \cdot ΑΕΠ(t) = b$ με $a = 4$ και $b = 12$

<u>1ο Βήμα</u> (Λύση Ομογενούς)

Θα λύσω την ομογενή δηλαδή την

$ΑΕΠ'(t) + 4 \cdot ΑΕΠ = 0$

Η λύση είναι της μορφής $ΑΕΠ_0(t) = A e^{-a \cdot t}$

$\Leftrightarrow ΑΕΠ_0(t) = A e^{-4t}$

2ο Βήμα (Μερική Λύση)

Θα βρούμε μια ειδική λύση

$$ΑΕΠ_{\mu}(t) = \frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3$$

3ο Βήμα (Γενική Λύση)

$$ΑΕΠ(t) = ΑΕΠ_{0}(t) + ΑΕΠ_{\mu}(t)$$

$$\Leftrightarrow ΑΕΠ(t) = A \cdot e^{-4t} + 3 \quad (A)$$

(Β) Ευστάθεια - Δυναμική Σύγκλιση

Αφού $a>0$, $a=4$ η λύση της εξίσωσης συγκλίνει δυναμικά (καθώς $t \to \infty$) στην ειδική λύση $ΑΕΠ_{\mu}(t) = 3$

Έλεγχος

$$\frac{dΑΕΠ}{dt} = -4A e^{-4 \cdot t} \quad (\text{Από την } A)$$

άρα η αρχική γίνεται

$$-4Ae^{-4 \cdot t} + 4\left(A \cdot e^{-4t} + 3\right)$$

$$= -\cancel{4Ae^{-4t}} + \cancel{4Ae^{-4t}} + 12 = 12$$ Β' μέλος αρχικής άρα σωστή.

$\boxed{\text{Ζήτημα 2}}$

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ K & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ I \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ b \\ d \\ M \end{bmatrix}$$

Με την μέθοδο Cramer Έχουμε:

(B)
$$r = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & G \\ -a & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & d \\ K & 0 & 0 & M \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ K & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}}$$

Υπολογίζω την ορίζουσα που χρειάζεται σύμφωνα με τα δεδομένα

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 100 \\ -0{,}5 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 150 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 100 \\ -0{,}5 & 1 & 50 \\ 0{,}5 & 0 & 150 \end{vmatrix} +$$

$$2\cdot(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0{,}5\cdot(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 100 \\ 1 & 50 \end{vmatrix} +$$

$$+150\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -0{,}5 & 1\end{vmatrix}+2\left[0{,}5\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right]$$ (8)

$$=0{,}5\cdot(-50-100)+150\,(1-0{,}5)+2\left[0{,}5\cdot(0-1)\right]$$

$$=-75+75+2\cdot(-0{,}5)=-1$$

Άρα η ορίζουσα του ερωτηματικού είναι -1

Υπολογίζω την ορίζουσα του παρονομαστή

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ -0{,}5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0{,}1\\ 0{,}5 & 0 & 0 & -0{,}2\end{bmatrix}$$

$$=1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -0{,}5 & 1 & 0\\ 0{,}5 & 0 & -0{,}2\end{vmatrix}+0{,}1\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -0{,}5 & 1 & 0\\ 0{,}5 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -0{,}2\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-0{,}5 & 0\\ 0{,}5 & -0{,}2\end{vmatrix}+$$

$$+(-0{,}1)\left[0{,}5\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right]$$

$$+ 1(-0,2 - 0) + (-1)^4 (0,1 - 0) + (-0,1)\left[0,5(0+1)\right]$$

$$= -0,2 + 0,1 + (-0,1)\cdot 0,5$$

$$= -0,10 - 0,05 = -0,15$$

άρα $r = \dfrac{|\text{ορίζουσα αριθμητή}|}{|\text{ορίζουσα παρονομαστή}|} = \dfrac{-1}{-0,15} = 6,6667$