Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1998

Θέμα 1

Α) α) Αν ο μιγαδικός αριθμός z_0 είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_\nu$ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha_\nu \neq 0$, να αποδείξετε ότι και ο $\overline{z_0}$ συζυγής του z_0 είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

β) Αν η πολυωνυμική εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί, έχει ως ρίζα το μιγαδικό αριθμό $2 - 3i$ να βρείτε τα β, γ καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ στο σημείο $A(1, f(1))$ όταν το x μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Β) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «ένα προς ένα»

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 2

Α) Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z_0 με $|\mathrm{Im}(z_0)| < 999$ και το σύνολο Α των μιγαδικών αριθμών z με $z \neq z_0$ και $z \neq \overline{z_0}$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{1}{|z - z_0|} + \frac{1}{|z - \overline{z_0}|} = \frac{1998}{|z - z_0||z - \overline{z_0}|}.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορούν να απέχουν μεταξύ τους οι εικόνες δυο μιγαδικών αριθμών του συνόλου Α.

Ποιοι είναι αυτοί οι μιγαδικοί αριθμοί;

Να εξετάσετε την περίπτωση $z_0 = \overline{z_0}$.

Β) Ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει $g(x)$ μονάδες του παραγόμενου προϊόντος. Αν $g(x) = \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}(1 - e^{-\mu x})$, $x \geq 0$ όπου M_0, M και μ είναι θετικές σταθερές, να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της $g(x)$. Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0;

Θέμα 3

Α) Δίνεται ο νxν πίνακας Α με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς για τον οποίο ισχύει: $A^2 - 2(\lambda-2)^2 A + I_\nu = O$ όπου I_ν είναι ο μοναδιαίος νxν πίνακας και λ πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι ο πίνακας $A + I_\nu$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε λ.

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)|A+xI| + (x-1)|A-xI| = 1-x^2$ όπου Α είναι ο πίνακας του ερωτήματος (Α) και x πραγματικός αριθμός έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(-1,1)$. Με $|A+xI|$ και $|A-xI|$ συμβολίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $A+xI$ και $A-xI$ αντίστοιχα.

Γ) Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ με πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$2P(1) = 2P(3) = 2P(5) = 2P(7) = 3P(2) = 3P(4) = 3P(6) = 3P(8)$ και το ενδεχόμενο $B = \left\{ \lambda \in \Omega \left(\begin{array}{c} \text{το σύστημα } AX = X \text{ έχει} \\ \text{τουλάχιστον δυο λύσεις} \end{array} \right) \right\}$ όπου Χ ένας νx1 άγνωστος πίνακας και Α ο πίνακας του ερωτήματος (Α). Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Β.

Δ) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + \gamma x + 4$ όπου ο συντελεστής γ επιλέγεται τυχαία από το δειγματικό χώρο Ω του ερωτήματος (Γ). Αν $\Gamma = \left\{ \gamma \in \Omega \left(\begin{array}{c} \text{η εξίσωση } f(x) = 0 \\ \text{έχει πραγματικές ρίζες} \end{array} \right) \right\}$ να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ και να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Β (του ερωτήματος (Γ)) και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Θέμα 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x) > 0$, $f'(x) + 2xf(x) = 0$, $x > 0$, και η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

Α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f.

Β) Να αποδείξετε ότι $\frac{x-1}{2x^2} f(x) < \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt < \frac{x-1}{2}$, για κάθε $x > 1$

Γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) f(t)\,dt$, $x > 1$

Δ) Να αποδείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2} dt < 1$ για κάθε $x > 1$.

Α' ΔΕΣΜΗ 1998 - ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

(Α) (α) Έστω ότι η πολυωνυμική εξίσωση:

$a_\nu \cdot x^\nu + a_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$, όπου $a_0, a_1, \dots, a_\nu \in \mathbb{R}$

έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό z_0. Τότε:

$$a_\nu z_0^\nu + a_{\nu-1} \cdot z_0^{\nu-1} + \dots + a_1 \cdot z_0 + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{a_\nu z_0^\nu + a_{\nu-1} \cdot z_0^{\nu-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0} = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{a_\nu z_0^\nu} + \overline{a_{\nu-1} \cdot z_0^{\nu-1}} + \dots + \overline{a_1 \cdot z_0} + \overline{a_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_\nu (\bar{z}_0)^\nu + a_{\nu-1} (\bar{z}_0)^{\nu-1} + \dots + a_1 (\bar{z}_0) + a_0 = 0$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζα και τον αριθμό $\bar{z}_0$

(β) Αφού $x_1 = 2-3i$ άρα $x_2 = \bar{x}_1 = 2+3i$. Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -B \\ x_1 \cdot x_2 = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -4 \\ \gamma = 13 \end{cases}$$

Άρα $f(x) = x^2 - 4x + 13$, $f'(x) = 2x - 4$

Άρα η εφαπτομένη θα έχει τύπο: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$\Leftrightarrow y - 10 = -2(x-1) \Leftrightarrow y = -2x + 12$

(Β) (α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

- $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$
- $f^3(x_1) = f^3(x_2)$

$\Big\}\ (+)\ f(f(x_1)) + f^3(x_1) = f(f(x_2)) + f^3(x_2)$

$\Leftrightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$. Άρα η f "1-1"

(B) $f(2x^3+x) = f(4-x)$, $x \in \mathbb{R}$

Αφού η f είναι "1-1" έχουμε: $2x^3+x = 4-x$

$\Leftrightarrow 2x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow x^3+x-2=0$

$\Leftrightarrow x^3-1+x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)+(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$ ή $x^2+x+2=0$ Αδύνατη.

ΘΕΜΑ 2ο

(A) $\dfrac{1}{|z-z_0|} + \dfrac{1}{|z-\bar{z}_0|} = \dfrac{1998}{|z-z_0||z-\bar{z}_0|} \Leftrightarrow |z-z_0|\cdot|z-\bar{z}_0| \neq 0$

$\Leftrightarrow |z-z_0| + |z-\bar{z}_0| = 1998$ (1)

Άρα ο Γ.Τ. των μιγαδικών είναι έλλειψη και η μεγαλύτερη δυνατή απόσταση $(AA) = 2a = 1998 \Leftrightarrow a = 999$

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι: $z_0 = x_0 + 999i$ και $\bar{z}_0 = x_0 - 999i$

Αν $z_0 = \bar{z}_0$ (1) γίνεται: $2|z-z_0| = 1998 \Leftrightarrow |z-z_0| = 999$

Άρα είναι κύκλος με $K(x_0, y_0)$, $\rho = 999$ με $y_0 < 999$

(B) Έχουμε: $g(x) = M_0 + M(1-e^{-\mu x}) = M_0 + M - Me^{-\mu x}$

Ο ρυθμός μεταβολής είναι: $g'(x) = 0 + 0 - (Me^{-\mu x})'$

$\Leftrightarrow g'(x) = -Me^{-\mu x}(-\mu x)' \Leftrightarrow g'(x) = M\mu e^{-\mu x}$, $x \in [0, +\infty)$

Έχουμε: $g(x) = M_0 + M - Me^{-\mu x} \Leftrightarrow Me^{-\mu x} = M_0 + M - g(x)$

$\Leftrightarrow M\mu e^{-\mu x} = \mu(M_0 + M - g(x)) \Leftrightarrow \boxed{g'(x) = \mu(M_0 + M - g(x))}$

Για $x=0$, έχουμε: $g(0) = M_0 + M(1-e^0) = M_0$.

Δηλαδή η τιμή αυτή του M_0 μας δείχνει τις μονάδες του προϊόντος που θα πάρουμε πριν προσθέσουμε ακόμα δίπασμα

ΘΕΜΑ 3:

(A) $A^2 - 2(\lambda-2)^2 \cdot A + I_v = 0$ (1)

Θέτω $A + I_v = X \Leftrightarrow A = X - I_v$ άρα η (1) γίνεται:

$$(X - I_v)^2 - 2(\lambda-2)^2 \cdot (X - I_v) + I_v = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - I_v)^2 - 2(\lambda-2)^2 X + 2(\lambda-2)^2 I_v + I_v = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - I_v)^2 - 2(\lambda-2)^2 X = -2(\lambda-2)^2 I_v - I_v$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 2XI_v + I_v^2 - 2(\lambda-2)^2 X = -2(\lambda-2)^2 I_v - I_v$$

$$\Leftrightarrow X\left[X - 2I_v - 2(\lambda-2)^2\right] = -2(\lambda-2)^2 I_v - 2I_v$$

$$\Leftrightarrow X\left[X - 2I_v - 2(\lambda-2)^2\right] = -\left[2(\lambda-2)^2 + 2\right] I_v \quad (2)$$

Παρατηρούμε $2(\lambda-2)^2 + 2 \neq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Άρα η (2) $\Rightarrow X \cdot \dfrac{(-1)}{2(\lambda-2)^2 + 2} \cdot \left[X - 2I_v - 2(\lambda-2)^2\right] = I_v$

Δηλαδή τελικά: $(A+I)^{-1} = -\dfrac{1}{2 + 2(\lambda-2)^2}\left[A - I_v - 2(\lambda-2)^2\right]$

Συνεπώς για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ο ζητούμενος πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

(B) Θεωρούμε $g(x) = (x+1)|A + xI| + (x-1)|A - xI| - 1 + x^2$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως πολυωνυμική

$g(-1) = -2|A - xI| < 0$

$g(1) = 2|A + xI| > 0$ Αφού $|A + I| \neq 0$ και ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος. Άρα $g(-1) \cdot g(1) < 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano

$\exists\, \xi \in (-1,1)$ τ.ω. $g(\xi) = 0$

(Γ) Θέτω $2P(1) = 2P(3) = 2P(5) = 2P(7) = 3P(2) = 3P(4) = 3P(6) = 3P(8) = K$

$P(\Omega) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + \dots + P(8) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{K}{2} + \frac{K}{3} + \frac{K}{2} + \frac{K}{3} + \frac{K}{2} + \frac{K}{3} + \frac{K}{2} + \frac{K}{3} = 1$

$\Leftrightarrow 3K + 2K + 3K + 2K + 3K + 2K + 3K + 2K = 6$

$\Leftrightarrow 20K = 6 \Leftrightarrow K = \frac{3}{10}$

Αναζητούμε το ενδεχόμενο B για το οποίο ισχύει:

$B = \{\lambda \in \Omega \,/\, A \cdot X = X\}$, το σύστημα έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

Έχουμε $A \cdot X = X \Leftrightarrow A \cdot X - X = O \Leftrightarrow (A - I_v) \cdot X = O$

Θέτω $B = A - I_v$. Το σύστημα μου θα είναι $B \cdot X = O$ που είναι ένα $v \times v$ ομογενές σύστημα. Το ομογενές σύστημα έχει πάντα τουλάχιστον τη μηδενική λύση. Για να μη μηδενικές λύσεις, πρέπει $|B| = 0 \Leftrightarrow |A - I_v| = 0$

Έχουμε $B = A - I_v \Leftrightarrow A = B + I_v$ και θέτω στην αρχική και έχουμε: $(B + I_v)^2 - 2(\lambda - 2)^2 (B + I_v) + I_v = O$

$\Leftrightarrow B^2 + [2 - 2(\lambda - 2)^2] B = -2 I_v + 2(\lambda - 2)^2 I_v$

$\Leftrightarrow B[B + (2 - 2(\lambda - 2)^2 I_v)] = [2(\lambda - 2)^2 - 2] I_v$

Εάν $2(\lambda - 2)^2 - 2 \neq 0$ τότε ο πίνακας B θα ήταν αντιστρέψιμος πράγμα το οποίο είναι ΑΤΟΠΟ, αφού $|B| = 0$

Άρα $2(\lambda - 2)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 1$ ή $\lambda - 2 = -1$

$\Leftrightarrow \lambda = 3$ ή $\lambda = 1$

Άρα $B=\{1,3\}$, $P(B)=P(1)+P(3)=\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=\frac{3}{10}$

(Δ) Για να έχει η $f(x)$ πραγματικές ρίζες πρέπει:

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \gamma^2-4\cdot 1\cdot 4\geq 0 \Leftrightarrow |\gamma|^2\geq 16 \Leftrightarrow |\gamma|\geq 4$.

$\Leftrightarrow \gamma\geq 4$ ή $\gamma\leq -4$ άρα $\boxed{\gamma\geq 4}$

Έστω $\Gamma=\{4,5,6,7,8\}$, $P(\Gamma)=P(4)+P(5)+P(6)+P(7)+P(8)$

$\Leftrightarrow P(\Gamma)=\frac{k}{3}+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}=k+k=2k=\frac{3}{5}$.

Επίσης, αφού $B\cap\Gamma=\phi$, σημαίνει ότι τα B και Γ είναι ασυμβίβαστα

ΘΕΜΑ 4ο $f:(0,+\infty)\longmapsto\mathbb{R}$ με $f(x)>0$

(Α) Για κάθε $x>0 \Rightarrow f'(x)=-2xf(x)$. Το 2ο μέλος είναι γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, άρα $f'(x)$ συνεχής στο $(0,+\infty)$

Για $x>0$ έχουμε: $f'(x)+2xf(x)=0$

$\Leftrightarrow e^{x^2}f'(x)+e^{x^2}2xf(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{x^2}f(x)\right)'=0$

$\Leftrightarrow e^{x^2}f(x)=c\in\mathbb{R}$ και επειδή η C_f διέρχεται από το $A(1,1)$, άρα $e^1\cdot f(1)=c \Leftrightarrow c=e$. Άρα $\boxed{f(x)=e^{1-x^2}}$

(Β) Έστω $g(t)=\frac{f(t)}{2t^2}$, $t>0$, τότε:

$$g'(t)=\frac{f'(t)\cdot 2t^2-f(t)(2t^2)'}{(2t^2)^2}=\frac{-2tf(t)\cdot 2t^2-f(t)\cdot 4t}{4t^4}$$

$$=-f(t)\frac{t^2+1}{t^3}=-e^{1-t^2}\cdot\frac{t^2+1}{t^3}<0$$

Άρα η $g \downarrow$ στο $(0,+\infty)$ και για κάθε $t \in [1,x]$

$\Rightarrow g(1) \geq g(t) \geq g(x) \Rightarrow g(1)-g(t) \geq 0$ και $g(t)-g(x) \geq 0$

Ακόμα: $1 < t < x \Rightarrow g(1) > g(t) > g(x)$

$\Rightarrow g(1)-g(t) > 0$ και $g(t)-g(x) > 0$, δηλαδή οι

$g(1)-g(t)$, $g(t)-g(x)$, δεν είναι παντού μηδέν, είναι

συνεχείς και μη αρνητικές στο $[1,x]$, οπότε

$$\int_1^x (g(1)-g(t))\,dt > 0 \ (1) \text{ και } \int_1^x (g(t)-g(x))\,dt > 0 \ (2)$$

Από (1) $\Rightarrow \int_1^x g(1)\,dt > \int_1^x g(t)\,dt \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{2}\,dt > \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}\,dt$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}\,dt < \frac{x-1}{2} \ (3)$$

Από την (2) $\Rightarrow \int_1^x g(t)\,dt > \int_1^x g(x)\,dt$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}\,dt > g(x)\int_1^x 1\,dt \Rightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}\,dt > \frac{x-1}{2x^2} f(x) \ (4)$$

Από (3), (4) $\Rightarrow \frac{x-1}{2x^2} f(x) < \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}\,dt < \frac{x-1}{2}$, $x>1$

(Γ) Για $x>1 \Rightarrow F(x) = \int_1^x \left(1+\frac{1}{2t^2}\right) f(t)\,dt$

$$= \int_1^x \left(f(t)+\frac{1}{2t^2} f(t)\right) dt = \int_1^x \left(e^{1-t^2}+\frac{1}{2t^2}e^{1-t^2}\right) dt$$

$$= \int_1^x \left(-\frac{1}{2t}e^{1-t^2}\right)' dt = \left[-\frac{1}{2t}e^{1-t^2}\right]_1^x$$

$$= -\frac{1}{2x}e^{1-x^2}+\frac{1}{2}$$

(Δ) Έχουμε για $x>1$: $2e\int_1^x e^{-t^2}dt < 1 \Leftrightarrow 2\int_1^x e^{1-t^2}dt < 1$

$\Leftrightarrow 2\int_1^x f(t)dt < 1 \Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt < \frac{1}{2}$ (5)

Είναι $e^{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2} - 1 > -1 \Leftrightarrow f(x) - f(1) > -1$

$\Leftrightarrow \int_1^x f'(t)dt > -1 \Leftrightarrow \int_1^x (-2t\, f(t))\, dt > -1$

$\Leftrightarrow \int_1^x t\, f(t)dt < \frac{1}{2}$ (6)

Για $t>1 \overset{f(t)>0}{\Longrightarrow} t\,f(t) > f(t) \Rightarrow t\,f(t) - f(t) > 0$

Επειδή η $t\,f(t) - f(t)$ είναι συνεχής στο $[1,x]$, $x>1$

δεν είναι παντού μηδέν στο $[1,x]$, θα είναι για $t\in[1,x]$

$t\,f(t) - f(t) \geq 0$, οπότε: $\int_1^x (t\,f(t) - f(t))dt > 0$

Δηλαδή: $\int_1^x t\,f(t)dt > \int_1^x f(t)dt$ (7)

Από (6), (7) $\Rightarrow \int_1^x f(t)dt < \frac{1}{2}$, δηλαδή αληθεύει η (5)