ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικός Λογισμός σε Επιχειρησιακά Προβλήματα

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 7/2/2014

Ζήτημα 1ο (30%)

Έστω ο πίνακας W και το διάνυσμα Z

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Z = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Να διερευνηθεί αν το σύστημα $Wx = Z$ έχει μία, καμία ή άπειρες λύσεις χρησιμοποιώντας τον ορισμό τάξης (Rank) ενός πίνακα.

Ζήτημα 2ο (20%)

Έστω χαρτοφυλάκιο που περιέχει 3 μετοχές A, B και C. Οι ετήσιες αποδόσεις των στοιχείων δίνονται στον ακόλουθο διάνυσμα γραμμή: $r' = [0{,}10 \;\; 0{,}15 \;\; 0{,}09]$

Ο Πίνακας διακύμανσης - συνδιακύμανσης των αποδόσεων είναι:

$$X = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}02 \end{bmatrix}$$

Το νέο διάνυσμα των συντελεστών στάθμισης δίνεται ως εξής: $\Pi' = [a \;\; B \;\; \gamma]$

Ζητούνται οι τιμές του διανύσματος των συντελεστών στάθμισης που ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου $V(\alpha,\beta,\gamma) = \Pi' X \Pi$, υπό τον περιορισμό η απαιτούμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου να ανέρχεται στο 8%. Διατυπώστε μαθηματικά τη συνάρτηση Lagrange με δυο περιορισμούς και περιγράψτε τις ικανές συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για το κριτήριο 1ης παραγώγου (ΚΠΠ) και 2ης παραγώγου (ΚΔΠ). Διατυπώστε τον αντίστοιχο Πλαισιωμένο Εσσιανό πίνακα και τα πρόσημα που πρέπει να έχουν οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες του Πλαισιωμένου Εσσιανού για να έχει η συνάρτηση $V(\alpha,\beta,\gamma)$ ελάχιστο.
[Υποδ: επισημαίνεται ότι δεν ζητείται αριθμητική επίλυση]

Ζήτημα 3ο (30%)

Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα: $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(α) Μπορεί ο πίνακας να διαγωνοποιηθεί; Εάν ναι, βρείτε τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων και τον πίνακα των ιδιοτιμών και επιβεβαιώστε (αποδείξτε) την πράξη της διαγωνοποίησης. Εάν όχι, εξηγήστε γιατί; (20%)

(β) Υπολογίστε τον βαθμό (τάξη) του πίνακα Z και χαρακτηρίστε την «οριστικότητα» του (10%)

Ζήτημα 4ο (20%)

Ο ρυθμός μείωσης του κόστους K (σε €) ενός προϊόντος μετά την εισαγωγή νέων τεχνολογιών στη διαδικασία παραγωγής περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση $dK/dt = -0{,}05(K-10)$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $K=20$ όταν $t=0$, όπου t ο χρόνος σε εβδομάδες. Ποια είναι η εξίσωση που περιγράφει τη διαχρονική εξέλιξη του κόστους του προϊόντος.

Ζήτημα 1

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|W| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-10+2) + 2 \cdot (0+4) = -8+8 = 0$$

Αφου $|W| = 0$ το $\text{rank}(W) < 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -10+2 = -8 \neq 0$$

άρα $\text{rank}(W) = 2$

$$[W, Z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}([W, Z]) \leq 3$$

$$[W, Z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3' = r_3 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3' = r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

άρα $\text{rank}([W, Z]) \leq 2$

Παίρνουμε μια υποορίζουσα του $[w, z]$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 \neq 0 \text{ άρα } rank([w,z]) = 2$$

Επομένως οι εξισώσεις είναι εξαρτημένες και υπάρχει άπειρος αριθμός λύσεων.

$\boxed{\text{Ζήτημα 2}}$

$$r' = [0.10,\ 0.15,\ 0.09] \quad , \quad X = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$\Pi' = [a, B, \gamma] \quad , \quad V(a,B,\gamma) = \Pi' X \Pi \quad , \text{ περιορισμός } r = 0{,}08$$

Λύση

$$f(a,B,\gamma) = \Pi' r - \lambda \Pi' X \Pi$$

$$L(a, B, \gamma, \lambda_1, \lambda_2) = f(a,B,\gamma) + \lambda_1 [c_1 - g_1(a,B,\gamma)]$$
$$+ \lambda_2 [c_2 - g_2(a,B,\gamma)]$$

ΚΠΠ (αναγκαίες συνθήκες)

$$L_a = 0,\ L_B = 0,\ L_\gamma = 0,\ L_{\lambda_1} = 0,\ L_{\lambda_2} = 0$$

ΚΔΜ (ικανές συνθήκες)

Εξετάζεται η ορίζουσα του ακόλουθου περιφραγμένου Εσσιανού πίνακα:

$$HB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{1a} & g_{1B} & g_{1\gamma} \\ 0 & 0 & g_{2a} & g_{2B} & g_{2\gamma} \\ g_{1a} & g_{2a} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_{1B} & g_{2B} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_{1\gamma} & g_{2\gamma} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

Όταν $|HB| > 0$ υπάρχει ελάχιστο

$\boxed{\text{Ζήτημα 3}}$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Χαρακτηριστική Εξίσωση

$$|Z - \lambda I_3| = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (1-\lambda)\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-1\right] + (-1)(1-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-2\right] = 0$

$\Leftrightarrow 1-\lambda = 0$ ή $(1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\cancel{2} - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - \cancel{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 3$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$

• Για $\lambda_1 = 0$ Λύνουμε το σύστημα: $(Z - \lambda I_3)X_1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-0 & 1 \\ 1 & 1 & 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_3 = -x_1 \\ x_3 = -x_2 \end{matrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$V(\lambda) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ με } x_1 \in \mathbb{R}$$

Κανονικοποιώ

$x_1^2 + x_1^2 + (-x_1)^2 = 1 \Leftrightarrow 3x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

• Για $\lambda_2 = 1$, $(Z - 1 I_3) X_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

Κανονικοποίηση

$$x_1^2 + (-x_1)^2 + 0^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = 0$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $\lambda_3 = 3$, $(Z - \lambda I_3) X_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 1 \\ 0 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_3 = 2x_1 \\ x_3 = 2x_2 \end{matrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_1 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2x_1$$

<u>Κανονικοποίηση</u>

$$x_1^2 + x_1^2 + 4x_1^2 = 1 \Leftrightarrow 6x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}, \quad x_3 = 2\frac{\sqrt{6}}{6} \Leftrightarrow x_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του Z

$$T = (X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

γ)

$$T'ZT=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt3}{3} & -\frac{\sqrt3}{3} \\ \frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt6}{6} & \frac{\sqrt6}{6} & \frac{\sqrt6}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt6}{6} \\ \frac{\sqrt3}{3} & -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt6}{6} \\ -\frac{\sqrt3}{3} & 0 & \frac{\sqrt6}{3} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ άρα διαγωνοποιείται

(B) <u>$1^{\text{ος}}$ τρόπος (Γραμμοπράξεις)</u>

$$Z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3'=\Gamma_3-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3'=\Gamma_3-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

τα διανύσματα $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα άρα $\text{rank}(z)=2$

<u>$2^{\text{ος}}$ τρόπος (Ορίζουσες)</u>

$$\det(z)=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1(2-1)+1(0-1)=1-1=0$$

Υποορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$

άρα $\text{rank}(z)=2$

$\boxed{\text{Ζήτημα 4}}$

$$K(0) = 20$$

$$K'(t) = -0{,}05\left[K(t) - 10\right]$$

$$\Leftrightarrow K'(t) = -0{,}05\,K(t) + 0{,}5 \Leftrightarrow K'(t) + 0{,}05\,K(t) = 0{,}5$$

$\boxed{\text{Βήμα 1}^{\text{ο}}:}$ (Λύση Ομογενούς)

Λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή

$$K'(t) + 0{,}05\,K(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = -0{,}05\,K \Leftrightarrow \frac{dK}{K} = -0{,}05\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dK}{K} = \int -0{,}05\,dt \Leftrightarrow \ln|K| = -0{,}05t + c_1$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln|K|} = e^{-0{,}05 \cdot t + c_1}$$

$$\Leftrightarrow K(t) = e^{-0{,}05 \cdot t} \cdot e^{c_1}$$ Θέτουμε $e^{c_1} = c$

$$\Leftrightarrow \boxed{K_0(t) = c\,e^{-0{,}05 \cdot t}}$$

$\boxed{\text{Βήμα 2}}$ (Μερική Λύση)

$$K_p(t) = C(t) \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$$

$$K'_p(t) = C'(t) \cdot e^{-0{,}05t} + C(t) \cdot e^{-0{,}05t}(-0{,}05)$$

$$\Leftrightarrow K'_p(t) = C'(t) \cdot e^{-0{,}05t} - 0{,}05\,C(t) \cdot e^{-0{,}05t}$$

Αντικαθιστούμε στην αρχική

$$C'(t)e^{-0,05\cdot t} - \cancel{0,05\,C(t)e^{-0,05t}} + \cancel{0,05\cdot C(t)e^{-0,05t}} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow C'(t) = 0,5\cdot e^{0,05t}$$

$$\Rightarrow C(t) = 0,5\int e^{0,05\cdot t}dt \Leftrightarrow C(t) = \frac{0,5}{0,05}e^{0,05t}$$

$$\Leftrightarrow C(t) = 10e^{0,05\cdot t}$$

άρα $K_r(t) = 10e^{0,05\cdot t}\cdot e^{-0,05\cdot t} \Leftrightarrow K_r(t) = 10$

Βήμα 3 (Γενική Λύση)

$$K(t) = K_r(t) + K_o(t)$$

$$\Leftrightarrow K(t) = ce^{-0,05t} + 10$$

$$K(0) = 20 \Leftrightarrow 20 = ce^{-0,05\cdot 0} + 10$$

$$\Leftrightarrow c\cdot e^{0} = 10 \Leftrightarrow \boxed{c = 10}$$

Άρα $\boxed{K(t) = 10\cdot e^{-0,05\cdot t} + 10}$