ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ (1)

Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής

Εξέταση: 25/06/2014

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΟΜΑΔΑ Α

Ζήτημα 1ο (3Μ)

(Α) Επειδή δεν μας απασχολεί η σειρά δηλαδή η ταξινόμηση των ποδοσφαιριστών, έχουμε συνδυασμούς. Επιπλέον κάθε άτομο είναι μοναδικό, επομένως έχουμε συνδυασμούς χωρίς επανάληψη. Οπότε οι διαφορετικές ομάδες των 11 παικτών που μπορούν να επιλεχθούν είναι:

$$\binom{15}{11} = \frac{15!}{11!\,(15-11)!} = \frac{15!}{11!\cdot 4!} =$$

$$= \frac{\cancel{11!}\cdot \cancel{12}\cdot 13\cdot \overset{7}{\cancel{14}}\cdot 15}{\cancel{11!}\; 1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}} = 13\cdot 7\cdot 15 = 1.365$$

Επομένως οι διαφορετικές ομάδες των 11 παικτών που μπορούν να επιλεχθούν οι 1.365.

(β) Αφού ο κάθε παίκτης μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις 11 διαφορετικές θέσεις, οι ενδεκάδες που μπορούν να σχηματίσουν είναι:

$11! = 39.916.800$ τρόποι.

(γ) Αφού θέλουμε 4 συγκεκριμένοι παίκτες να συμμετάσχουν οπωσδήποτε στο παιχνίδι οι διαφορετικοί τρόποι που θα συμβεί αυτό είναι: $\binom{4}{4}$.

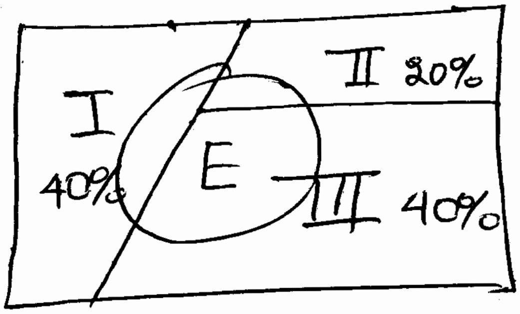
Επομένως οι υπόλοιποι θα συμπληρωθούν ως εξής: $\binom{15-4}{11-4} = \binom{11}{7}$

Τελικά έχουμε: $\binom{4}{4} \cdot \binom{11}{7} =$

$$= \frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,(4-4)!} \cdot \frac{11!}{7!\,(11-7)!} = \frac{1}{0!}\,\frac{11!}{7!\,4!} =$$

$$= 1 \cdot \frac{\cancel{7!}\,\cancel{8}\cdot\overset{3}{\cancel{9}}\cdot 10\cdot 11}{\cancel{7!}\,1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}} = 30 \cdot 11 = 330 \text{ τρόποι}$$

$\boxed{\text{Ζήτημα } 2^{o}}$ (4Μ)



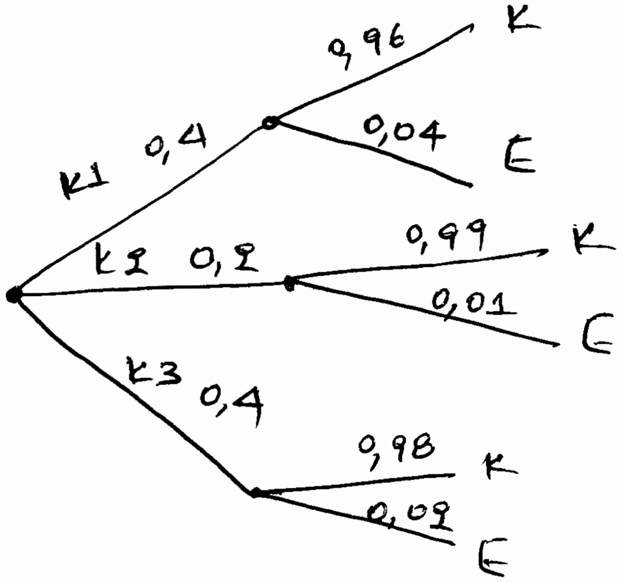
Ονομάζουμε τα ενδεχόμενα:

Έστω: K_1: Το ενδεχ. να πάρουμε μήλο από το καφάσι I

K_2: Το ενδεχόμενο να πάρουμε μήλο από το καφάσι II

K_3: Το ενδεχόμενο να πάρουμε μήλο από το καφάσι III

E: Το ενδεχόμενο του μήλο που πήραμε να είναι σάπιο



$P(K_1) = 0,4$, $P(K_2) = 0,2$

$P(K_3) = 0,4$

$P(E/K_1) = 0,04$

$P(E/K_2) = 0,01$

$P(E/K_3) = 0,02$

(i) $P(E) = P(K_1)\cdot P(E/K_1) + P(K_2)\cdot P(E/K_2) + P(K_3)\cdot P(E/K_3)$

$= 0,4 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 0,02$

$= 0,016 + 0,002 + 0,008 = 0,026$

(ii) $P(K_1/E) = \dfrac{P(K_1)\cdot P(E/K_1)}{P(E)} = \dfrac{0,4 \cdot 0,04}{0,026}$

$= \dfrac{0,016}{0,026} = 0,6154$ ή $61,54\%$

$\boxed{\text{Ζήτημα } 3^{\text{ο}}}$ (3Μ)

$$f(x) = \begin{cases} a\cdot 6\cdot x^3 - a\,\frac{21}{2}\cdot x^2 + a\cdot 5\cdot x \,, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Ισχύει ότι: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\Leftrightarrow \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx} + \int_0^1 f(x)dx + \cancelto{0}{\int_1^{\infty} f(x)dx} = 1$$

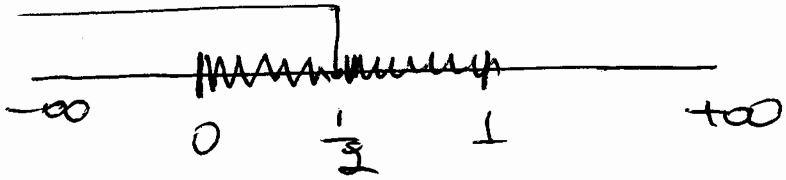
$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(a\cdot 6\cdot x^3 - a\,\frac{21}{2}\cdot x^2 + a\cdot 5\cdot x\right) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 a\cdot 6\cdot x^3\, dx - \int_0^1 a\,\frac{21}{2}\,x^2 dx + \int_0^1 a\cdot 5\cdot x\, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{6a}{4}\left[x^4\right]_0^1 - \frac{21}{2}\cdot a\,\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1 + \frac{5a}{2}\left[x^2\right]_0^1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a}{2}(1-0) - \frac{7a}{2}(1-0) + \frac{5a}{2}(1-0) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = 2}$$

(B) 

$f(x) = 12x^3 - 21x^2 + 10x$

(i) $P(X \leq \frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx} + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} (12x^3 - 21x^2 + 10x)\,dx$

$= \frac{12}{4}\left[x^4\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{21}{3}\left[x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{10}{2}\left[x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= 3 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 0^4\right) - 7\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0^3\right) + 5\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2\right)$

$= 3\,\frac{1}{16} - \frac{7}{8} + \frac{5}{4} = \frac{3}{16} - \frac{14}{16} + \frac{20}{16}$

$= \frac{9}{16} = 0{,}5625$

(ii) $P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx + \cancelto{0}{\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx}$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (12x^3 - 21x^2 + 10x)\,dx$

$= \frac{12}{4}\left[x^4\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{21}{3}\left[x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{10}{2}\left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= 3\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right] - 7\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] + 5\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

$$= 3\left(1 - \frac{1}{16}\right) - 7\left(1 - \frac{1}{8}\right) + 5\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 3\left(\frac{15}{16}\right) - 7 \cdot \frac{7}{8} + 5\,\frac{3}{4} = \frac{45}{16} - \frac{49}{8} + \frac{15}{4}$$

$$= \frac{45}{16} - \frac{98}{16} + \frac{60}{16} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$$

Παρατηρούμε ότι: $P(X \leq \frac{1}{2}) + P(X > \frac{1}{2}) = 1$

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ

Μάθημα : Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής

Εξέταση : 25/06/2014

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΟΜΑΔΑ Β

Ζήτημα 1ο (3Μ)

(Α) Επειδή δεν μας απασχολεί η σειρά, δηλαδή η ταξινόμηση των υπαλλήλων, έχουμε συνδυασμούς. Επιπλέον κάθε άτομο είναι μοναδικό, επομένως έχουμε συνδυασμούς χωρίς επανάληψη. Οπότε οι διαφορετικές ομάδες των 6 υπαλλήλων που μπορούν να επιλεχθούν είναι: $\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!(12-6)!} =$

$$= \frac{12!}{6!\cdot 6!} = \frac{\cancel{6!}\cdot 7\cdot \overset{4}{\cancel{8}}\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \cancel{10}\cdot 11\cdot \cancel{12}}{\cancel{6!}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{6}} = 7\cdot 4\cdot 3\cdot 11$$

$$= 28\cdot 33 = 924$$

(β) Αφού ο κάθε υπάλληλος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις 6 εξειδικευμένες θέσεις, οι εξάδες που μπορούν να σχηματίσουν είναι:

$6! = 720$

(γ) Αφού θέλουμε 2 συγκεκριμένοι υπάλληλοι να συμμετάσχουν οπωσδήποτε στην εξάδα οι διαφορετικοί τρόποι που θα συμβεί αυτό είναι: $\binom{2}{2}$

Επομένως οι υπόλοιποι θα συμπληρωθούν ως εξής:

$$\binom{12-2}{6-2} = \binom{10}{4}$$

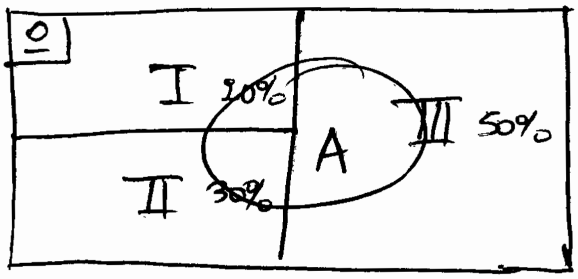
Τελικά έχουμε: $\binom{2}{2} \cdot \binom{10}{4} =$

$$= \frac{\cancel{2}!}{\cancel{2}!\,(2-2)!} \cdot \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{1}{0!} \cdot \frac{10!}{4!\,6!}$$

$$= 1 \cdot \frac{\cancel{6!}\,7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4! \cdot \cancel{6!}} = \frac{7 \cdot \cancel{8} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot 10}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}}$$

$$= 7 \cdot 3 \cdot 10 = 21 \cdot 10 = 210 \text{ τρόποι}$$

Ζήτημα 2ο: (4Μ)



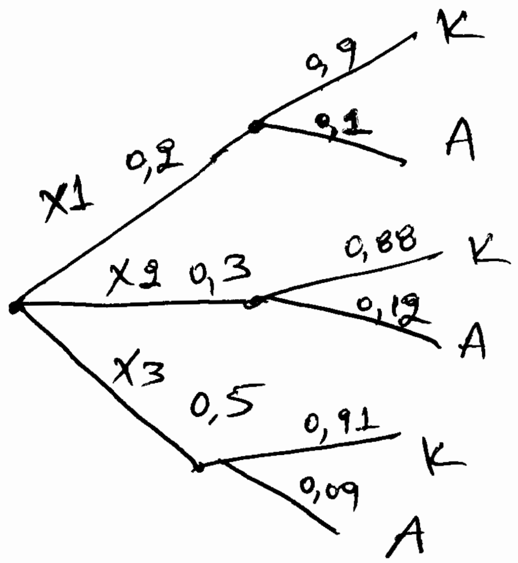
Ονομάζουμε τα ενδεχόμενα

Έστω: X_1: Το ενδεχόμενο να πάρουμε φράουλα από το χωράφι I

X_2: Το ενδεχόμενο να πάρουμε φράουλα από το χωράφι II

X_3: Το ενδεχόμενο να πάρουμε φράουλα από το χωράφι III

A: Το ενδεχόμενο η φράουλα να είναι άγουρη



$P(X_1) = 0,2, \quad P(X_2) = 0,3$

$P(X_3) = 0,5$

$P(A/X_1) = 0,1$

$P(A/X_2) = 0,12$

$P(A/X_3) = 0,09$

(i) $P(A) = P(X_1)\cdot P(A/X_1) + P(X_2)\cdot P(A/X_2) + P(X_3)\cdot P(A/X_3)$

$= 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,12 + 0,5 \cdot 0,09$

$= 0,02 + 0,036 + 0,045 = 0,101$

(ii) $P(X_3/A) = \dfrac{P(X_3)\cdot P(A/X_3)}{P(A)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,09}{0,101}$

$= \dfrac{0,045}{0,101} = 0,4455$ ή $44,55\%$

Ζήτημα 3ο: (3Μ)

$$f(x) = \begin{cases} c(x+5), & -5 \le x \le 0 \\ c(-x+5), & 0 \le x \le 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{-5} f(x)dx}^{\,0} + \int_{-5}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx + \cancel{\int_{5}^{+\infty} f(x)dx}^{\,0} = 1$

$\Leftrightarrow \int_{-5}^{0} c(x+5)dx + \int_{0}^{5} c(-x+5)dx = 1 \quad (A)$

$\Leftrightarrow c\int_{-5}^{0}(x+5)dx + c\int_{0}^{5}(-x+5)dx = 1$

- $\int_{-5}^{0} (x+5)dx = \frac{1}{2}[x^2]_{-5}^{0} + 5[x]_{-5}^{0} =$

$= \frac{1}{2}[0^2 - (-5)^2] + 5(0+5)$

$= \frac{1}{2}(0-25) + 25 = -\frac{25}{2} + 25 = -\frac{25}{2} + \frac{50}{2}$

$= \frac{25}{2}$

- $\int_{0}^{5} (-x+5)dx = -\frac{1}{2}[x^2]_{0}^{5} + 5[x]_{0}^{5}$

$= -\frac{1}{2}(25-0) + 5(5-0) = -\frac{25}{2} + 25$

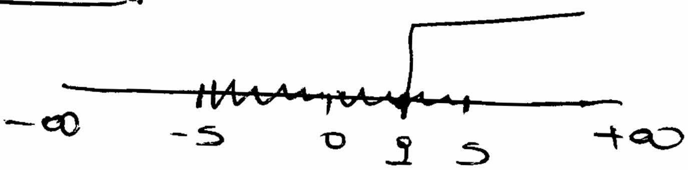
$= -\frac{25}{2} + \frac{50}{2} = \frac{25}{2}$

Άρα η (Α) γίνεται

$$c\left(\frac{25}{2}\right) + c\,\frac{25}{2} = 1 \iff 25c + 25c = 2$$

$$\iff 50c = 2 \iff \boxed{c = \frac{1}{25}}$$

(B)(i) $P(X \geq 2) =$



$$= \int_2^5 f(x)dx + \cancel{\int_5^{+\infty} f(x)dx}^{\,0} = \int_2^5 c(-x+5)dx$$

$$= c\int_2^5 (-x+5)dx$$

- $\int_2^5 -x+5\,dx = -\frac{1}{2}\left[x^2\right]_2^5 + 5\left[x\right]_2^5 = -\frac{1}{2}\left[25-4\right] + 5(5-2)$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 21 + 5\cdot 3 = -\frac{21}{2} + 15 = -\frac{21}{2} + \frac{30}{2} = \frac{9}{2}$$

άρα $P(X \geq 2) = \frac{1}{25}\,\frac{9}{2} = \frac{9}{50}$

(ii) $P(X < 2) = \cancel{\int_{-\infty}^{-5} f(x)dx}^{\,0} + \int_{-5}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$

$$c\int_{-5}^{0} f(x)dx = c\,\frac{25}{2} = \frac{1}{25}\cdot\frac{25}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 c(-x+5) = c\int_0^2 -x+5\,dx$$

$$= \frac{1}{25}\left[-\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^2 + 5\left[x\right]_0^2\right] = \frac{1}{25}\left[-\frac{1}{2}(4-0) + 5\cdot 2\right]$$

$$= \frac{1}{25}\left(-2+10\right) = \frac{1}{25}\cdot 8 = \frac{8}{25}$$

Τελικά: $P(X<2) = \frac{1}{2} + \frac{8}{25} = \frac{25}{50} + \frac{16}{50} = \frac{41}{50}$

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ

Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής

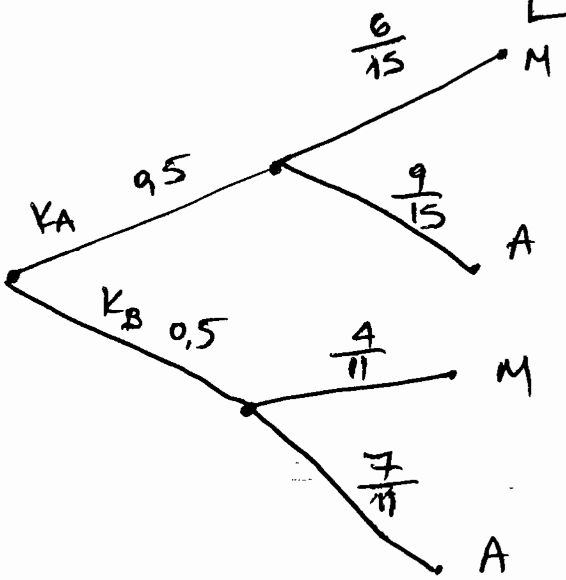
Εξέταση: 24/06/2015

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΟΜΑΔΑ Β

Ζήτημα 1ο (4Μ)

ΚΑΦΑΣΙ Α	ΚΑΦΑΣΙ Β
6Μ	4Μ
9Α	7Α



$$P(K_A)=0,5\ ,\ P(K_B)=0,5$$

$$P(M/K_A)=\frac{6}{15}\ ,\ P(A/K_A)=\frac{9}{15}$$

$$P(M/K_B)=\frac{4}{11}\ ,\ P(A/K_B)=\frac{7}{11}$$

(A) Επιλογή από το Καφάσι Ι (1 Μ και 2 Α)

$$P(K_A)=\frac{\binom{6}{1}\binom{9}{2}}{\binom{15}{3}}=\frac{\frac{6!}{1!\,5!}\cdot\frac{9!}{2!\,7!}}{\frac{15!}{3!\,12!}}=\frac{\frac{\cancel{5!}\cdot 6}{1\cdot\cancel{5!}}\cdot\frac{\cancel{7!}\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot\cancel{7!}}}{\frac{\cancel{12!}\cdot 13\cdot\cancel{14}\cdot\cancel{15}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{12!}}}$$

$$=\frac{6\cdot 4\cdot 9}{13\cdot 7\cdot 5}=\frac{216}{455}=0,4747$$

Επιλογή από το Κιβώτιο ΙΙ (1 Μ 2 Α)

$$P(K_B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{7}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{\frac{4!}{1!\,3!}\cdot\frac{7!}{2!\,5!}}{\frac{11!}{3!\cdot 8!}} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{3!}\,4}{1\cdot\cancel{3!}}\cdot\frac{\cancel{5!}\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot\cancel{5!}}}{\frac{\cancel{8!}\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cancel{8!}}} = \frac{4\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 11} = \frac{84}{165}$$

$$= 0{,}5091$$

Τελικά η πιθανότητα να πάρουμε 1 Μ και 2 Μ είναι:

$$P(\theta) = \frac{1}{2}\cdot P(K_A) + \frac{1}{2}\,P(K_B)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0{,}4747 + \frac{1}{2}\,0{,}5091$$

$$= 0{,}4919$$

(B) $$P(K_A/\theta) = \frac{P(K_A)\cdot P(\theta/K_A)}{P(\theta)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}4747}{0{,}4919}$$

$$= \frac{0{,}23735}{0{,}4919} = 0{,}4825$$

Ζήτημα 2ο (3Μ)

$$f(x) = \begin{cases} ax(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

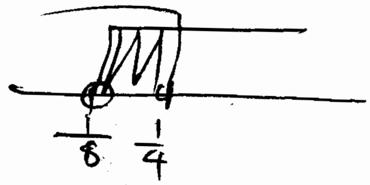
(α) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx} + \int_{0}^{1} f(x)dx + \cancelto{0}{\int_{1}^{+\infty} f(x)dx} = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 ax(1-x) = 1 \Leftrightarrow a\left[\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2 dx\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[x^2]_0^1 - \frac{1}{3}[x^3]_0^1 = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-0) - \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \boxed{a=6}$$



(β) $$P\left(X > \frac{1}{8} \,/\, X < \frac{1}{4}\right) = \frac{P\left(X > \frac{1}{8} \text{ και } X < \frac{1}{4}\right)}{P\left(X < \frac{1}{4}\right)}$$

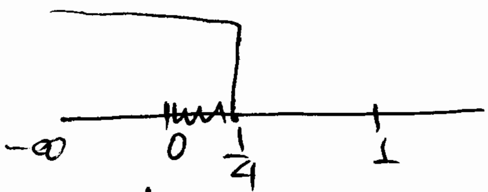
$$= \frac{P\left(\frac{1}{8} < X < \frac{1}{4}\right)}{P\left(X < \frac{1}{4}\right)}$$

$$P\left(\frac{1}{8} < X < \frac{1}{4}\right) = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} (6x - 6x^2)\, dx$$

$$= 3\left[x^2\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} - 2\left[x^3\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} = 3\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{64}\right) - 2\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{512}\right)$$

$$= 3\left(\frac{3}{64}\right) - 2\,\frac{7}{512} = \frac{9}{64} - \frac{14}{512} =$$

$$= \frac{72 - 14}{512} = \frac{58}{512}$$



$$P\left(X < \frac{1}{4}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{4}} f_{(x)}\, dx = \int_0^{\frac{1}{4}} 6x(1-x)\, dx$$

$$= \frac{6}{2}\left[x^2\right]_0^{\frac{1}{4}} - \frac{6}{3}\left[x^3\right]_0^{\frac{1}{4}} = 3\left(\frac{1}{16} - 0\right) - 2\left(\frac{1}{64} - 0\right)$$

$$= \frac{3}{16} - \frac{1}{32} = \frac{6}{32} - \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

<u>Τελικά:</u> $$P\left(X > \frac{1}{8} \,\middle|\, X < \frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{29}{256}}{\frac{5}{32}} = \frac{29 \cdot \cancel{32}}{5 \cdot \cancel{256}_{\,8}}$$

$$= \frac{29}{40} = 0,725$$

Ζήτημα 3ο (3Μ)

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad X \sim P(\lambda)$$

$$P(X=0) = 10^{-3}$$

(a) $E_\Gamma(X) = \lambda$. Θέλω ανά εβδομάδα άρα η παράμετρος θα γίνει $7\cdot\lambda$

$$E(X) = 7\cdot\lambda$$

$\boxed{k=0}$: $P(X=0) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^0}{0!} \Leftrightarrow 10^{-3} = e^{-\lambda}\cdot 1$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda} = 10^{-3} \Leftrightarrow \ln e^{-\lambda} = \ln 10^{-3}$

$\Leftrightarrow -\lambda\cdot\underbrace{\ln e}_{=1} = -3\cdot\ln 10 \Leftrightarrow -\lambda = -3\ln 10$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 3\ln 10}$

άρα $E(X) = 7\cdot 3\ln 10 \Leftrightarrow E(X) = 21\cdot\ln 10$

(β) Το $\lambda' = 3\lambda = 9\ln 10$

$$P(X=1) = e^{-\lambda'}\frac{\lambda'^1}{1!} = e^{-9\ln 10}\,\frac{9\cdot\ln 10^1}{1!} =$$

$$= e^{\ln 10^{-9}}\,9\ln 10 = 10^{-9}\cdot 9\cdot\ln 10 = 20{,}7\cdot 10^{-9}$$

$$= 2{,}07\cdot 10^{1}\cdot 10^{-9} = 2{,}07\cdot 10^{-8}$$

(γ) $\lambda' = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda' = 6\ln 10$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$P(X=0) = e^{-6\ln 10} \frac{\lambda'^0}{0!} = e^{\ln 10^{-6}} = 10^{-6}$$

$$P(X=1) = e^{-6\ln 10} \frac{6\ln 10}{1!} = 10^{-6} \cdot 6 \cdot \ln 10 = 13{,}81 \cdot 10^{-6}$$

$$P(X=2) = e^{-6\ln 10} \frac{(6 \cdot \ln 10)^2}{2!} = 10^{-6} \cdot \frac{36 \cdot \ln^2 10}{2} = 95{,}43 \cdot 10^{-6}$$

<u>Τελικά:</u> $P(X \leq 2) = 10^{-6} + 13{,}81 \cdot 10^{-6} + 95{,}43 \cdot 10^{-6}$

$$= 110{,}24 \cdot 10^{-6} = 1{,}1024 \cdot 10^{2} \cdot 10^{-6}$$

$$= 1{,}1024 \cdot 10^{-4} = 0{,}00011$$

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ

Μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής

Ζήτημα 1ο

$\boxed{10}\ \boxed{10}\ \boxed{10}$

Άρα τα δυνατά ψηφία που μπορούν να πάρουν οι πινακίδες είναι $10^3 = 1.000$ τρόποι

$$\left.\begin{array}{ccc} \boxed{I} & \boxed{I} & \boxed{\Delta} \\ \boxed{I} & \boxed{\Delta} & \boxed{I} \\ \boxed{\Delta} & \boxed{I} & \boxed{I} \end{array}\right\} \text{3 τρόποι}$$

1ο ψηφίο έχει 10 τρόπους

2ο " " 1 τρόπο αφού θα είναι ίδιο με το 1ο ψηφίο

3ο ψηφίο έχει 9 τρόπους

$3 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 9 = 30 \cdot 9 = 270$ τρόποι

Τελικά $P(Z) = \dfrac{27\cancel{0}}{100\cancel{0}} = 0{,}27$

Ζήτημα 2ο

(α) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} x \cdot f(x) dx}^{\,0} + \int_{0}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$

$$= \int_{0}^{+\infty} 2x^2 \cdot e^{-x^2}\, dx$$

(β) $P\left(\left|X - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right| < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = P\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2} < X - \frac{\sqrt{\pi}}{2} < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

$$= P\left(0 < X < \sqrt{\pi}\right) = \int_{0}^{\sqrt{\pi}} 2x\, e^{-x^2} dx$$

Θέτω $w = -x^2$, $dw = -2x\,dx$, $x=0,\ w=0$
$x = \sqrt{\pi},\ w = -\pi$

$$= -\int_{0}^{-\pi} e^{w} dw = \int_{-\pi}^{0} e^{w} dw = \left[e^{w}\right]_{-\pi}^{0} =$$

$$= e^{0} - e^{-\pi} = 1 - \frac{1}{e^{\pi}} = \frac{e^{\pi} - 1}{e^{\pi}} = \frac{22,10}{23,10} =$$

$= 0,9567$ ή $95,67\,\%$