Πρόβλημα 1

Σε δέκα φοιτητές του τμήματος Βιολογίας μετρήσαμε τους καρδιακούς παλμούς (χτύποι στο λεπτό), μετά την εξέταση στο μάθημα Βιοστατιστικής και πήραμε τις ακόλουθες τιμές

Φοιτητής	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Παλμοί / λεπτό	80	62	74	78	70	68	70	78	76	64

(α) Να βρεθεί το μέσο πλήθος των παλμών ανά λεπτό και η τυπική απόκλιση

(β) Ποιά είναι η διάμεσος και η κορυφή

(γ) Ποιες είναι οι νέες τιμές αυτών των παραμέτρων αν οι παλμοί μειωθούν κατά 5 το λεπτό;

Πρόβλημα 2

Τα βάρη 60 γυναικών χωρίς υπερθυρεοειδισμό δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

Βάρος (σε κιλά)	[45-50)	[50-55)	[55-60)	[60-65)	[65-70)	[70-75)	[75-80)
Πλήθος γυναικών	6	13	17	9	10	3	2

(1) Να βρεθεί η μέση τιμή του βάρους των γυναικών και η τυπική απόκλιση

(2) Να βρεθούν το πρώτο τεταρτημόριο, η διάμεσος και η κορυφή.

Πρόβλημα 3

Σε ένα τμήμα 20 αποφοίτων Ιατρικής, 7 άντρες και
7 γυναίκες σκοπεύουν να κάνουν ειδικότητα στην παθολογία
ενώ 4 άντρες και 2 γυναίκες στη μικροβιολογία.
Εαν επιλέξουμε στην τύχη έναν απόφοιτο

(1) Ποιά είναι η πιθανότητα ο απόφοιτος να είναι άντρας;

(2) Ποιά είναι η πιθανότητα ο απόφοιτος αυτός να είναι
γυναίκα, όταν γνωρίζουμε ότι σκοπεύει να κάνει ειδικότητα
στην παθολογία;

(3) Είναι τα ενδεχόμενα άντρας και ειδικότητα στη
μικροβιολογία ανεξάρτητα;

Πρόβλημα 4

Στο νοσοκομείο του Ρίου το τελευταίο τρίμηνο αντιμετώπισαν
50 περιστατικά σοβαρής αλλεργίας. Στους 10 από αυτούς
τους ασθενείς χορηγήθηκε ένα νέο φάρμακο που θεραπεύει
σε ποσοστό 90% και στους υπόλοιπους 40 ένα παλιότερο
φάρμακο που θεραπεύει σε ποσοστό 60%. Σήμερα επισκέφθηκε
το νοσοκομείο ένας από αυτούς τους ασθενείς ο οποίος
έχει θεραπευτεί. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει
χορηγηθεί σε αυτόν νέο φάρμακο;

Πρόβλημα 5

Εάν το πλήθος X των φυλλοφάγων σκαθαριών σε κάθε φυτό ενός θερμοκηπίου ακολουθεί την Poisson κατανομή με $P(X=0) = \frac{3}{2} P(X=1)$. Εξετάζουμε 3 φυτά αυτού του θερμοκηπίου. Ποιά η πιθανότητα να παρατηρήσουμε
(1) το πολύ ένα σκαθάρι (2) Τρία σκαθάρια

Πρόβλημα 6

Η κατανομή της τ.μ X είναι διωνυμική με $E(X)=12$ και $Var(X)=8$.
(1) Να βρεθεί το n (2) Να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή $E(X^2+2X)$

Πρόβλημα 7

Το ύψος των φυτών μιας συγκεκριμένης ποικιλίας καλαμποκιού ακολουθεί κανονική κατανομή με $E(X)=144$ cm και $\sigma = 22$ cm. Παίρνουμε τυχαίο δείγμα 16 φυτών. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες
(1) Το μέσο ύψος των φυτών να είναι μεταξύ 133 και 155 cm
(2) Σε κάθε ένα από τα 16 φυτά, το ύψος να είναι μεγαλύτερο από 144 cm

Πρόβλημα 8

Σε ένα πληθυσμό βακτηρίων η διάμετρος ενός βακτηρίου ακολουθεί $N(\mu, \sigma^2)$ με μέση τιμή $\mu = 1$ micro mm και διασπορά $\sigma^2 = 0.25$ micro mm

(1) Να βρεθεί η πιθανότητα ένα βακτήριο να έχει διάμετρο μεταξύ 0.50 και 1.25 micro mm.

(2) Αν πάρουμε ένα δείγμα από 36 βακτήρια, ποια είναι η πιθανότητα σε τουλάχιστον 20 από αυτά η διάμετρος να είναι μεγαλύτερη του 1 micro mm.

Πρόβλημα 9

Ο χρόνος αναμονής ενός φοιτητή κάθε πρωί στη στάση του λεωφορείου ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο χρόνο αναμονής 10 λεπτά.

(1) Εάν ο φοιτητής κατά τη διάρκεια του έτους πηγαίνει 120 μέρες στο πανεπιστήμιο με λεωφορείο. Ποια είναι η πιθανότητα ο συνολικός χρόνος αναμονής να υπερβαίνει τις 20 ώρες

(2) Σε δείγμα 30 φοιτητών ποιά είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 6 από αυτούς να περιμένουν πάνω από 20 ώρες στη στάση κατά τη διάρκεια του έτους.

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Πρόβλημα 1

(α) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{10}(80+62+74+78+\dots+64)$

$\Leftrightarrow \bar{X} = \frac{720}{10} \Leftrightarrow \boxed{\bar{X} = 72}$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(X_i-72)^2$

$= \frac{1}{9}\Big[(80-72)^2+(62-72)^2+(74-72)^2+(78-72)+(70-72)^2+(68-72)^2$

$+(70-72)^2+(78-72)^2+(76-72)^2+(64-72)^2\Big]$

$= \frac{1}{9}(64+100+4+36+4+16+4+36+16+64)$

$= \frac{1}{9}344 = 38,22$

άρα $S = \sqrt{38,22} \Leftrightarrow S = 6,1824$

(β) Αρχικά θα τοποθετήσουμε τις τιμές κατά αύξουσα σειρά

62, 64, 68, 70, 70, 74, 76, 78, 78, 80

$n=10$ άρα $\delta = \frac{X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} = \frac{X_5+X_6}{2} = \frac{70+74}{2} = 72$

$M_o = 70$ και 78 και είναι δικόρυφη

(γ) Έστω X_i οι αρχικές παρατηρήσεις και Y_i οι τελικές

άρα $Y_i = X_i - 5$

Έχουμε $\bar{Y} = \bar{X} - 5 \Leftrightarrow \bar{Y} = 72 - 5 \Leftrightarrow \bar{Y} = 67$

$S_Y = S_X = 6,1824$ και $M_o = 65$ και 73

$\delta_Y = \delta_X - 5 \Leftrightarrow \boxed{\delta_Y = 67}$ άρα δικόρυφη

Πρόβλημα 2

Βάρος	x_i	Πλήθος Γυναικών f_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 \cdot f_i$
[45-50)	47,5	6	285	138,0625	828,375
[50-55)	52,5	13	682,5	45,5625	592,3125
[55-60)	57,5	17	977,5	3,0625	52,0625
[60-65)	62,5	9	562,5	10,5625	95,0625
[65-70)	67,5	10	675	68,0625	680,625
[70-75)	72,5	3	217,5	175,5625	526,6875
[75-80)	77,5	2	155	333,0625	666,125
Σύνολο	—	60	3555	—	3.441,25

(α) Άρα $\bar{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{60} x_i \cdot f_i = \frac{1}{60} \cdot 3555 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 59,25}$

$$s^2 = \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2 \cdot f_i = 57,3542$$

άρα $\boxed{s = 7,5733}$

(Β) <u>1ο Τεταρτημόριο: Q_1</u> : Έχουμε $L_2 = 50$

$$Q_1 = L_2 + \frac{\frac{v}{4} - F_1}{f_2} \cdot c = 50 + \frac{15-6}{13} \cdot 5 \Leftrightarrow \boxed{Q_1 = 53,4615}$$

<u>Διάμεσος $\rightarrow \delta$ ή Q_2</u> : Έχουμε $L_3 = 55$

$$\delta = L_3 + \frac{\frac{v}{2} - F_2}{f_3} \cdot c = 55 + \frac{30-19}{17} \cdot 5 \Leftrightarrow \boxed{\delta = 58,2353}$$

<u>Κορυφή $\rightarrow M_o$</u> : Έχουμε $L_3 = 55$

$\Delta_1 = f_3 - f_2 = 17 - 13 = 4$ και $\Delta_2 = f_3 - f_4 = 17 - 9 = 8$

$$M_o = L_3 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot c = 55 + \frac{4}{4+8} \cdot 5 \Leftrightarrow \boxed{M_o = 56,66}$$

Πρόβλημα 3 $\quad N(\Omega) = 20$

(1) Εστω A το ενδεχόμενο να είναι άνδρας

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{11}{20} = 0.55$$

(2) Εστω Γ το ενδεχόμενο να είναι γυναίκα $\quad P(\Gamma \cap \Pi) = \frac{7}{20}$

Έστω Π " " να κάνει ειδ. στην παθολ

Έστω Μ " " " " " " μικροβ $\quad P(\Pi) = \frac{14}{20}$

$$P(\Gamma/\Pi) = \frac{P(\Gamma \cap \Pi)}{P(\Pi)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{14}{20}} = 0.5$$

(3) $P(A) = \frac{11}{20}$, $P(M) = \frac{6}{20}$

$$P(A \cap M) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Για να είναι πρέπει $P(A) \cdot P(M) = P(A \cap M)$

$$P(A) \cdot P(M) = \frac{11}{20} \cdot \frac{6}{20} \neq \frac{1}{5}$$ άρα όχι ανεξάρτητα

Πρόβλημα 4

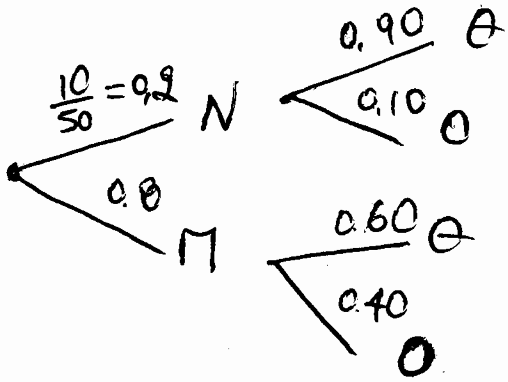
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

N: Στον ασθενή χορηγήθηκε το νέο φάρμακο

Π: Στον ασθενή χορηγήθηκε το παλιό φάρμακο

Θ: ο ασθενής θεραπεύτηκε

$\bar{\Theta}$: ο " δεν "



Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε $P(\theta/N) = 0.90$

$P(O/N) = 0.10$

$P(\theta/\Pi) = 0.60$, $P(O/\Pi) = 0.40$

$P(N) = 0.2$ $\quad P(\Pi) = 0.8$

$$P(N/\theta) = \frac{P(N)\cdot P(\theta/N)}{P(\theta)} \quad (A)$$

$$P(\theta) = P(N)\cdot P(\theta/N) + P(\Pi)\cdot P(\theta/\Pi)$$

$$= 0.2\cdot 0.9 + 0.40\cdot 0.60 = 0.18 + 0.24 = 0.42$$

Άρα η (A) γίνεται: $P(N/\theta) = \dfrac{0.2\cdot 0.90}{0.42} = 0.4286$

$\boxed{\text{Πρόβλημα 5}}$

(1) $P(X=0) = \frac{3}{2} P(X=1) \Leftrightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = \frac{3}{2}\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}\right)$

$\Leftrightarrow 2\cancel{e^{-\lambda}} = 3\cancel{e^{-\lambda}}\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{3}}$

Αφού θέλω να εξετάσω 3 φυτά έχω $\lambda' = 3\cdot\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \lambda' = 2$

Θέλω $P(X\leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$$= e^{-2}\frac{2^0}{0!} + e^{-2}\frac{2^1}{1!} = 0.1353 + 0.2707$$

$$= 0.4060$$

(2) $P(X=3) = e^{-2}\frac{2^3}{3!} = 0.1353 \cdot \frac{8}{6} = 0.1804$

$\boxed{\text{Πρόβλημα 6}}$

$X \sim B(n,p)$

(1) $E(X)=12 \Leftrightarrow n\cdot p = 12$

$Var(X) = n\cdot p\cdot q = 8 \Leftrightarrow 12\cdot q = 8 \Leftrightarrow q = \frac{8}{12} \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 1-p = \frac{2}{3} \Leftrightarrow p = 1-\frac{2}{3} \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$

Άρα $n = \frac{12}{p} \Leftrightarrow n = \frac{12}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \boxed{n=36}$

(2) $E(X^2+2X) = E(X^2)+E(2X) = E(X^2)+2E(X)$

$Var(X) = E(X^2)-(E(X))^2 \Leftrightarrow E(X^2) = 8+12^2$

$\Leftrightarrow E(X^2) = 152$

άρα $E(X^2+2X) = 152+2\cdot 12 \Leftrightarrow E(X^2+2X) = 176$

$\boxed{\text{Πρόβλημα 7}}$

(1) Έστω X η τ.μ για το ύψος των φυτών

$X \sim N(144, 22^2)$

$n=16$ το $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(144, \frac{22}{\sqrt{16}})$

άρα $\bar{X} \sim N(144, 5{,}5)$

Θέλουμε $P(133 < \bar{X} < 155)$

$$= P\left(\frac{133-144}{5,5} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} < \frac{155-144}{5,5}\right)$$

$$= P(-2 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2)$$

$$= \Phi(2) - (1-\Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1$$

$$= 0.9544$$

(2) $P(X > 144) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{144-\mu}{\sigma}\right)$

$$= P\left(Z > \frac{144-144}{22}\right) = P(Z > 0) = 1 - P(Z < 0)$$

$$= 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

Πρόβλημα 8

(1) Έστω X η τ.μ που εκφράζει την διάμετρο ενός βακτηρίου η $X \sim N(1, 0.25)$

$$P(0.50 < X < 1.25) = P\left(\frac{0.50-1}{\sqrt{0.25}} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1.25-1}{\sqrt{0.25}}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 0.5) = \Phi(0.5) - \Phi(-1) = \Phi(0.5) - (1-\Phi(1))$$

$$= \Phi(0.5) - 1 + \Phi(1) = 0.69146 - 1 + 0.84134$$

$$= 0.5328$$

(2) Εστω Y τον αριθμό των βακτηρίων που έχουν διάμετρο μεγαλύτερη απο 1 micrometer.

η τ.μ. $Y \sim B(36, p)$

με $p = P(X > 1) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{1-\mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(Z > \frac{1-1}{\sqrt{0.25}}\right) = P(Z > 0) = 1 - \Phi(0) = 0.5$

Ζητάμε την πιθανότητα $P(Y \geq 20)$

$$P(Y \geq 20) = \sum_{i=20}^{36} P(Y=y) = \sum_{i=20}^{36} \binom{36}{y} 0.5^{y} (1-0.5)^{36-y} = 0{,}30886$$

(Απο Η/Υ)

Επειδή η διωνυμική είναι διακριτή κατανομή θα κάνουμε χρήση διόρθωσης συνέχειας άρα

$$P(Y \geq 20) = P\left(Z \geq \frac{20 - 0.5 - 36 \cdot 0{,}5}{\sqrt{36 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{1{,}5}{3}\right) = P(Z \geq 0{,}5) = 1 - \Phi(0.5)$$

$= 1 - 0.69146 = 0.30854$

Πρόβλημα 9

(1) $exp(\lambda)$ $\mu = 10$ min άρα $10 = \frac{1}{\lambda}$ και $\sigma = \frac{1}{\lambda} = 10$

Προφανώς οι μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_{120}$ είναι ισόνομες και ανεξάρτητες. Άρα σύμφωνα με το Κ.Ο.Θ ο συνολικός χρόνος αναμονής είναι: $S_{120} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{120}$

Άρα η $S_{120} \sim N(n \cdot \mu, \sigma\sqrt{n}) = N(1200, 10\sqrt{120})$

Θέλω $P(S_{120} > 120 \cdot 60) = P(S_{120} > 1200)$

$$= P\left(\frac{S_{120} - 1200}{10\sqrt{120}} > \frac{1200 - 1200}{10\sqrt{120}}\right) = P(Z > 0)$$

$= 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5$

(B) Αν συμβολίσουμε με Y τον αριθμό των φοιτητών που περιμέναν πάνω από 20 h στη στάση κατά τη διάρκεια του έτους. Η τ.μ $Y \sim B(30, 0.5)$

Επομένως $E(Y) = n \cdot p = 30 \cdot 0.5 = 15$ μέρες

Ζητάμε την πιθανότητα $P(Y \geq 6)$ η οποία δίνεται από τον

τύπο: $$P(Y \geq 6) = \sum_{i=6}^{30} P(Y=y) = \sum_{i=6}^{30} \binom{30}{y} (0.5)^y (1-0.5)^{30-y} =$$

Όμως $P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3) - P(4) - P(5)$

$P(0) = \binom{30}{0} 0.5^0 \cdot 0.5^{30} = 1 \cdot 1 \cdot 0,0000000031$

$P(1) = \binom{30}{1} 0.5^1 \cdot 0.5^{29} = 0,00000002793$

$P(2) = \binom{30}{2} 0,5^2 \cdot 0,5^{28} = 0,0000001 3485$

$P(3) = \binom{30}{3} 0.5^{30} = 0,00000377986$, $P(4) = \binom{30}{4} \cdot 0,5^{30} = 0,000025514$

$P(5) = \binom{30}{5} 0.5^{30} = 0,0001326731$ άρα $P(Y \geq 6) = 1 - 0,0001621 = 0,9998$

Για τον Υπολογισμό της πιθανότητας μπορούμε να κάνουμε Διόρθωση Συνέχειας

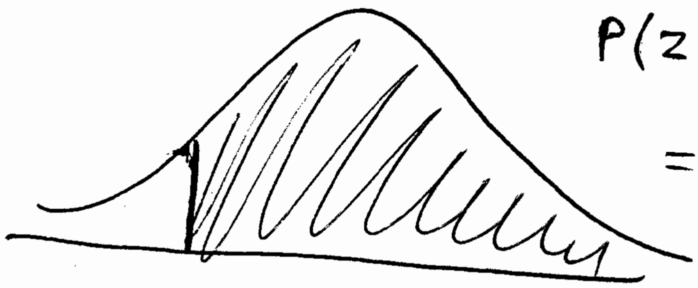
$$E(Y) = np = 30 \cdot 0.5 = 15$$

$$Var(Y) = np \cdot q = 30 \cdot 0,5^2 = 7,5$$

Άρα $P(Y \geq 6) = P\left(\frac{Y - 0.5 - 15}{\sqrt{7,5}} \geq \frac{6 - 0,5 - 15}{\sqrt{7,5}} \right)$

$$= P\left(Z \geq \frac{-9,5}{\sqrt{7.5}}\right) = P\left(Z \geq -\frac{9.5}{2.7386}\right) = P(Z \geq -3,4689)$$

$$= P(Z \leq 3.4689) = 0,999739$$



$-3,4689$

$$P(Z \geq -3,4689) = 1 - P(Z \leq -3,4689)$$

$$= 1 - P(Z \geq 3,4689)$$

$$= 1 - \left(1 - P(Z \leq 3.4689)\right)$$

$$= P(Z \leq 3,4689)$$