Μαθηματικά Πρώτης Δέσμης
1997

Θέμα 1

Α) Να αποδείξετε ότι αν ένας τετραγωνικός πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφος του είναι μοναδικός.

Β) Έστω Α, Β είναι νxν πίνακες και έστω ότι οι πίνακες Α, Β και $2AB-3I_\nu$ είναι αντιστρέψιμοι. Να αποδειχθεί ότι οι πίνακες $\Gamma = 2A-3B^{-1}$ και $\Delta = \left(2A-3B^{-1}\right)^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμοι.

Θέμα 2

Α) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και $B = \frac{f'(\alpha) - Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$. Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R} - \{\alpha\}$, τέτοια ώστε $\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{(x-\alpha)} + \frac{\phi(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x \to \alpha} \phi(x)$

Β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε $(x-2)f''(x) + \left(\alpha\eta\mu x - \beta x^2\right)f'(x) = e^{x-2} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho \neq 2$, ώστε $f'(\rho) = 0$. Να εξετάσετε αν το $f(\rho) = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

Θέμα 3

Α) Δίνεται πραγματική συνάρτηση g, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

ii) $g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει $g(x+y)=e^y g(x)+e^x g(y)+xy+\alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $g(0)=-\alpha$

ii) $g'(x)=g(x)+g'(0)e^x+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 4

Έστω C είναι η γραμμή του επιπέδου με εξίσωση $y=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ όπου α, β, γ, δ είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha \neq 0$. Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$, $\Delta(x_4, y_4)$ είναι σημεία της C. Υποθέτουμε ότι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ συμπίπτει με το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ και επίσης υποθέτουμε ότι το μέσο αυτό δεν ανήκει στην ευθεία που έχει εξίσωση $\beta+3\alpha x=0$.

Α) Να αποδειχθεί ότι $x_1 \cdot x_2 = x_3 \cdot x_4$

Β) Να αποδειχθεί ότι το σημείο Α συμπίπτει με το σημείο Γ ή με το σημείο Δ.

Α' ΔΕΣΜΗ 1997 – ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1

(Α) Θεωρούμε ένα ν-τετραγωνικό πίνακα A. Αν υπάρχει ν-τετραγωνικός πίνακας B με: $AB = BA = I_\nu$ (1) τότε αυτός είναι μοναδικός, ονομάζεται αντίστροφος πίνακας του A, δηλαδή ο A^{-1}.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει πίνακας $B \in \Pi_\nu$, για τον οποίο ισχ

Έστω ότι υπάρχει και ένας άλλος πίνακας $\Gamma \in \Pi_\nu$ με $\Gamma \neq B$ και $A\Gamma = \Gamma A = I_\nu$ (2). Από τις (1), (2) έχουμε:

$$AB = I_\nu \Rightarrow \Gamma(AB) = \Gamma \cdot I_\nu \Rightarrow (\Gamma A)\cdot B = \Gamma \Leftrightarrow I_\nu \cdot B = \Gamma$$

$\Rightarrow B = \Gamma$ άτοπο.

Άρα ο B είναι μοναδικός

(Β) $\Gamma = 2A - 3B^{-1} \Leftrightarrow \Gamma B = 2AB - 3I \Leftrightarrow \Gamma B \cdot (2AB - 3I)^{-1} = I$

$\boxed{\Gamma^{-1} = B\cdot(2AB - 3I)^{-1}}$, αφού $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = I$ άρα ο Γ αντιστρέψ.

$$\Delta = (2A - 3B^{-1})^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1} \Leftrightarrow \Delta = \Gamma^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = B(2AB - 3I)^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1} \Leftrightarrow \Delta(2A - 3I) = B - \frac{1}{2}A^{-1}(2AB - 3I)$$

$$\Leftrightarrow \Delta(2A - 3I) = \cancel{B} - \cancel{B} + \frac{3}{2}A^{-1} \Leftrightarrow \Delta(2A - 3I)\cdot A = \frac{3}{2}I$$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\Delta(2A - 3I)\cdot A = I$. Άρα ο Δ αντιστρέψιμος με

$$\boxed{\Delta^{-1} = \frac{2}{3}(2AB - 3I)\cdot A}$$

ΘΕΜΑ 2

(A) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \mathbb{R}$, αφού $g(x) \neq 0$

τότε από την υπόθεση έχουμε: $A = h(a)$, $B = h'(a)$

Η σχέση που μας δίνεται γίνεται:

$$\frac{h(x)}{(x-a)^2} = \frac{h(a)}{(x-a)^2} + \frac{h'(a)}{(x-a)} + \frac{\phi(x)}{g(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi(x) = g(x) \cdot \left[\frac{h(x) - h(a) - (x-a) \cdot h'(a)}{(x-a)^2} \right] \quad (1)$$

Έχουμε: $\lim\limits_{x \to a} \left[\frac{h(x) - h(a) - (x-a) \cdot h'(a)}{(x-a)^2} \right] \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to a} \frac{h(x) - h'(a)}{2(x-a)}$

$= \frac{1}{2} h''(a)$. Επειδή η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη αφού οι f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες.

Έτσι η (1) γίνεται: $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = \frac{1}{2} g(a) \cdot h''(a)$

(B) Η ισότητα που μας δίνεται ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα ισχύει και για $x = \rho$, δηλαδή:

$$(\rho - 2) f''(\rho) + (a\eta\rho - \beta\rho^2) \cdot f'(\rho) = e^{\rho - 2} - 1$$

$$\overset{f'(\rho)=0}{\Longleftrightarrow} (\rho - 2) \cdot f''(\rho) + 0 = e^{\rho-2} - 1 \overset{\rho \neq 2}{\Longleftrightarrow} f''(\rho) = \frac{e^{\rho-2} - 1}{\rho - 2}$$

(i) Αν $\rho > 2 \Leftrightarrow \rho - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{\rho-2} > e^0 \Leftrightarrow e^{\rho-2} > 1$

$$\Leftrightarrow e^{\rho-2} - 1 > 0 \overset{\rho > 2}{\Longleftrightarrow} \frac{e^{\rho-2} - 1}{\rho - 2} > 0$$

(ii) Αν $\rho < q \Leftrightarrow \rho - q < 0 \Leftrightarrow e^{\rho-q} < e^0 \Leftrightarrow e^{\rho-q} - 1 < 0$ (3)

$$\overset{\rho<q}{\Longleftrightarrow} \frac{e^{\rho-q}-1}{\rho-q} > 0$$

Άρα και στις q περιπτώσεις $f''(\rho) > 0$

Επομένως το $f(\rho)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

ΘΕΜΑ 3

(A) (i) Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων, αφού υπάρχει η g'' και ισχύει

$$\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g''(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{g''(x)\cdot g(x) - [g'(x)]^2}{g^2(x)} > 0$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(ii) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, επειδή $g(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \sqrt{g(x_1)\cdot g(x_2)} \Leftrightarrow g^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le g(x_1)\cdot g(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[g^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] \le \ln[g(x_1)\cdot g(x_2)]$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] + \ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] \le \ln g(x_1) + \ln g(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right] - \ln g(x_1) \le \ln g(x_2) - \ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]$$

- Αν $x_1 = x_2$ τότε η παραπάνω ισχύει με την ισότητα.

- Αν $x_1 < x_2$. Τότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης τιμής για την συνάρτηση $h(x) = \ln g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ Στο διάστημα $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$, προκύπτει ότι υπάρχει $a \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $h'(a) = \frac{g'(a)}{g(a)} =$

$$= \frac{g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - g(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1}$$

Ομοια: $b \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$ τ. ώστε!

$$h'(b) = \frac{g'(b)}{g(b)} = \frac{g(x_2) - g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}}$$

Από το ερώτημα (a) συνεπάγεται ότι $a < b$ και το ότι

$$\frac{x_1+x_2}{2} - x_1 = x_2 - \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_2-x_1}{2} > 0$$

έχουμε το ζητούμενο

- Ομοια αν $x_1 > x_2$

(B) (i) Για $x=y=0$ έχουμε:

$$g(0) = e^0 g(0) + e^0 g(0) + 0\cdot 0 + a \Leftrightarrow \cancel{g(0)} = \cancel{g(0)} + g(0) + a$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g(0) = -a}$$

(ii) Παραγωγίζουμε την αρχική ως προς y και έχουμε

$$\frac{d}{dy}\left[g(x+y)\right] = \frac{d}{dy}\left(e^y g(x)\right) + \frac{d}{dy}\left(e^x \cdot g(y)\right) + \frac{d}{dy}(xy) + \frac{d}{dy}(a)$$

$$\Leftrightarrow g'(x+y) = e^y g(x) + e^x \cdot g'(y) + x$$

Θέτουμε $y=0$

$$g'(x) = g(x) + g'(0)\cdot e^x + x \quad \text{(Ζητούμενο)}$$

ΘΕΜΑ 4ο

(A) Αφού τα A, B, Γ, Δ είναι σημεία της C θα επαληθεύουν τον τύπο της.

Άρα $y_1 = \alpha x_1^3 + \beta x_1^2 + \gamma x_1 + \delta$, $y_3 = \alpha x_3^3 + \beta x_3^2 + \gamma x_3 + \delta$

$y_2 = \alpha x_2^3 + \beta x_2^2 + \gamma x_2 + \delta$, $y_4 = \alpha x_4^3 + \beta x_4^2 + \gamma x_4 + \delta$

Ισχύει ότι το μέσο του AB ταυτίζεται με το μέσο του $\Gamma\Delta$

Άρα $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_3+x_4}{2} \Leftrightarrow x_1+x_2 = x_3+x_4$ (1)

Επίσης $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{y_3+y_4}{2} \Leftrightarrow y_1+y_2 = y_3+y_4$ (2)

Από τις αρχικές σχέσεις προσθέτουμε τις δύο πρώτες και αφαιρούμε από το άθροισμά τους τις άλλες δύο, οπότε έχουμε:

$$y_1+y_2 = a(x_1^3+x_2^3)+\beta(x_1^2+x_2^2)+\gamma(x_1+x_2)+2\delta$$

$$\Leftrightarrow y_1+y_2-\overset{=0}{y_3-y_4} = a(x_1^3+x_2^3-x_3^3-x_4^3)+\beta(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)+\gamma(\overset{=0}{x_1+x_2-x_3-x_4})$$

$$\overset{(2)\text{ και }(1)}{\Longleftrightarrow} a(x_1^3+x_2^3-x_3^3-x_4^3)+\beta(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)=0$$

$$\Leftrightarrow a\left[\cancel{(x_1+x_2)^3}-3x_1\cdot x_2(x_1+x_2)-\cancel{(x_3+x_4)^3}+3x_3x_4(x_3+x_4)\right]+$$

$$+\beta\left[\cancel{(x_1+x_2)^2}-2x_1\cdot x_2-\cancel{(x_3+x_4)^2}+2x_3\cdot x_4\right]=0$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} -3a(x_1+x_2)(x_1\cdot x_2-x_3\cdot x_4)-2\beta(x_1\cdot x_2-x_3\cdot x_4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x_1\cdot x_2-x_3\cdot x_4)\left[-3a(x_1+x_2)-2\beta\right]=0$$

$\Leftrightarrow$ $3a(x_1+x_2)+2\beta=0$ απορρίπτεται από τον περιορισμό

ή $\boxed{x_1\cdot x_2 = x_3\cdot x_4}$ Αφού $\left.\begin{array}{l}3ax_1+\beta\neq 0\\ 3ax_2+\beta\neq 0\end{array}\right\}(+)$ $3a(x_1+x_2)+2\beta\neq 0$

(Β) Θεωρούμε την εξίσωση $a^2-(x_1+x_2)a+x_1\cdot x_2=0$, η οποία έχει λύσεις $a=x_1$ ή $a=x_2$. Όμως λόγω της (1) έχουμε: $a^2-(x_3+x_4)\cdot a+x_3\cdot x_4=0$, που έχει λύσεις $a=x_3$ ή $\beta=x_4$.

Επειδή αποκλείεται μια εξίσωση 2ου βαθμού να έχει τέσσερις διακεκριμένες λύσεις, θα είναι είτε $x_1=x_3$ είτε $x_1=x_4$. Κάτι που θα ισχύει ανάλογα και για την άλλη λύση.

Αφού πρόκειται για ορθογώνια της ίδιας γεωμετρίας, το γεγονός ότι έχουν την ίδια τετμημένη εξασφαλίζει ότι θα έχουν και την ίδια τεταγμένη. Επομένως θα ταυτίζονται. Άρα το Α ταυτίζεται είτε με το Γ είτε με το Δ.