# ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ

**Μάθημα** : Λογισμός Ι και Γραμμική Άλγεβρα

**Εξέταση** : Σεπτέμβριος 2015

## ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

### ΘΕΜΑ 1ο

Να βρεθούν οι ρίζες $z^3 = 1+i$

Αρχικά θα βρούμε την τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού $w = 1+i$. Έχουμε $x=1$ και $y=1$

$\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Άρα $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

και $\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα $\theta = \frac{\pi}{4}$ ή $45^\circ$

άρα $w = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)$ ή γενικότερα

$$w = \sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\,\eta\mu\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Άρα έχουμε να λύσουμε την $z^3 = w$, $\nu = 3$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης δίνονται από τον τύπο:

$$z_\kappa = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}}{3} + i\,\eta\mu\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}}{3}\right]$$

με $\kappa = 0, 1, 2$

$$Z_k = \sqrt[6]{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{8k\pi+\pi}{12}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{8k\pi+\pi}{12}\right)\right]$$

Για $k=0$ έχουμε:

$$Z_0 = \sqrt[6]{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{12}\right]$$

$$Z_1 = \sqrt[6]{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right]$$

$$= \sqrt[6]{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} + i\,\eta\mu\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$Z_2 = \sqrt[6]{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{12} + i\,\eta\mu\frac{17\pi}{12}\right]$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 2ο}}$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Θα βρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1$$

$= \lambda^2 - 5\lambda + 5$, Για να βρούμε τις ιδιοτιμές θέτουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ίσο με μηδέν.

$$\varphi(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0. \quad \Delta = 25 - 20 = 5$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} < \begin{matrix} \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{matrix}$$

άρα $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

$\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

## ΘΕΜΑ 3:



Να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο Cramer ή Gauss

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

Crammer

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-3) + (-1)(-1-6) + (1+4) = -1 + 7 + 5 = 11$$

$$DX_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(2-3) + (-1)(-3-12) + (3+8) = -4 + 15 + 11 = 22$$

$$DX_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-12) + 4(-1)(-1-6) + (4-6)$$

$$= -15 + 28 - 2 = 11$$

$$DX_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-8-3) + (-1)(4-6) + 4(1+4) = -11 + 2 + 20 = 11$$

άρα $x_1 = \dfrac{DX_1}{D} = \dfrac{22}{11} = 2 \iff \boxed{x_1 = 2}$

$x_2 = \dfrac{DX_2}{D} = \dfrac{11}{11} = 1 \iff \boxed{x_2 = 1}$

$x_3 = \dfrac{DX_3}{D} = \dfrac{11}{11} = 1 \iff \boxed{x_3 = 1}$

Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{11}{3} \end{array}\right)$$

$-\frac{11}{3} x_3 = -\frac{11}{3} \iff \boxed{x_3 = 1}$

$-3x_2 + 2x_3 = -1 \iff -3x_2 + 2 = -1 \iff -3x_2 = -3$

$\iff \boxed{x_2 = 1}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \iff x_1 + 1 + 1 = 4 \iff \boxed{x_1 = 2}$

## ΘΕΜΑ 4ο

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+4}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+4} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

## ΘΕΜΑ 5ο

Ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0 για τις τρεις πρώτες τιμές της παράστασης $\ln(x+1)$

Λύση:

Ο τύπος του αναπτύγματος για $x=0$ είναι:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2$$

$$f(0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{άρα} \quad f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{άρα} \quad f''(0) = -\frac{1}{(0+1)^2} = -1$$

άρα $f(x) = 0 + 1\cdot x + \frac{(-1)}{2!}\cdot x^2$

$$\Leftrightarrow f(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ } 6^{\underline{o}}}$

Να λυθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+7x+2}$

<u>Λύση:</u>

$$\Delta = 7^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 49 - 8 = 41 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{2} \begin{cases} \frac{-7+\sqrt{41}}{2} = x_1 = -0{,}3 \\ \frac{-7-\sqrt{41}}{2} = x_2 = -6{,}7 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2+7x+2} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2}$$

$$\Leftrightarrow A_1(x-x_2) + A_2(x-x_1) = 1$$

$$\Leftrightarrow A_1(x+6{,}7) + A_2(x+0{,}3) = 1$$

$$\Leftrightarrow A_1\cdot x + 6{,}7A_1 + A_2\cdot x + 0{,}3A_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (A_1+A_2)\cdot x + (6{,}7A_1 + 0{,}3A_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 = -A_2 \\ 6{,}7A_1 + 0{,}3A_2 = 1 \\ \Leftrightarrow -6{,}7A_2 + 0{,}3A_2 = 1 \Leftrightarrow -6{,}4A_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A_2 = -0{,}15625$$

$$A_1 = 0{,}15625$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-3x+2}\,dx = \int_0^1 \frac{0,15625}{x+0,3}\,dx + \int_0^1 \frac{-0,15625}{x+6,7}\,dx$$

$$= 0,15625\left[\ln|x+0,3|\right]_0^1 - 0,15625\left[\ln|x+6,7|\right]_0^1$$

$$= 0,15625\left[\ln 1,3 - \ln 0,3\right] - 0,15625\left[\ln 7,7 - \ln 6,7\right]$$

$$= 0,15625 \cdot (1,47) - 0,15625 \cdot 0,14$$

$$= 0,15625\left[1,47 - 0,14\right] = 0,15625 \cdot 1,33$$

$$= 0,21$$