Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1983

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. α) Αν (α_ν), (β_ν) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με : $\lim \alpha_\nu = \alpha \in \mathbb{R}$ και $\lim \beta_\nu = \beta \in \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι : $\lim(\alpha_\nu \beta_\nu) = \alpha\beta$.

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (γ_ν) με :

$\gamma_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^{\nu+1}}\left(\sqrt{\nu^2+1}-\nu\right)$

ΖΗΤΗΜΑ2 Η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (α,β) και f(α)=f(β)=0. Να αποδειχθεί :

α) Ότι για τη συνάρτηση : $F(x) = \dfrac{f(x)}{x-c}$ όπου $c \notin [\alpha,\beta]$ υπάρχει $c_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$.

β) Αν $c \notin [\alpha,\beta]$, ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραμμής με εξίσωση y=f(x) διέρχεται από το σημείο (c,0).

ΖΗΤΗΜΑ3 Α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε x>0 ισχύει η σχέση $\log x \le |x-1|$

β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0,+\infty)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\log x}{1-x}, & 0 < x \neq 1 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

. Να αποδειχθεί ότι

i) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

ii) Είναι φθίνουσα στο διάστημα (0,1)

iii) $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

ΖΗΤΗΜΑ4 Στο τετράεδρο ΟΑΒΓ να αποδειχθεί ότι

α) Αν $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0$ και $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A} = 0$ τότε $\overrightarrow{O\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

β) Αν $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0$ και d_1 είναι η απόσταση των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΒ,ΓΑ και d_2 είναι η απόσταση των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΓ,ΑΒ τότε $d_1 = d_2$.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1984

ΖΗΤΗΜΑ1 α) Έστω ότι $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι τα διανύσματα (α_1,α_2), (β_1,β_2) αντίστοιχα (ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς) και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ το εσωτερικό τους γινόμενο. Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$.

β) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χοψ θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α το σημείο (2,1) και έστω ότι οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δυο από τα ύψη του έχουν εξισώσεις 3x+ψ-11=0, x-ψ+3=0. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

ΖΗΤΗΜΑ2 α) Αν $\alpha\in\mathbb{R}$ με $0<|\alpha|<1$, να αποδείξετε ότι $\lim\alpha^\nu=0$.

β) Να μελετήσετε ως προς την σύγκλιση την ακολουθία (β_ν) με

$\beta_\nu=\dfrac{\lambda^\nu+2^{\nu+1}}{2\cdot\lambda^\nu-3\cdot2^{\nu-1}}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0,-2$.

ΖΗΤΗΜΑ3 α) Δίνονται τα σύνολα διανυσμάτων B_1,B_2 του χώρου $\mathbb{R}^2$ με

$B_1=\{(\sigma\upsilon\nu\theta,\eta\mu\theta),(\eta\mu\theta,-\sigma\upsilon\nu\theta)\}$

$B_2=\{(\sigma\upsilon\theta-\eta\mu\theta,-\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta),(\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta,\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)\}$ με

$\theta\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το καθένα από τα σύνολα B_1,B_2 είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ (για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$)

β) Έστω $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα (και μόνο) διάνυσμα (x,y) του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε τα διατεταγμένα ζεύγη των συντεταγμένων να είναι (λ,μ-1) και (λ-1,μ) ως προς τις βάσεις B_1,B_2 αντίστοιχα.

ΖΗΤΗΜΑ4 Έστω z ο μιγαδικός αριθμός x+yi με $y\neq 0$ ($x,y\in\mathbb{R}$). Θέτουμε :

$\omega=\dfrac{\bar{z}^2}{z-1}$ όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z. Να αποδείξετε ότι ω είναι πραγματικός αριθμός εάν και μόνο εάν το σημείο (x,y) ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χοy , ανήκει σε μία υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1985

ΖΗΤΗΜΑ1 α) Έστω μια ευθεία που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχει εξίσωση: Αx+Βψ+Γ=0 με $|A|+|B|\neq 0$. Έστω $P(x_1,\psi_1)$ είναι ένα σημείο εκτός της ευθείας αυτής. Να αποδειχθεί ότι η απόσταση του σημείου P από την ευθεία ισούται με : $\dfrac{|Ax_1+B\psi_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

β) Θεωρούμε δυο ευθείες που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν εξίσωση x+μψ+1=0 και 2μx+2ψ+λ=0 αντίστοιχα (όπου μ,λ είναι πραγματικοί αριθμοί). Να προσδιορίσετε για ποια ζεύγη τιμών των λ,μ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$.

ΖΗΤΗΜΑ2 Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x+2y+3\omega=0 \\ 4x+(3+\lambda)y+6\omega=0 \\ 5x+4y+(1+\lambda)\omega=0 \end{cases}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

β) Να βρεθούν όλες οι λύσεις του συστήματος για την περίπτωση που το λ ισούται με την μικρότερη από τις τιμές που βρήκατε στο ερώτημα α) του ζητήματος αυτού.

ΖΗΤΗΜΑ3 α) Έστω μια ακολουθία (β_ν). Αν υπάρχουν δυο ακολουθίες (α_ν) και (γ_ν) με κοινό όριο, τέτοιες ώστε για κάθε ν>κ (κ ένας συγκεκριμένος φυσικός) να είναι $\alpha_\nu \leq \beta_\nu \leq \gamma_\nu$ τότε και η (β_ν) έχει το ίδιο όριο.

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\nu^2-2\nu+3}$.

ΖΗΤΗΜΑ4 α) Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο σημείο $x_0\in\Delta$ είναι $f'(x_0)=0$. Αν $f''(x_0)>0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

β) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2(x-3)+4$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω x_1,x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),(x_3,f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1986

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ που ανήκουν στο Ε . Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

α) Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα;

β) Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα;

Β. Να αποδείξετε ότι αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε επίσης και τα διανύσματα

$$\vec{u}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$

$$\vec{v}=2\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+3\vec{\gamma}$$

$$\vec{w}=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. i) Να δώσετε τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού.

ii) Έστω οι μη μηδενικοί αριθμοί z_1,z_2. Να αποδείξετε ότι $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

Β. Έστω ότι $z=(2x-3)+(2y-1)i$ με $x,y\in\mathbb{R}$. Να ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) που είναι τέτοια ώστε $|2z-1+3i|=3$ είναι κύκλος. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου αυτού και την ακτίνα του.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και έστω $x_0\in\Delta$. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

i) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0

ii) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής από δεξιά στο x_0

iii) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής από αριστερά στο x_0

Β. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}3\alpha e^{x+1}+x & \text{αν } x\le -1\\ 2x^2-\alpha x+3\beta & \text{αν } -1<x<0\\ \beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1 & \text{αν } 0\le x\end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα (α,β) και ότι στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ είναι $f'(x_0)=0$. Η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο αν :

$\forall x\in(\alpha,x_0],\ f'(x)\ge 0$ και $\forall x\in[x_0,\beta),\ f'(x)\le 0$.

Β. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=(\alpha-\frac{2}{3})x^3-(\alpha+\frac{1}{2})x^2-10x+7,\forall x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0=\frac{3}{2}$.

Μετά για την τιμή αυτή του α να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολής της f.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1987

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. i) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ του επιπέδου .Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

ii) Να αποδειχθεί ότι δυο μη μηδενικά διανύσματα είναι κάθετα αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

Β. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Οxy δίνονται τα σημεία Α(4,2) και Β(3,-5) . Θεωρούμε την ευθεία (ε) με εξίσωση 7x+y-23=0. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας (ε) τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Αν $\left\{v_1,v_2,v_3,...v_\rho\right\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V τότε να αποδειχθεί ότι κάθε διάνυσμα $v\in V$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης αυτής του V.

Β. Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ $V=\left\{\left(\alpha,\alpha-\beta,2\alpha+3\beta\right):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$. Να αποδειχθεί ότι το V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί η διάστασή του.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Αν $\lim\alpha_\nu=+\infty$ η $-\infty$ και για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ειναι $\alpha_\nu\neq 0$ να αποδειχθεί ότι $\lim\frac{1}{\alpha_\nu}=0$.

Β. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\left(\alpha_\nu\right)$ με

$$\alpha_\nu=\left(\sqrt{7\nu^4+6\nu+5}-\sqrt{7\nu^4+3\nu+3}\right)\left(\sqrt{63\nu^2-5\nu+20}\right)$$

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Αν η f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα Δ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0\in\Delta$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε να αποδειχθεί ότι $f'(x_0)=0$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^4-14x^2+24x$. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν τρία σημεία $A,B,\Gamma\in C$ τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C στα Α,Β,Γ είναι παράλληλες προς τον άξονα $x'x$. Να αποδειχθεί ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1988

ΖΗΤΗΜΑ1 A. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases}(\lambda+1)x+y=\lambda+1\\ x+(\lambda+1)y=1\\ x+y=2\lambda+1\end{cases}$

B. Να δείξετε ότι το σύνολο $A=\left\{\dfrac{4\kappa+1}{5-4\lambda}:\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}\right\}$ εφοδιασμένο με την συνήθη πράξη του πολλαπλασιασμού κλασμάτων στο $\mathbb{R}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

ΖΗΤΗΜΑ2 A. Να αποδείξετε ότι κάθε ακολουθία αύξουσα και φραγμένη άνω είναι συγκλίνουσα

B. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας (α_ν) με

$\alpha_1=1$ και $\alpha_{\nu+1}=\sqrt{4\alpha_\nu+5}\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

ΖΗΤΗΜΑ3 A. Θεωρούμε συνάρτηση g ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\Delta$ και $g(x_0)\neq 0$ τότε και η συνάρτηση $\dfrac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και

είναι $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0)=-\dfrac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

B. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+1}$

i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης .

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης f τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις x=2,x=5.

ΖΗΤΗΜΑ4 A. i) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.

ii) Δίνεται η παραβολή $y^2=2px$ και η ευθεία με εξίσωση $y=\lambda x+\kappa$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή έχουν ένα διπλό κοινό σημείο αν και μόνο αν $p=2\lambda\kappa$.

B. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση 3x+y+3=0.

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής τις οποίες φέρνουμε από το σημείο (-2,1).

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1989

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+\lambda(y+z)=0 \\ -2y+z=\lambda x \\ \lambda x+y=-z \end{cases}$

ΖΗΤΗΜΑ2 Α Να αποδειχθεί ότι κάθε ν-οστή ρίζα της μονάδας είναι της μορφής $\zeta_\kappa=\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{\nu}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών $z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0$.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x)=0$ τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.

Β. Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι :

i) είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο Δ

ii) $f''=g''$ και

iii) $0\in\Delta$ και $f(0)=g(0)$

Να δειχθεί ότι :

α) Για κάθε $x\in\Delta$, $f(x)-g(x)=cx$ όπου $c\in\mathbb{R}$

β) Αν η f(x)=0 έχει δυο ρίζες ετερόσημες ρ_1,ρ_2 τότε η g(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

ΖΗΤΗΜΑ4 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0=\frac{\pi}{8}$.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη , τη γραφική παράσταση της f και τους θετικούς ημιάξονες Ox,Oy.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1990

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Αν Α και Β είναι πίνακες νxν και ισχύουν οι σχέσεις $A^2 = A$ και $AB + BA = O$ όπου O ο μηδενικός πίνακας νxν τότε να αποδείξετε ότι είναι $AB = BA = O$.

Β. Έστω Α,Β,Γ πίνακες νxν και Ι ο μοναδιαίος πίνακας νxν . Αν ισχύει ότι $AB = \Gamma A = I$ τότε να αποδείξετε ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος και ότι $A^{-1} = B = \Gamma$

Γ. Έστω Α,Β πίνακες νxν όπου ο Β είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι για κάθε κ θετικό ακέραιο ισχύει η σχέση :
$\left(BAB^{-1}\right)^{\kappa} = BA^{\kappa}B^{-1}$.

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάσημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να είναι $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με
$f(x) = \dfrac{\alpha x^3}{3} + \left(\dfrac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + \left(\gamma - \delta\right) x + \delta$ όπου α,β,γ,δ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{2} + \gamma = 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(0,1\right)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\left(\xi, f(\xi)\right)$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ καθώς και σημείο $A(x_1, y_1)$ αυτού του κύκλου. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη αυτού του κύκλου στο σημείο Α έχει εξίσωση:
$\left(x - x_0\right)\left(x_1 - x_0\right) + \left(y - y_0\right)\left(y_1 - y_0\right) = \rho^2$.

Β. Δίνονται η ευθεία (ε) με εξίσωση 5x+3y+2=0 και ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$ που τέμνονται στα σημεία Μ και Ν.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda\left(5x + 3y + 2\right) = 0$ παριστάνει κύκλο ο οποίος περνάει από τα σημεία Μ και Ν. Για ποια τιμή του λ ο κύκλος αυτός περνάει από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της ερώτησης (α) ανήκουν σε ευθεία ε_1 της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΖΗΤΗΜΑ4 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x + \dfrac{1}{2x^2}$

Α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f της ευθείας με εξίσωση y=3x και των ευθειών με εξισώσεις x=1 και x=α με α>1.

Γ. Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού Ε(α) του ανωτέρου χωρίου όταν το α τείνει στο άπειρο.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (21/6/91)

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και V_κ ένας υπόχωρός του ο οποίος παράγεται από κ διανύσματα του V. Από τα κ αυτά διανύσματα υπάρχουν ρ γραμμικώς ανεξάρτητα $1\le\rho\le\kappa$ τα οποία μαζί με καθένα από τα υπόλοιπα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε να αποδειχθεί ότι ο V_κ έχει διάσταση ρ.

Β. Αν $\omega=\dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$, με $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και $z\neq\alpha i$ τότε να αποδειχθεί ότι :

α) ο ω είναι φανταστικός αριθμός αν και μόνον αν ο z είναι φανταστικός αριθμός.

β) ισχύει $|\omega|=1$ αν και μόνον αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Έστω (α_ν) ακολουθία συγκλίνουσα με $\lim\alpha_\nu\neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει φυσικός αριθμός κ τέτοιος ώστε $\alpha_{\nu+\kappa}\neq 0$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

β) για το παραπάνω κ η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu=\dfrac{1}{\alpha_{\nu+\kappa}}$ είναι φραγμένη.

Β. Έστω β πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1=\beta^{\frac{1}{\beta}}$ και $\alpha_{\nu+1}=\left(\beta^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\alpha_\nu}$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Να αποδείξετε ότι :

α) η ακολουθία (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα

β) η ακολουθία (α_ν) είναι φραγμένη άνω από το β.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Αν $I_\nu=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^\nu x\,dx,\ \nu\in\mathbb{N}^*$ τότε

α) να αποδείξετε ότι για κάθε ν>2 ισχύει $I_\nu=\dfrac{1}{\nu-1}-I_{\nu-2}$.

β) να υπολογίσετε το I_5.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}},\ x>0$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις x=1 και x=4.

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία x-y+1=0.

B. Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες εφάπτονται συγχρόνως στον κύκλο $x^2+y^2=4$ και στην παραβολή $y^2=3x$

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης 1992

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Δίνονται ο 2x1 πίνακας $u=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και ο 2x2 πίνακας

$A=\begin{bmatrix} συνθ & -ημθ \\ ημθ & συνθ \end{bmatrix}$ με $θ \in (0,π)$. Να δειχθεί ότι οι πίνακες u και Au είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου $Π_{2x1}$ των πινάκων 2x1.

Β. α) Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $z^2-\sqrt{2}(1-i)z-2i=0$

β) Να δειχθεί ότι η ευθεία που ορίζουν οι εικόνες των ριζών της παραπάνω εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο διέρχεται από την εικόνα μιάς ρίζας της εξίσωσης $z^4+1=0$.

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), Γ(x_3,y_3)$ δίνεται από τον τύπο:

$$E=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

Β.α) Δίνονται οι ευθείες y=λx και y=-λx με λ>0 και x>0 και ευθεία (ε) η οποία τις τέμνει στα σημεία Α και Β . Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β συναρτήσει των συντεταγμένων του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

β) Να δειχθεί ότι το σημείο Μ γράφει τον ένα κλάδο υπερβολής όταν η ευθεία (ε) κινείται έτσι ώστε τα τρίγωνο ΟΑΒ να έχει σταθερό εμβαδόν $κ^2$.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. α) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $\left(0,+\infty\right)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\ln f(x),\ x\in Δ$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(x)\cdot f''(x)\geq\left[f'(x)\right]^2,\ \forall x\in Δ$.

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln\left(x^2+2\right)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Β. α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x)=α^x-x,\ x\in\mathbb{R}$ και 0<α<1.

β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα $α^{λ^2-4}-α^{λ-2}=\left(λ^2-4\right)-\left(λ-2\right)$ όπου 0<α<1.

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(x+4\right)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x,y) με $-1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq f(x)$.

Β. α) Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f'=f$ αν και μόνο αν $f(x)=ce^x$ όπου c πραγματική σταθερά.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{π}{2},\frac{π}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+g(x)\cdot\eta\mu x=g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$ και $g(0)=1992$.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (24/6/93)

ΖΗΤΗΜΑ1 Α. Τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{x}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}\right)\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1\right)\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{x}\right)=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

β) Αν $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\neq 1$ να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$

Β. Για τον αντιστρέψιμο πίνακα Α τύπου νxν ορίζουμε τα πολυώνυμα $f(x)=\left|A-xI\right|$, $g(x)=\left|A^{-1}-xI\right|$ όπου Ι ο μοναδιαίος πίνακας νxν και x πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι αν $f(x_0)=0$ τότε α) $x_0\neq 0$

β) $g(\frac{1}{x_0})=0$

ΖΗΤΗΜΑ2 Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{\left(z-1\right)\left(\bar{z}+1\right)}{z+\bar{z}}$, $z\in\mathbb{C}$ και $\mathrm{Re}(z)\neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι : $f(-\frac{1}{\bar{z}})=f(z)$

β) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία Μ(x,y) για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί z=αx+βyi με $\alpha,\beta,x,y\in\mathbb{R}$ και $\alpha\beta x\neq 0$ ικανοποιούν την σχέση $\mathrm{Re}\left[f(z)\right]=0$

Β. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta>0$ και το σημείο Κ (0,2β) . Μια μεταβλητή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σταθερό σημείο Κ και τέμνει τις εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονά της στα σημεία Μ και Ν.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΜΝ ως συνάρτηση του λ.

β) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο κύκλος με διάμετρο ΜΝ να διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

ΖΗΤΗΜΑ3 Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] τότε

α) Υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$m\left(\beta-\alpha\right)\leq\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq M\left(\beta-\alpha\right).$$

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left[\alpha,\beta\right]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=f(\xi)\left(\beta-\alpha\right).$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}+4$ με $x>0$

α) Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης f

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt$

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως . Το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα v=2 m/sec και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση s(t)=vt, $t\in[0,5]$ όπου t ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα)

α. Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.

β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6m;

Β. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\int_\alpha^x e^{-t}f(t)dt = e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x),\ x,\alpha\in\mathbb{R}$

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (23/6/94)

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=2\chi^2$,$\chi\in R$

α) Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $M(2\alpha,8\alpha^2)$ $\alpha>0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C, την ευθεία ε και τον άξονα $\psi'\psi$.

β) Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ε με την ευθεία ΜΟ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε την μέγιστη τιμή της εφθ όταν το α μεταβάλλεται ($\alpha>0$).

Β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,e]$ με $0<f(\chi)<1$ και $f'(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[1,e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $\chi_0\in(1,e)$ τέτοιος ώστε

$f(\chi_0)+\chi_0\cdot\ln\chi_0=\chi_0$

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων

$\left(z^2+1\right)^2+z^3+z=0$ και $z^{16}+2z^{14}+1=0$.

Β. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z,w και w_1, τέτοιους ώστε $w=z-zi$ και $w_1=\frac{1}{\alpha}+\alpha i$, $\alpha\in R^*$. Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο R^* και ισχύει $w=\overline{w}_1$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Έστω ρ πραγματικός αριθμός, $A(\chi),B(\chi)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές ώστε $B(\rho)\neq 0$ και το $A(\chi)$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο f(x) τέτοιο ώστε

$A(\chi)\cdot B(\chi)=(\chi-\rho)^2\cdot f(\chi)$, αν και μόνο αν $A(\rho)=A'(\rho)=0$.

Β. Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Να βρείτε τις τιμές των κ,λ για τις οποίες το πολυώνυμο

$Q(\chi)=\chi^\nu(\nu\chi^3+\kappa\chi^2+\lambda\chi+8)$ έχει παράγοντα το $(\chi-2)^2$.

ΖΗΤΗΜΑ4

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο $E(p/2,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta{:}\chi=-\frac{p}{2}$ είναι $\psi^2=2p\chi$.

Β. Έστω ν θετικός ακέραιος και $\Omega=\{0,1,2,3,\ldots,2\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος. Δίνονται οι πιθανότητες

$P(\kappa)=\frac{1}{2^\kappa}$ για $\kappa=1,2,3,\ldots,2\nu$

Να υπολογίσετε :

α) Την πιθανότητα $P(0)$

β) Την πιθανότητα $P(A)$ του ενδεχομένου $A=\{2,4,6,\ldots,2\nu\}$

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (21/6/95)

ΖΗΤΗΜΑ1

Α. Έστω ν ένας θετικός ακέραιος και I,O είναι αντιστοίχως ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας νχν. Έστω Α,Β είναι πίνακες νχν τέτοιοι ώστε $A=B^2+I$ και $B^4=O$.

α) Να αποδείξετε ότι i) $A^\kappa=I+\kappa B^2$, για κάθε $\kappa\in N^*$ και ii) ο πίνακας $I+A^6-A^8$ είναι αντιστρέψιμος.

β) Αν ο ν είναι περιττός να αποδείξετε ότι $|2A-3I|\le 0$.

Β. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει

$|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$.

β) Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha^2+if(\alpha)$, $w=f(\beta)+i\beta^2$ με $\alpha\beta\neq 0$.

Αν $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

ΖΗΤΗΜΑ2

Α. Δίνονται οι ελλείψεις

$c_1: \dfrac{\chi^2}{\alpha^2}+\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1$ και $c_2: \alpha^2 x^2+\beta^2\psi^2=1$ με $0<\alpha<\beta$.

Η ημιευθεία $\psi=(\varepsilon\varphi\theta)\chi$, $\chi>0$, $0<\theta<\pi/2$ τέμνει την C_1 στο σημείο $\Gamma_1(\chi_1,\psi_1)$ και την C_2 στο σημείο $\Gamma_2(\chi_2,\psi_2)$.

α) Αν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_1 στο σημείο Γ_1 και λ_2 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_2 στο σημείο Γ_2 να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\lambda_1\lambda_2$ είναι ίσον με $(\varepsilon\varphi\theta)^{-2}$.

β) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση

$f:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ με $f(\theta)=\lambda_1\lambda_2$.

Β. Δίνεται θετικός ακέραιος αριθμός ν τέτοιος ώστε $(1+i)^\nu=16$. Έστω $\Omega=\{1,2,\cdots,\nu\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Εκλέγουμε τυχαίως ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda\in\Omega$. Αν $f(\chi)=2\chi^2-4\chi+\lambda$ με $\chi\in\mathbb{R}$ να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $f(\chi)=0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες.

ΖΗΤΗΜΑ3

Α. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ,λ με κ<λ και η συνάρτηση $f(\chi)=(\chi-\kappa)^5(\chi-\lambda)^3$ με $\chi\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

α) $\dfrac{f'(\chi)}{f(\chi)}=\dfrac{5}{\chi-\kappa}+\dfrac{3}{\chi-\lambda}$ για κάθε $\chi\neq\kappa$ και $\chi\neq\lambda$.

β) Η συνάρτηση $g(\chi)=\ln|f(\chi)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ,λ).

Β. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ισχύει : Αν $f'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

β) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in R$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$F(\chi)=\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi-t)dt,\ \chi\in\mathbb{R}$ με α,β πραγματικούς αριθμούς είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $\chi_0\in R$ με $F'(\chi_0)=0$ τότε $F(\chi)=0$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ4 Α . Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α,β με $0<\alpha<\beta$ τη συνεχή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=0$ και τη συνάρτηση $g(\chi)=2+\frac{1}{\chi}\cdot\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt,\ \chi\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν :

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(\chi_0,g(\chi_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$.

β) $g(\chi_0)=2+f(\chi_0)$

Β. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(0)=1995$, $f'(0)=1$ και $1+\int_{0}^{\chi} f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt=\sigma\upsilon\nu^2\chi+\int_{0}^{\chi} f'(t)\eta\mu t\,dt$.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (26/6/96)

ΖΗΤΗΜΑ1ο

Α. Δίνονται οι νχν Πίνακες Α,Β,Γ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $A+B+1996AB=O$, $B+\Gamma+1996B\Gamma=O$, $\Gamma+A+1996\Gamma A=O$, όπου Ο ο μηδενικός πίνακας. α) Να αποδείξετε ότι οι πίνακες $I+1996A$, $I+1996B$ και $I+1996\Gamma$ είναι αντιστρέψιμοι και ότι $AB=B\Gamma=\Gamma A$, όπου Ι ο μοναδιαίος πίνακας.
β) Να αποδείξετε ότι $A=B=\Gamma$.
Β. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση της εικόνας του μιγαδικού $z=3+i\sqrt{3}$ από τις εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^6=64$.

ΖΗΤΗΜΑ2ο

Α. α) Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $\chi\in\Delta$ είναι $f'(\chi)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ.
β) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο R. Αν οι f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις $f'=g$, $g'=-f$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' και g'' και είναι συνεχείς.
Αποδείξτε ακόμα ότι ισχύουν οι σχέσεις $f''+f=g''+g=0$ και ότι η συνάρτηση $h=f^2+g^2$ είναι σταθερή.
Β Θεωρούμε τις παραπάνω συναρτήσεις f και g. Να αποδείξετε ότι αν χ_1 και χ_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in(\chi_1,\chi_2)$ τότε η g έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα (χ_1,χ_2).

ΖΗΤΗΜΑ3ο Α. Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$. α) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο που η διχοτόμος του πρώτου τεταρτημορίου τέμνει την έλλειψη έχει κλίση $-\frac{1}{2}$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.
β) Έστω Α το σημείο του πρώτου τεταρτημορίου στο οποίο η ευθεία $\psi=\lambda\chi$, $\lambda>0$ τέμνει την παραπάνω έλλειψη. Αν μ είναι η κλίση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο Α τότε να εκφράσετε το γινόμενο λμ ως συνάρτηση των ημιαξόνων α,β.
Β. Να αποδείξετε τις ανισότητες: α) $\eta\mu\chi<2\chi$, $\chi>0$ β) $\eta\mu\chi>\chi-\frac{\chi^3}{3}$, $\chi>0$.

ΖΗΤΗΜΑ4ο Α. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση: $\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx=f(x)+e^x$, $\forall x\in R$.
Β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και ισχύει ότι $f(\chi)+f(\alpha+\beta-\chi)=c$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:
$$\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi=(\beta-\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta)).$$

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (30/6/97)

ΖΗΤΗΜΑ 1

Α. Να αποδειχθεί ότι αν ένας τετραγωνικός πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος, τότε ο αντίστροφός του είναι μοναδικός.

Β. Έστω ότι Α,Β είναι νxν πίνακες και έστω ότι οι πίνακες Α,Β και 2ΑΒ-3Ι είναι αντιστρέψιμοι. Να αποδειχθεί ότι οι πίνακες $\Gamma = 2A - 3B^{-1}$ και

$\Delta = (2A - 3B^{-1})^{-1} - \frac{1}{2}A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμοι.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Α. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το R, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in R$.

Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και

$B = \frac{f'(\alpha) - Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$. Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $R \setminus \{\alpha\}$, τέτοια ώστε

$\frac{f(\chi)}{(\chi-\alpha)^2 g(\chi)} = \frac{A}{(\chi-\alpha)^2} + \frac{B}{\chi-\alpha} + \frac{\varphi(\chi)}{g(\chi)}$ για κάθε $\chi \in R \setminus \{\alpha\}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει το $\lim_{\chi \to \alpha} \varphi(\chi)$.

Β. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο R, δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε

$(\chi-2)f''(\chi) + (\alpha\eta\mu\chi - \beta\chi^2)f'(\chi) = e^{\chi-2} - 1$ για κάθε $\chi \in R$.

Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho \neq 2$ ώστε $f'(\rho) = 0$. Να εξετάσετε αν το f(ρ) είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Α. Δίνεται πραγματική συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε

$g(\chi) > 0$ και $g''(\chi)g(\chi) - [g'(\chi)]^2 > 0$ για κάθε $\chi \in R$.

Να αποδείξετε ότι

i) η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

ii) $g(\frac{\chi_1}{2} + \frac{\chi_2}{2}) \leq \sqrt{g(\chi_1)g(\chi_2)}$ για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in R$.

Β. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει

$g(\chi+\psi) = e^{\psi} g(\chi) + e^{\chi} g(\psi) + \chi\psi + \alpha$ για κάθε $\chi, \psi \in R$. Να αποδείξετε ότι

i) $g(0) = -\alpha$

ii) $g'(\chi) = g(\chi) + g'(0)e^{\chi} + \chi$ για κάθε $\chi \in R$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω C είναι η γραμμή του επιπέδου με εξίσωση $\psi = \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta$ όπου α,β,γ,δ είναι πραγματικοί αριθμοί

και $\alpha \neq 0$.
Έστω $Α(\chi_1,\psi_1),Β(\chi_2,\psi_2),Γ(\chi_3,\psi_3),Δ(\chi_4,\psi_4)$ είναι σημεία της C. Υποθέτουμε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ συμπίπτει με το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ και επίσης υποθέτουμε ότι το μέσο αυτό δεν ανήκει στη ευθεία που έχει εξίσωση $\beta+3\alpha\chi=0$.

Α. Να αποδειχθεί ότι $\chi_1\chi_2=\chi_3\chi_4$

Β. Να αποδειχθεί ότι το σημείο Α συμπίπτει με το σημείο Γ ή με το σημείο Δ.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (24/6/98)

ΖΗΤΗΜΑ 1

Α. α) Αν ο μιγαδικός αριθμός z_0 είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $\alpha_\nu \chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi + \alpha_0 = 0$ με $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_\nu$ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha_\nu \neq 0$, να αποδείξετε ότι και ο συζυγής του $\bar{z}_0$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

β) Αν η πολυωνυμική εξίσωση $\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί έχει ως ρίζα το μιγαδικό 2-3i να βρείτε τα β, γ καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi) = \chi^2 + \beta\chi + \gamma$ στο σημείο Α(1,f(1)) όταν το χ μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R.

Β. Η συνάρτηση $f: R \to R$ ικανοποιεί τη σχέση
$f(f(\chi)) + f^3(\chi) = 2\chi + 3, \chi \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «ένα προς ένα»

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2\chi^3 + \chi) = f(4 - \chi), \chi \in R$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z_0 με $\operatorname{Im} z_0 < 999$ και το σύνολο Α των μιγαδικών αριθμών z με $z \neq z_0$ και $z \neq \bar{z}_0$ που ικανοποιούν τη σχέση $\dfrac{1}{|z - z_0|} + \dfrac{1}{|z - \bar{z}_0|} = \dfrac{1998}{|z - z_0||z - \bar{z}_0|}$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορούν να απέχουν μεταξύ τους οι εικόνες δυο μιγαδικών αριθμών του συνόλου Α. Ποιοι είναι αυτοί οι μιγαδικοί αριθμοί; Να εξετάσετε την περίπτωση $z_0 = \bar{z}_0$.

Β. Ένας γεωργός προσθέτει χ μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει g(χ) μονάδες του παραγόμενου προϊόντος.

Αν $g(\chi) = M_0 + M(1 - e^{-\mu\chi}), \chi \geq 0$ όπου M_0, Μ και μ είναι θετικές σταθερές να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της g(χ). Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0;

ΖΗΤΗΜΑ 3

α) Δίνεται ο νxν πίνακας Α με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς για τον οποίο ισχύει: $A^2 - 2(\lambda - 2)^2 A + I = 0$ όπου Ι είναι ο μοναδιαίος νxν πίνακας και λ πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι ο πίνακας Α+Ι είναι αντιστρέψιμος για κάθε λ.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$(\chi + 1)|A + \chi I| + (\chi - 1)|A - \chi I| = 1 - \chi^2$ όπου Α είναι ο πίνακας του ερωτήματος α) και χ πραγματικός αριθμός έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (-1,1).

Με $|A + \chi I|$ και $|A - \chi I|$ συμβολίζουμε την ορίζουσα του πίνακα Α+χΙ και Α-χΙ αντίστοιχα.

γ) Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ με πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων που ικανοποιούν τις σχέσεις:2P(1)=2P(3)=2P(5)=2P(7)=3P(2)=3P(4)=3P(6)=3P(8) και το ενδεχόμενο

$$B=\left\{\lambda\in\Omega \left(\begin{array}{l}\text{το σύστημα } AX=X \text{ έχει}\\ \text{τουλάχιστον δυο λύσεις}\end{array}\right.\right\}$$ όπου Χ ένας νx1 άγνωστος πίνακας και Α ο πίνακας του ερωτήματος α). Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Β.

δ) Δίνεται το τριώνυμο $f(\chi)=\chi^2+\gamma\chi+4$ όπου ο συντελεστής γ επιλέγεται τυχαία από το δειγματικό χώρο Ω του ερωτήματος γ) .

Αν $\Gamma=\left\{\gamma\in\Omega \left(\begin{array}{l}\text{η εξίσωση } f(\chi)=0\\ \text{έχει πραγματικές ρίζες}\end{array}\right.\right\}$

Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ και να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Β (του ερωτήματος γ) και Γ είναι ασυμβίβαστα .

ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(\chi)>0, \chi>0$, $f'(\chi)+2\chi f(\chi)=0,\ \chi>0$ και η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,1)

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f.

β) Να δείξετε ότι $\dfrac{\chi-1}{2\chi^2}f(\chi)<\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt<\frac{\chi-1}{2},\chi>1$

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $F(\chi)=\displaystyle\int_1^x\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt,\ \chi>1$

δ) Να αποδείξετε ότι $2e\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}dt<1$ για κάθε χ μεγαλύτερο του ένα.

Θέματα Μαθηματικών 1ης Δέσμης (6/7/99)

ΖΗΤΗΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f:\Delta \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f'(x_0)=0$.

Β. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη η οποία σε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)>4\left(f'(x)-f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Α. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x,y) που είναι τέτοια ώστε $\left|z-1\right|^2+\left|z-3-2i\right|^2=6$ είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

β) Έστω Ο η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και ε_1, ε_2 είναι οι δυο εφαπτόμενες που άγονται από το Ο προς τον παραπάνω κύκλο. Να βρείτε τις συντεταγμένες των δυο σημείων επαφής M_1, M_2.

Β. Έστω Ω={1,2,3,4,5,6} δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και έστω C κύκλος με κέντρο (2,1) και ακτίνα 1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :

Ε={ω∈Ω/ το σημείο Μ(ω,1) είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C}

Ζ={ω∈Ω/ το σημείο Ν(2,ω) είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C}.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Ε,Ζ και $E\cup Z$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

Α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $\left|\overrightarrow{AB}\right|=4$, $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=6$ και η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τότε

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$

β) Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι το διάνυσμα $\frac{14}{19}\overrightarrow{AM}$

Β. Έστω Α,Β νxν πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί. Έστω ότι ισχύει $A^2+AB+I=B^2+BA+I=O$ όπου Ι είναι ο νxν μοναδιαίος πίνακας και Ο είναι ο μηδενικός νxν πίνακας.

Να αποδείξετε ότι
α) i) Ο πίνακας Α+Β έχει αντίστροφο
ii) Α=Β
β) ο ν είναι άρτιος.

ΖΗΤΗΜΑ 4

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+2}$, $t\in[1,4]$

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^4 f(t)dt$

β) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_1^4 f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt,\ x>0$

i) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x^2}}\le e^{\frac{t}{x^2}}\le e^{\frac{4}{x^2}}$ για κάθε $t\in[1,4]$ και $x>0$.

ii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Β. Έστω $h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $h(x)=1999(x-1)+\int_1^x \dfrac{h(t)}{t}dt$ για κάθε $x\ge 1$

Να αποδείξετε ότι
α) $h(x)=1999x\ln x,\ x\ge 1$
β) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2000
ΔΕΥΤΕΡΑ 22 ΜΑΪΟΥ 2000
ΔΕΣΜΗ ΠΡΩΤΗ (1η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Αν $z_1 = \rho_1$ (συνθ_1 + iημθ_1) και $z_2=\rho_2$ (συνθ_2 + iημθ_2) είναι η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 τότε να αποδείξετε ότι

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2\,[\text{συν}(\theta_1+\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)].$$

Β. Έστω $\Omega=\{1,2,\ldots,10\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Αν $\lambda\in\Omega$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : R\to R$, με

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+\lambda^2,\quad x\in R.$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα X,Y όπου :

X : Η μέγιστη τιμή της f στο [0,5], είναι μεγαλύτερη ή ίση του 68/3.

Y : Η ελάχιστη τιμή της f στο [0,5], είναι μικρότερη ή ίση του 4.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων X,Y, $X\cap Y$ και $X\cup Y$.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Έστω ότι A,B είναι νxν πίνακες, με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, τέτοιοι, ώστε $4A^2-B^2=I$ και AB=BA, όπου I είναι ο νxν μοναδιαίος πίνακας.

α) Να αποδείξετε ότι οι πίνακες 2A+B και 2A-B είναι αντιστρέψιμοι.

β) Έστω X,Y είναι νxν πίνακες τέτοιοι, ώστε

$$2AX+BY=2A+I \text{ και } BX+2AY=B.$$

i) Να αποδείξετε ότι X=2A+I και Y=-B.

ii) Να αποδείξετε ότι η ορίζουσα του πίνακα Y^2+2X είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

B. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου M(4συνφ, 5ημφ), με $\varphi\in[0,2\pi)$.

α) i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης στο σημείο M(4συνφ, 5ημφ), με $\varphi\in(0,2\pi)$.

β) Έστω E(φ), με $\varphi\in(0,\pi/2)$, είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της παραπάνω έλλειψης στο σημείο M(4συνφ, 5ημφ) με τους άξονες x΄x και y΄y.

Να αποδείξετε ότι $E(\varphi) \geq 20$.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

A. Έστω $f : R\to R$ συνάρτηση συνεχής στο R.

Έστω $I : R\to R$ η συνάρτηση με

$$I(x)=\int_0^1 \left[(f(t))^2 - 2xt^2f(t) + x^2t^4\right]dt, \text{ για } x\in R.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση I παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_o=5\int_0^1 t^2 f(t)\, dt$

B. Έστω η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to R$, με

$$f(x) = 2000 + \left|\ln(x-1)\right|$$

Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2000.

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση y=c και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα A και B.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f, στα A και B, είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Έστω f,g : $R \to R$, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες, ώστε να ισχύει

$$f(x)-g(x)=x-4, \text{ για } x \in R.$$

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, καθώς $x \to +\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια : i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ και

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)+3x+ημ2x}{x\,f(x)-3x^2+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g, καθώς $x \to +\infty$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001
ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΪΟΥ 2001
ΔΕΣΜΗ ΠΡΩΤΗ (1η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Έστω δειγματικός χώρος Ω και Α ένα ενδεχόμενό του. Αν Α΄ είναι το αντίθετο ενδεχόμενο του Α, να αποδείξετε ότι

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Β. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x - 2y + 3\omega - \varphi = \kappa \\ 3x + y + 2\omega + 4\varphi = \lambda \\ 5x + 4y + \omega + 9\varphi = \mu \end{cases}$$

όπου $\kappa, \lambda, \mu \in R$.

α. Αν το σύστημα είναι συμβιβαστό, να αποδείξετε ότι

$$\mu+\kappa-2\lambda=0$$

β. Αν $(x, y, \omega, \varphi) = (1, 2, 1, 1)$ είναι μία λύση του συστήματος, να βρείτε όλες τις λύσεις του.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_\alpha: \alpha x - y = 0 \text{ και } \zeta_\alpha: x + \alpha y = 2, \alpha \in R.$$

α. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$, οι ευθείες ε_α διέρχονται από σταθερό σημείο Α και οι ευθείες ζ_α διέρχονται από σταθερό σημείο Β, τα οποία και να προσδιορίσετε.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β. Αν Μ(x, y) είναι το σημείο τομής των ε_α και ζ_α, να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$ το Μ κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

Β. Δίνονται τα πολυώνυμα

$P(z) = z^2 - 2z + 2$ και $Q(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 2$, όπου $\alpha, \beta \in R$.

α. Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 του P(z) και να αποδείξετε ότι $z_1^{12} + z_2^{12} = -2^7$.

β. Αν μια ρίζα του πολυωνύμου P(z) είναι και ρίζα του πολυωνύμου Q (z), να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, $x>0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=x_0$, όπου x_0 είναι η θέση του τοπικού ακροτάτου της f.

Β. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to R$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)\, f'(\xi_2) = 4.$$

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α. Έστω η συνάρτηση

$f(x) = x^3 - 3x^2συν2α + 2xσυν^2 2α + ημ^2 2α$, $x \in R$ και $α \in R$.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή.

Β. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x}, \text{ για κάθε } x \in R.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.