ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2013 -2014

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

Βασικά Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο της Ποιότητας [ΔΙΠ 50]

3η ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Προσοχή: *Οι απαντήσεις των ασκήσεων πρέπει να φθάσουν στον Καθηγητή-Σύμβουλο ιδανικά μέχρι την Κυριακή 02/02/2014 (καταληκτική ημερομηνία) και σε καμιά περίπτωση αργότερα από την Τρίτη 04/02/2014 (τελική καταληκτική ημερομηνία (με την παράταση)).*

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΟΒΟΛΗ - ΕΚΠΟΝΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΩΝ ΣΤΗ ΔΙΠ 50

1. Μπορείτε να μην υποβάλλετε μόνο 1 από τις 5 εργασίες και πρέπει να συγκεντρώσετε 25 μονάδες στις 4 ή 5 εργασίες που θα υποβάλλετε για να έχετε δικαίωμα συμμετοχής στις εξετάσεις.
2. Πρέπει να τηρείτε τις προθεσμίες υποβολής των εργασιών και να ακολουθείτε πιστά τις οδηγίες που γράφονται στην αρχή κάθε άσκησης ή ερωτήματος.
3. Οι γραπτές εργασίες υποβάλλονται αποκλειστικά ηλεκτρονικά στο χώρο «ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ» (http://study.eap.gr). Οι απαντήσεις των ερωτημάτων να γράφονται σε χαρτί μεγέθους Α4. Τα φύλλα της εργασίας θα πρέπει να είναι αριθμημένα και στην πρώτη σελίδα της εργασίας θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Η εργασία συνιστάται να είναι δακτυλογραφημένη. Αν είναι χειρόγραφη είναι υποχρεωτικό να είναι ευανάγνωστη. Μη γράφετε περισσότερα από αυτά που ζητούνται σε κάθε άσκηση, αφού τα επιπλέον, αν μεν είναι σωστά δεν λαμβάνονται υπ' όψιν, αν όμως είναι λάθος, επηρεάζουν αρνητικά τη βαθμολογία του θέματος.
4. Να βάζετε τις απαντήσεις σας στις ασκήσεις – υποερωτήματα με τη σειρά, όχι ανάκατα.
5. Η σειρά των θεμάτων και των ερωτημάτων στις γραπτές εργασίες δεν ακολουθεί απαραίτητα τη σειρά των περιεχομένων του εκπαιδευτικού υλικού.
6. Μην αντιγράφετε τις εκφωνήσεις! Να γράφετε μόνο τις αιτιολογημένες απαντήσεις σας βάζοντας στην αρχή την αντίστοιχη αρίθμηση της άσκησης και του ερωτήματος που απαντάτε.
7. Σε κάθε ερώτημα να δίνετε έναν (1) μόνο τρόπο λύσης.
8. Αν ένα ερώτημα ζητά σχήμα, να βάζετε το σχήμα στο τέλος της απάντησής σας για το ερώτημα, όχι στο τέλος της άσκησης ή της εργασίας.
9. Αν σε ένα ερώτημα χρησιμοποιείται το πακέτο MINITAB, θα πρέπει να περιέχεται στην απάντησή σας (α) πλήρης περιγραφή της διαδικασίας του MINITAB που ακολουθήσατε, (β) αντίγραφο της εκτύπωσης του session window του MINITAB και (γ) σχολιασμός ή ερμηνεία του αποτελέσματος του MINITAB. Τα (α) και (γ) πρέπει να μπαίνουν στην απάντηση του ερωτήματος, ενώ το (β) πρέπει να περιέχεται στο τέλος της άσκησης στην οποία ανήκει το ερώτημα (σε καμιά περίπτωση στο τέλος της εργασίας).
10. Δεν θα βαθμολογούνται απαντήσεις στις οποίες γίνεται χρήση άλλου στατιστικού πακέτου (εκτός του MINITAB). Επιτρέπεται η χρήση του Excel για τη διενέργεια μόνον απλών αριθμητικών υπολογισμών.
11. Στα ερωτήματα που χρειάζεται να χρησιμοποιήσετε μια σχέση (έναν τύπο), πρέπει να γράφετε πρώτα τη λογική ή το επιχείρημα για την επιλογή της σχέσης, ακολούθως να γράφετε τη γενική μορφή της σχέσης, μετά να κάνετε αντικατάσταση των τιμών και, τέλος, να βρίσκετε το αποτέλεσμα.
12. Στις προτάσεις Σωστού-Λάθους πρέπει απαραίτητα να γράφετε την επιλογή σας (Σωστή ή Λάθος) και στις προτάσεις που δίνετε απάντηση «Λάθος» να δίνετε σαφή αιτιολόγηση, η οποία να περιέχει εντοπισμό του λάθους, και όχι να παραπέμπετε σε ολόκληρες παραγράφους ή σελίδες του εκπαιδευτικού υλικού. Ομοίως, στα ερωτήματα πολλαπλής επιλογής, πρέπει απαραίτητα να επιλέξετε τη σωστή επιλογή, π.χ. «η (i) είναι η Σωστή» και να αιτιολογείτε με σαφήνεια την απάντησή σας. Αν δεν υπάρχει ξεκάθαρη επιλογή σε ένα ερώτημα Σωστού-Λάθους (Σωστή ή Λάθος) ή σε ένα ερώτημα πολλαπλής επιλογής (ποια επιλογή είναι η Σωστή) το ερώτημα θα μηδενίζεται.
13. Μπορείτε να ανταλλάσσετε απόψεις για τη σωστή απάντηση των ασκήσεων, αλλά δεν επιτρέπονται σε καμιά περίπτωση αντιγραφές. Εάν υποβληθούν από δύο ή περισσότερους φοιτητές πανομοιότυπες απαντήσεις σε μια ή περισσότερες ασκήσεις (έστω και με διακοσμητικές αλλαγές για να φαίνονται δήθεν διαφορετικές), θα μηδενίζονται οι εργασίες όλων των εμπλεκόμενων φοιτητών (απόφαση της Ομάδας Διδακτικού Προσωπικού της ΔΙΠ 50).

Βαθμολόγηση: *Οι μονάδες που αντιστοιχούν σε κάθε άσκηση και σε κάθε ερώτημα χωριστά δίνονται μέσα σε παρένθεση (σύνολο 100 μονάδες).*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3^{ης} ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Άσκηση 1 (15 μονάδες)

Δώστε την κατάλληλη απάντηση (ΣΩΣΤΗ ή ΛΑΘΟΣ) στις παρακάτω προτάσεις. Αιτιολογήστε σύντομα μόνο τις απαντήσεις στις οποίες επιλέξατε ΛΑΘΟΣ.

(α-1.5) Αν στον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: \mu = \mu_0$ έναντι της υπόθεσης $H_A: \mu \neq \mu_0$ η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 2%, τότε απορρίπτεται και σε επίπεδο σημαντικότητας 1%.

(β-1.5) Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ, τότε η σ.σ. S^2 ακολουθεί την κατανομή χ^2_{n-1}.

(γ-1.5) Αν X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 είναι ένα τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με μέση τιμή $\mu = 5$ και διασπορά $\sigma^2 = 25$, τότε η σ.σ. $\overline{X}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 5$ και διασπορά $\sigma^2 = 5$.

(δ-1.5) Βασιζόμενοι στο $100(1-a)\%$ δίπλευρο δ.ε. για την παράμετρο θ ενός πληθυσμού μπορούμε να αποφανθούμε για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: \theta = \theta_0$ έναντι της υπόθεσης $H_A: \theta > \theta_0$ σε επίπεδο σημαντικότητας a.

(ε-1.5) Για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: p_1 - p_2 = \delta_0$ έναντι της υπόθεσης $H_A: p_1 - p_2 \neq \delta_0$ χρησιμοποιούμε πάντα τη σ.σ.ε. $Z = \dfrac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - \delta_0}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$, όπου $\hat{P} = \dfrac{n_1\hat{P}_1 + n_2\hat{P}_2}{n_1 + n_2}$.

(στ-1.5) Το επίπεδο σημαντικότητας σε έναν έλεγχο υποθέσεων με απλή μηδενική υπόθεση ισούται πάντα με την πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι.

(ζ-1.5) Η σ.σ.ε. που χρησιμοποιείται στον έλεγχο της διαφοράς δύο μέσων τιμών δύο πληθυσμών όταν οι διασπορές των πληθυσμών είναι γνωστές, είναι η $Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$.

(η-1.5) Στα δ.ε. με σταθερό μέγεθος δείγματος, η ακρίβεια του διαστήματος αυξάνει όσο αυξάνει το επίπεδο εμπιστοσύνης.

(θ-1.5) Το τετράγωνο της ακρίβειας του δ.ε. για τη μέση τιμή ενός κανονικού πληθυσμού είναι αντιστρόφως ανάλογο του μεγέθους του δείγματος.

(ι-1.5) Όταν έχουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 10 από κανονικό πληθυσμό, η κατανομή t_{10} είναι η πλέον κατάλληλη κατανομή της οικογένειας των κατανομών t για στατιστική συμπερασματολογία για τη μέση τιμή του πληθυσμού.

Άσκηση 2 (10 μονάδες)

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση (i), (ii), (iii) ή (iv) στα ερωτήματα (α) – (ε) παρακάτω, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(α-2) Από έναν πληθυσμό με πεπερασμένη μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ επιλέγεται ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$. Αν $\overline{X} = \dfrac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$, τότε η τυχαία μεταβλητή $Y = 10(\overline{X} - \mu)$ έχει μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντίστοιχα:

(i) $0, \sigma$.

(ii) $0, \sigma/10$.

(iii) $1, \sigma/\sqrt{10}$.

(iv) $10, 10\sigma$.

(β-2) Ο καθηγητής-σύμβουλος του τμήματος ΜΥΚΟΝΟΣ1 της ΔΙΠ 50 έδωσε ένα επώνυμο test αξιολόγησης στους φοιτητές του στην αρχή του ακαδημαϊκού έτους. Στο τέλος του έτους για να ελέγξει την αποτελεσματικότητα του τρόπου διδασκαλίας του έδωσε πάλι ένα αντίστοιχο test στους ίδιους φοιτητές. Για τον έλεγχο της αποτελεσματικότητας του τρόπου διδασκαλίας του θα πρέπει να χρησιμοποιήσει

(i) έλεγχο υποθέσεων για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών με ανεξάρτητα δείγματα και γνωστές διασπορές.

(ii) έλεγχο υποθέσεων για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών με ανεξάρτητα δείγματα και άγνωστες διασπορές.

(iii) έλεγχο υποθέσεων για τη μέση διαφορά με δείγματα κατά ζεύγη.

(iv) έλεγχο υποθέσεων για τη διαφορά δύο αναλογιών με ανεξάρτητα δείγματα.

(γ-2) Στους ελέγχους υποθέσεων ποια από τις παρακάτω προτάσεις ισχύει;

(i) Η αύξηση του μεγέθους του δείγματος δεν επηρεάζει την παρατηρούμενη τιμή της σ.σ.ε.

(ii) Το άθροισμα της πιθανότητας του σφάλματος τύπου Ι και της πιθανότητας του σφάλματος τύπου ΙΙ ισούται με τη μονάδα.

(iii) Για τον υπολογισμό του παρατηρούμενου επιπέδου σημαντικότητας πρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή της σ.σ.ε. υπό την απλή H_0.

(iv) Η κρίσιμη περιοχή καθορίζεται μόνο από την εναλλακτική υπόθεση.

(δ-2) Από μία έρευνα που βασίστηκε σε ένα τυχαίο δείγμα 500 λαμπτήρων φωτισμού μιας συγκεκριμένης εταιρείας, προέκυψε ότι σε επίπεδο εμπιστοσύνης 97% η αναλογία των παραγόμενων λαμπτήρων της εταιρείας που δε είναι ελαττωματικές βρίσκεται στο διάστημα (0.88, 0.92). Μπορούμε τότε να πούμε ότι:

(i) Η δειγματική αναλογία των λαμπτήρων που δεν είναι ελαττωματικές είναι 0.90.

(ii) Η αναλογία των παραγόμενων λαμπτήρων της εταιρείας που δε είναι ελαττωματικές είναι ίση ή μεγαλύτερη από 0.88.

(iii) Με πιθανότητα 0.03 η αναλογία των παραγόμενων λαμπτήρων της εταιρείας που δεν είναι ελαττωματικές βρίσκεται εκτός του διαστήματος (0.88, 0.92).

(iv) Είμαστε 97% σίγουροι πως η αναλογία των λαμπτήρων του δείγματος που δεν είναι ελαττωματικές βρίσκεται εντός του διαστήματος (0.88,0.92).

(ε-2) Για την εκτίμηση της διαφοράς των μέσων τιμών δύο πληθυσμών με ανεξάρτητα δείγματα, το διάστημα εμπιστοσύνης $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{a/2, n_1+n_2-2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ δεν είναι κατάλληλο όταν

(i) οι πληθυσμοί είναι κανονικοί, τα μεγέθη των δειγμάτων είναι ίσα και οι διασπορές των πληθυσμών είναι άνισες.

(ii) οι πληθυσμοί είναι κανονικοί και οι διασπορές των πληθυσμών είναι άγνωστες αλλά ίσες.

(iii) οι διασπορές των πληθυσμών είναι άγνωστες αλλά ίσες, και οι κατανομές των πληθυσμών δεν είναι κανονικές αλλά δε διαφέρουν πολύ από την κανονική.

(iv) οι πληθυσμοί είναι κανονικοί, οι διασπορές των πληθυσμών είναι άνισες και τα μεγέθη των δειγμάτων άνισα.

Άσκηση 3 (10 μονάδες)

Η εταιρία DrinkCola για τη διασφάλιση της ποιότητας των προϊόντων που παράγει, πραγματοποίησε ένα τυχαίο δειγματοληπτικό έλεγχο σε όλη την παραγωγή της και βρήκε ότι η χημική σύσταση 8 φιαλών από τις 200 που εξετάστηκαν ήταν εκτός προδιαγραφών.

(α-2) Να βρεθεί και να ερμηνευθεί το 95% δ.ε. για την αναλογία των εκτός προδιαγραφών φιαλών της παραγωγής. Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα.

(β-2) Πόσες φιάλες πρέπει να επιλεγούν τυχαία έτσι ώστε το 90% δ.ε. της αναλογίας των εκτός προδιαγραφών φιαλών να έχει πλάτος το πολύ 0.05; Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα.

(γ-3) Η DrinkCola ισχυρίζεται ότι η αναλογία των εκτός προδιαγραφών φιαλών που παράγει είναι μικρότερη από 3.5%. Ελέγξτε στο 0.05 επίπεδο σημαντικότητας τον ισχυρισμό της εταιρίας. Ο σχετικός έλεγχος υπόθεσης να γίνει με χρήση του παρατηρούμενου επιπέδου σημαντικότητας. Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα.

(δ-3) Για τον έλεγχο υποθέσεων του ερωτήματος (γ) και για ρίσκο παραγωγού 0.08, να υπολογιστεί το κατάλληλο μέγεθος δείγματος έτσι ώστε να είναι το ρίσκο καταναλωτή 0.2 όταν η πραγματική αναλογία των ελαττωματικών φιαλών σε όλη την παραγωγή είναι 1.5%.

Άσκηση 4 (10 μονάδες)

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση σε καθένα από τα παρακάτω ερωτήματα. Δεν απαιτείται αιτιολόγηση.

(α-1) Ποια είναι η πιθανότητα η δειγματική διασπορά S^2 ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους $n = 10$ που έχει ληφθεί από κανονικό πληθυσμό να είναι μεγαλύτερη από την πραγματική διασπορά σ^2 του πληθυσμού;

α. 0.000 β. 0.111 γ. 0.437 δ. 0.500 ε. 0.563 στ. 1.000

(β-1) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιεί το μέγεθος n ενός τυχαίου δείγματος που παίρνεται από ένα κανονικό πληθυσμό με μέση τιμή 100 και διασπορά 25 για να ισχύει ότι $P(|\bar{X} - \mu| \leq 2) \geq 0.97$;

α. $n \leq 15$ β. $n \geq 15$ γ. $n \geq 16$ δ. $16 \leq n < 30$ ε. $n \geq 29$ στ. $n \geq 30$

(γ-1) Από την παραγωγή ενός εργοστασίου εμφιάλωσης αναψυκτικών ελήφθη τυχαίο δείγμα μεγέθους $n = 4$ μπουκαλιών, μετρήθηκε η περιεχόμενη ποσότητά τους και βρέθηκε ότι $\bar{x} = 487.3$ ml και $s^2 = 36$ ml^2. Θεωρώντας ότι η περιεχόμενη ποσότητα αναψυκτικού σε κάθε μπουκάλι ακολουθεί την κανονική κατανομή, προκύπτει ότι το 90% άνω όριο εμπιστοσύνης της μέσης περιεχόμενης ποσότητας αναψυκτικού στα μπουκάλια είναι

α. 491.140 β. 483.460 γ. 482.386 δ. 492.214 ε. 494.359 στ. 497.128

(δ-1) Από δύο κανονικούς πληθυσμούς με άγνωστες διασπορές που δεν μπορούν να υποτεθούν ίσες λαμβάνονται δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους 6 το καθένα και για τις δειγματικές διασπορές τους s_1^2 και s_2^2 βρέθηκε ότι $s_1^2 = 2s_2^2$. Οι βαθμοί ελευθερίας της κατανομής t που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης της διαφοράς των μέσων τιμών των δύο πληθυσμών είναι

α. 5 β. 6 γ. 9 δ. 10 ε. 11 στ. 12

(ε-1) Το $100(1-a)\%$ δ.ε. για το λόγο σ_2^2/σ_1^2 των διασπορών δύο κανονικών πληθυσμών με ανεξάρτητα δείγματα του ίδιου μεγέθους είναι το $(l,u)=(0.396,\ 10.101)$. Ποια είναι η τιμή του λόγου των δειγματικών διασπορών s_2^2/s_1^2;

α. 1.000 β. 2.000 γ. 2.500 δ. 0.151 ε. 5.249 στ. Άγνωστη

(στ-1) Ποιο είναι το 0.01 – ποσοστιαίο σημείο της κατανομής $F_{10,7}$;

α. 6.620 β. 5.200 γ. 0.192 δ. 0.151 ε. 6.990 στ. 0.143

(ζ-1) Έστω $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_{81}$ ένα τυχαίο δείγμα από πληθυσμό που έχει την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 45. Αν $\overline{X}=\frac{1}{81}\sum_{i=1}^{81}X_i$, ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα $P(\overline{X}>50)$;

α. 0.9332 β. 0.8413 γ. 0.9382 δ. 0.1587 ε. 0.9452 στ. 0.9495

(η-1) Το μήκος (σε mm) μεταλλικών ελασμάτων συγκεκριμένου τύπου ακολουθεί κανονική κατανομή με $\sigma=0.1$ mm. Για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι της υπόθεσης $H_A: \mu\neq\mu_0$ σε επίπεδο σημαντικότητας $a=0.05$, ποιο είναι το μικρότερο μέγεθος δείγματος που ικανοποιεί τη σχέση $\beta(\mu_0-0.1)\leq 0.1$;

α. 13 β. 8 γ. 9 δ. 10 ε. 11 στ. 12

(θ-1) Δύο συμφοιτητές λύνουν την ίδια άσκηση που αφορά έλεγχο υπόθεσης για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών με ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους 500 το καθένα. Παρότι και οι δύο υπολογίζουν την ίδια παρατηρούμενη τιμή της σ.σ.ε., τελικά στο 0.05 επίπεδο σημαντικότητας ο ένας απορρίπτει την H_0 ενώ ο άλλος όχι. Όταν επανελέγχουν τα αποτελέσματά τους διαπιστώνουν ότι η μόνη διαφορά στη διαδικασία που ακολούθησαν είναι ότι αυτός που δεν απέρριψε την H_0 έκανε μονόπλευρο έλεγχο ενώ ο άλλος δίπλευρο έλεγχο. Ποια από τις παρακάτω μπορεί να είναι η παρατηρούμενη τιμή της σ.σ.ε.;

α. -1.982 β. -1.690 γ. 1.214 δ. 1.690 ε. 1.792 στ. 1.872

(ι-1) Η ένωση καταναλωτών ισχυρίζεται ότι μία βιομηχανία τυποποίησης τροφίμων εξαπατά τους πελάτες της όσον αφορά στο καθαρό βάρος ενός προϊόντος που διανέμει. Ενώ το αναγραφόμενο καθαρό βάρος στην συσκευασία είναι 350gr, σε τυχαίο δείγμα 10 συσκευασιών του συγκεκριμένου προϊόντος η δειγματική μέση τιμή και τυπική απόκλιση βρέθηκαν να είναι 325 gr και 40 gr αντίστοιχα. Εάν υποτεθεί ότι το καθαρό βάρος ακολουθεί κανονική κατανομή, ποιο είναι το μικρότερο επίπεδο σημαντικότητας στο οποίο απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση του ελέγχου υποθέσεων που πρέπει να γίνει για λογαριασμό της ένωσης καταναλωτών;

α. $a<0.001$ β. $a=0.024$ γ. $a=0.040$ δ. $a=0.048$ ε. $a=0.080$ στ. $a>0.1$

<u>Άσκηση 5 (12 μονάδες)</u>

Δύο διαφορετικά κράματα μετάλλων A και B χρησιμοποιούνται για την κατασκευή εξαρτημάτων μιας μηχανής. Εκατό εξαρτήματα κατασκευασμένα με το κράμα A υποβάλλονται σε ένα τεστ αντοχής και διαπιστώνεται ότι 28 από αυτά είχαν μειωμένη αντοχή και επομένως θεωρούνται ελαττωματικά. Σε αντίστοιχο έλεγχο εκατό εξαρτημάτων κατασκευασμένων με το κράμα B βρέθηκαν 20 εξαρτήματα με μειωμένη αντοχή.

(α-3) Χρησιμοποιώντας κατάλληλο δ.ε. ελέγξτε, σε επίπεδο σημαντικότητας ίσο με 0.05, αν το ποσοστό των ελαττωματικών εξαρτημάτων των δύο κραμάτων A και B είναι το ίδιο. <u>Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα</u>.

(β-3) Χρησιμοποιείστε το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας για να ελέγξτε αν τα δύο κράματα έχουν ίδιο ποσοστό ελαττωματικών εξαρτημάτων. Ο έλεγχος να γίνει σε επίπεδο σημαντικότητας $a = 0.10$. Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα.

(γ-3) Να επαληθευθεί το διάστημα εμπιστοσύνης του ερωτήματος (α) και το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας του ερωτήματος (β) με τη χρήση του MINITAB.

(δ-3) Χρησιμοποιώντας το MINITAB βρείτε πόσο μεγάλα πρέπει να είναι τα δείγματα των εξαρτημάτων από τα δύο κράματα έτσι ώστε ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης ίδιου ποσοστού ελαττωματικών εξαρτημάτων να έχει (i) επίπεδο σημαντικότητας ίσο με 0.05, και (ii) ισχύ ίση με 0.90 για ποσοστά ελαττωματικών εξαρτημάτων 26% και 22% στα δύο κράματα Α και Β αντίστοιχα.

Άσκηση 6 (12 μονάδες)

Σε μια ιατρική έρευνα μελετάται η επίδραση ενός φαρμάκου στην αρτηριακή πίεση των ασθενών που το λαμβάνουν. Για το σκοπό αυτό καταγράφηκε η αρτηριακή πίεση 16 ασθενών πριν και μετά τη λήψη του συγκεκριμένου φαρμάκου και τα αποτελέσματα καταγράφονται στον ακόλουθο πίνακα.

	Αρτηριακή πίεση (mmHg)	
Ασθενής	Πριν τη λήψη	Μετά τη λήψη
1	120	112
2	135	131
3	128	132
4	132	127
5	137	127
6	120	118
7	110	99
8	115	123
9	123	117
10	142	133
11	138	124
12	122	108
13	121	118
14	134	140
15	104	113
16	113	111

Θεωρώντας ότι η διαφορά στην αρτηριακή πίεση πριν και μετά τη λήψη του φαρμάκου ακολουθεί την κανονική κατανομή να απαντηθούν τα ακόλουθα ερωτήματα.

(α-4) Να υπολογιστεί και να ερμηνευθεί το 98% δ.ε. για τη μέση διαφορά της αρτηριακής πίεσης πριν και μετά τη λήψη του φαρμάκου. Υπάρχουν ενδείξεις σε επίπεδο σημαντικότητας $a = 0.02$ ότι το συγκεκριμένο φάρμακο αλλάζει το μέσο επίπεδο της αρτηριακής πίεσης; Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα.

(β-3) Υπάρχουν σημαντικές ενδείξεις σε επίπεδο σημαντικότητας $a = 0.05$ ότι το συγκεκριμένο φάρμακο μειώνει το μέσο επίπεδο της αρτηριακής πίεσης; Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα.

(γ-3) Να επαληθευθεί το δ.ε. του ερωτήματος (α) και το συμπέρασμα του ελέγχου υπόθεσης του ερωτήματος (β) με τη χρήση του MINITAB.

(δ-2) Αν στην πραγματικότητα το φάρμακο μειώνει τη μέση αρτηριακή πίεση κατά 5 mmHg, ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ασθενών που πρέπει να λάβουν μέρος στην εν λόγω έρευνα έτσι ώστε ο έλεγχος υπόθεσης του ερωτήματος (β) να έχει πιθανότητα μικρότερη από 0.1 να μην εντοπίσει την επίδραση του φαρμάκου;

<u>Άσκηση 7 (11 μονάδες)</u>

Το μήκος (σε mm) ορισμένου τύπου αξόνων που χρησιμοποιούνται ως ανταλλακτικά σε ένα μηχανουργείο ακολουθεί την κανονική κατανομή με άγνωστες παραμέτρους. Για την εκτίμηση της άγνωστης μέσης τιμής μ και της άγνωστης διασποράς σ^2 του μήκους των αξόνων ελήφθη τυχαίο δείγμα 12 αξόνων και μετρήθηκε με ακρίβεια το μήκος τους. Οι τιμές του μήκους (σε mm) που προέκυψαν παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Άξονας

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
99.14	101.62	99.70	100.80	101.56	99.06	100.99	100.49	100.67	99.72	100.69	99.42

(α-3) Να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $a = 0.01$ αν το μέσο μήκος των αξόνων διαφέρει από την ονομαστική τους τιμή που είναι 100 mm. <u>Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα</u>.

(β-3) Να υπολογιστεί και να ερμηνευθεί το 95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση του μήκους των αξόνων. <u>Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα</u>.

(γ-3) Να επαληθευθεί το συμπέρασμα του ελέγχου υπόθεσης του ερωτήματος (α) και το δ.ε. του ερωτήματος (β) με τη χρήση του MINITAB.

(δ-2) Αν το μέσο μήκος των αξόνων είναι στην πραγματικότητα 100.3 mm, να υπολογιστεί η ισχύς του ελέγχου υπόθεσης του ερωτήματος (α).

<u>Άσκηση 8 (11 μονάδες)</u>

Τα δισκία αντιβιοτικών με την εμπορική επωνυμία Α και Β περιέχουν την ίδια ακριβώς δραστική ουσία και την ίδια ονομαστική ποσότητα ανά δισκίο. Στον παρακάτω πίνακα καταγράφεται η δειγματική μέση τιμή και η δειγματική τυπική απόκλιση των τιμών του βάρους της δραστικής ουσίας (σε mg) όπως προέκυψαν από δύο τυχαία και ανεξάρτητα δείγματα δισκίων από τα αντιβιοτικά Α και Β.

Αντιβιοτικό	n	$\bar{x}$	s
Α	10	241.5	3.2
Β	11	245.9	2.5

Υποθέστε ότι η κατανομή του βάρους της δραστικής ουσίας στα δισκία του αντιβιοτικού τύπου Α και Β είναι κανονική.

(α-3) Μπορείτε να ισχυριστείτε στο 0.10 επίπεδο σημαντικότητας ότι οι διασπορές του βάρους της δραστικής ουσίας στα δισκία των αντιβιοτικών Α και Β είναι ίσες; Ο σχετικός έλεγχος να γίνει με χρήση κατάλληλου δ.ε. <u>Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα</u>.

(β-3) Μπορείτε να συμπεράνετε στο 0.10 επίπεδο σημαντικότητας ότι οι μέσες τιμές βάρους της δραστικής ουσίας στα δύο αντιβιοτικά διαφέρουν; Να κάνετε κατάλληλο έλεγχο υποθέσεων λαμβάνοντας υπόψη τα συμπεράσματα του ερωτήματος (α). <u>Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα</u>.

(γ-3) Με τη χρήση του MINITAB επαληθεύστε το δ.ε. που βρήκατε στο ερώτημα (α) και επιβεβαιώστε τα συμπεράσματα των ελέγχων υποθέσεων των ερωτημάτων του (α) και (β).

(δ-2) Αν το πραγματικό μέσο βάρος της δραστικής ουσίας των δισκίων του αντιβιοτικού Β είναι κατά 5mg μεγαλύτερο από το μέσο βάρος της δραστικής ουσίας των δισκίων του αντιβιοτικού Α, βρείτε με τη χρήση του MINITAB την πιθανότητα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης του ερωτήματος (β) θεωρώντας ότι έχουμε από κάθε είδος αντιβιοτικού ένα τυχαίο δείγμα 12 δισκίων.

<u>Άσκηση 9 (9 μονάδες)</u>

Ο χρόνος ζωής (σε ώρες) ενός συγκεκριμένου τύπου ηλεκτρονικής λυχνίας ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1/200$.

(α-3) Αν επιλέξουμε στην τύχη 64 τέτοιες ηλεκτρονικές λυχνίες, ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα ο συνολικός χρόνος ζωής τους να ξεπερνά τις 10000 ώρες; Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα.

(β-3) Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το πολύ 24 από τις 64 λυχνίες να έχουν χρόνο ζωής μικρότερο από 120 ώρες. Απαντήστε χωρίς MINITAB σε αυτό το ερώτημα.

(γ-1) Χρησιμοποιείστε το MINITAB για την επιβεβαίωση της πιθανότητας του ερωτήματος (α).

(δ-2) Χρησιμοποιείστε το MINITAB για τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας του ερωτήματος (β).

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α !

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 3ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΕΑΠ ΔΙΠ 50 2013-2014

Άσκηση 1

(α) Λ, Απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης H_0: σε $a=0{,}01$ επίπεδο σημαντικότητας σημαίνει ότι p-value $\leq 0{,}02$
Για να απορριφθεί στο 0,01 επίπεδο σημαντικότητας θα πρέπει p-value $\leq 0{,}01$, κάτι που μπορεί να μην ισχύει

(β) Λ, η S^2 ακολουθεί την $G(a,B)$ με $a=\frac{n-1}{2}$ και $B=\frac{2\sigma^2}{n-1}$
ενώ η $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim X^2_{n-1}$

(γ) $n=5$, $N(5,5^2)$ $\quad \bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ άρα $\bar{X}\sim N(5,5^2)$
Αυτό ισχύει για $n\geq 30$ από το Κ.Ο.Θ. εδώ $n=5$
Άρα Λάθος

(δ) Λάθος, Ο Δίπλευρος είναι $H_0:\theta=\theta_0$ vs $H_A:\theta\neq\theta_0$ σε επίπεδο σημαντικότητας a

(ε) Λάθος, η σ.δ.ε η $Z=\dfrac{\hat{P}_1-\hat{P}_2-\delta_0}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$, ισχύει όταν $P_1=P_2$

(στ) Σωστό

(ζ) Λάθος, Η συγκεκριμένη σ.δ.ε χρησιμοποιείται όταν οι διασπορές των πληθυσμών είναι άγνωστες

(η) Λάθος, Στα δ.ε. με σταθερό μέγεθος δείγματος η ακρίβεια του διαστήματος μειώνεται όσο αυξάνει το επίπεδο σημαντικότητας

(θ) Σωστό

(ι) Λάθος, Είναι t_{n-1} άρα t_9

Άσκηση 2

(α) Σωστό το (i)

$$E(Y) = E\left[10(\bar{X}-\mu)\right] = 10E(\bar{X}-\mu) = 10E(\bar{X}) - 10E(\mu)$$

Όμως $n \geq 30$ άρα από το Κ.Ο.Θ $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$= 10 \cdot \mu - 10\mu = 0$$

$$Var(Y) = Var\left[10(\bar{X}-\mu)\right] = 100\, Var(\bar{X}-\mu)$$

$$= 100\, Var(\bar{X}) - 100\, \cancel{Var}(\mu) = 100 \frac{\sigma^2}{n} =$$

$$= 100 \frac{\sigma^2}{100} = \sigma^2$$

Άρα $Y \sim N(0, \sigma)$

(β) Σωστό το → (iii)

(γ) (i) Λάθος αφού για $n \geq 30$ έχουμε Z, ενώ για $n < 30$ έχουμε την t

(ii) Λάθος η ισχύς και το σφάλμα είναι ΙΙ (iii) Σ

(iv) Λάθος, Η τιμή του α αποφασίζεται όταν καθορισθεί η περιοχή απόρριψης. Η τιμή του β εξαρτάται από την εναλλακτική υπόθεση που θα επιλέξουμε

(δ) Σωστό το (i)

(ε) Το συγκεκριμένο Δ.Ε ισχύει όταν

Ο πληθυσμός → κανονικός

- Μέγεθος δείγματος $n_1 < 30$ και $n_2 < 30$
- Διασπορές → άγνωστες και $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = S_p$

Σωστό είναι το (iv)

Άσκηση 3

$n=200 \quad \hat{p}=\frac{8}{200}=0{,}04$ και $\hat{q}=0{,}96$

(α) Επειδή το $n>30$ από τον τύπο (7.25) έχουμε:

$$\hat{p} \pm Z_{a/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n} \quad \text{με } a=0{,}05$$

Άρα $0{,}04 \pm 1.960\sqrt{(0.04)(0.96)/200}$

$= 0.04 \pm 1.960 \cdot 0.0139 = 0.04 \pm 0.0272 = (0.0128, 0.0672)$

Επομένως είμαστε 95 % σίγουροι ότι η αναλογία p των εκτός προδιαγραφών φιαλών είναι μεταξύ 0,0128 και 0,0672. Δηλαδή έχουμε 95 % εμπιστοσύνη ότι το ποσοστό των εκτος προδιαγραφών φιαλών είναι μεταξύ 1,28 % και 6,72 %

(Β) Θέλουμε $d=\frac{0.05}{2}$ από τον τύπο 7.26 έχουμε:

$$n \geq \hat{p}\hat{q}\frac{Z^2_{a/2}}{d^2} = 0{,}04 \cdot 0{,}96 \frac{1{,}645^2}{0{,}025^2}$$

$$= 166{,}26.$$

Δηλαδή θα πρέπει να πάρουμε $n=167$ φιάλες ως δείγμα

(γ) $P_0=0{,}035$, $\hat{p}=0{,}04$ $\quad a=0{,}05$ $\quad n=200$

$H_0: p=0{,}035$ (vs) $H_A: p<0{,}035$

$$Z=\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{P_0 \cdot q_0/n}}$$, όπου $\hat{p}$ είναι η δειγματική αναλογία και $p_0=0{,}035$ και $\hat{p}=0.04$

Άρα $Z = \dfrac{0.04 - 0.035}{\sqrt{(0.035)(1-0,035)/200}} = \dfrac{0.005}{0.013} = 0.38$

Σύμφωνα με τον ορισμό το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας (τιμή P) ισούται με την πιθανότητα να παρατηρήσουμε στην τύχη την σ.σ.ε ίση με 0.38 ή ακόμα πιο ακραία προς την Ho όταν στην πραγματικότητα ισχύει η Ho. Αλλά πιο ακραίες τιμές προς την Ho από την τιμή της Z που παρατηρήσαμε είναι οι τιμές $\{z : Z \leq -0.38\}$

Επομένως $P = P(Z \leq 0,38 / p = 0,035)$

και επειδή κάτω από την Ho είναι $Z \sim N(0,1)$

από τον πίνακα Π1 βρίσκουμε:

$P = P(Z \leq 0,38 / p = 0.035)$

Άρα $P = 0,65$

Για $a = 0.05$ έχουμε $P > a$ ή $0.65 > 0.05$

Άρα δεχόμαστε την Ho

(δ) Minitab (Άσκηση 2 (β,δ) - 2010-2011 Εργασία 3)

$a = 0.08$ $\theta = 1.5\% = 0,015$ 95% (Hypothesized p)

Θα βρούμε την ισχύ του ελέγχου $B(0.015) = 0.2$

$\Pi(\theta) = 1 - B(\theta) \Leftrightarrow \Pi(0,015) = 1 - B(0,015) = 1 - 0,2 = 0.8$

Με το Minitab $n = 325$

Άσκηση 4

(α) Για $n=10$, $P(S^2 > \sigma^2) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{(n-1)\sigma^2}{\sigma^2}\right)$

$= 0,437$ άρα σωστή η (γ)

(β) $P\left(|\bar{X}-\mu| \leq \frac{\sigma}{k}\right) \geq a$ $\quad a=0.97 \quad \frac{\sigma}{k} = 2 \quad N(100, 5^2)$

$\frac{\sigma}{k} = 2 \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{\sigma}{2}}$

Άρα $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\frac{5}{2}}\right) \geq \frac{0,97+1}{2} \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{5}\right) \geq 0.985$

$\Phi(2.17) = 0.985$ άρα $\frac{2\sqrt{n}}{5} \geq 2.17$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{n} \geq 10.85 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 5.425 \Leftrightarrow n \geq 29{,}43$

άρα το (στ)

(γ) $n=4$, $\bar{X} = 487,3$ ml και $s^2 = 36$ ml^2

$a = 0,10$

$\bar{X} + t_{n-1,a} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = \bar{X} + t_{3,0.10}\frac{s}{\sqrt{n}} = 487,3 + 1,638 \cdot \frac{6}{2}$

$= 487.3 + 1,638 \cdot 3 = 487.3 + 4,914 = 492,214$

Άρα το (δ)

(δ) Δύο κανονικούς πληθυσμούς $s_1^2 \neq s_2^2$, $n_1 = n_2 = 6$

$n_1 < 30$ και $n_2 < 30$ και $s_1^2 = 2s_2^2$

άρα $\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{2n-1,a/2}\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{2n-1}}, \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{2n-1,a/2}\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{2n-1}}\right.$

Άρα $v = \dfrac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}} = 9$ άρα σωστή η (γ)

(ε) Όταν μας ενδιαφέρει η σύγκριση διακυμάνσεων δύο πληθυσμών κατασκευάζουμε διάστημα εμπιστοσύνης για τον λόγο σ_2^2/σ_1^2 άρα $(l,u) = (0.396, 10.101)$

Χρησιμοποιούμε ότι: $\dfrac{(n-1)S_2^{*2}}{\sigma_2^2} \equiv \dfrac{nS_2^2}{\sigma_2^2} \sim X^2_{n-1}$

και $\dfrac{(n-1)S_1^{*2}}{\sigma_1^2} \equiv \dfrac{nS_1^2}{\sigma_1^2} \sim X^2_{n-1}$ Αφού τα δείγματα είναι ίδιου μεγέθους

όπου S_2^*, S_1^* είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες

Άρα έχουμε: $\dfrac{\dfrac{S_2^{*2}}{\sigma_2^2}}{\dfrac{S_1^{*2}}{\sigma_1^2}} \equiv \dfrac{\dfrac{nS_2^2}{(n-1)\sigma_2^2}}{\dfrac{nS_1^2}{(n-1)\sigma_1^2}} \sim F_{n-1,n-1}$

Επομένως ένα $100(1-a)\%$ Δ.Ε. για το σ_2^2/σ_1^2 δίνεται από τον τύπο: $\left(F^{-1}_{n-1,n-1,1-a/2}\dfrac{\dfrac{nS_2^2}{n-1}}{\dfrac{nS_1^2}{n-1}}, F^{-1}_{n-1,n-1,a/2}\dfrac{\dfrac{nS_2^2}{n-1}}{\dfrac{nS_1^2}{n-1}}\right)$

$= \left(F^{-1}_{n-1,n-1,a/2}\dfrac{S_2^2}{S_1^2}, F_{n-1,n-1,a/2}\dfrac{S_2^2}{S_1^2}\right) = (0.396, 10.101)$

Άρα $l \cdot u = (S_2^2/S_1^2)^2 = 3{,}999$ άρα σωστή η (β)

(στ) $F_{0.99,10,7} = \dfrac{1}{F_{0.01,7,10}} = \dfrac{1}{5,20} = 0,1923$
άρα το (γ)

(ζ) $n=81$ $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 45$ άρα $\mu = 45$

$\sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} = \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = 45^2$ άρα $\sigma = 45$

Άρα $\bar{X} \sim N\left(45, \dfrac{45}{\sqrt{81}}\right) = N(45, 5)$

Άρα $P(\bar{X} > 50) = P\left(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} > \dfrac{50-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \dfrac{50-45}{5}\right)$

$= P(Z>1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

Άρα σωστό το (δ)

(η) $N(\mu, 0.1^2)$ $a=0.05$ $\sigma=0.1$ $H_0: \mu=\mu_0$ vs $H_A: \mu \neq \mu_0$

$Z = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ Κρίσιμη περιοχή (Απορρίπτω την H_0)
$|Z| > Z_{a/2}$

$\beta(\mu_0 - 0.1) \leq 0.1 \Leftrightarrow 1 - \pi(\mu_0 - 0.1) \leq 0.1 \Leftrightarrow \pi(\overbrace{\mu_0 - 0.1}^{\mu}) \geq 0.90$ άρα $\mu = \mu_0 - 0.1$

$\Leftrightarrow \Phi\left(Z_{a/2} - \dfrac{(\mu_0 - 0.1 - \mu_0)\sqrt{n}}{0.1}\right) \geq 0.90$

$\Leftrightarrow \Phi(Z_{0.025} + \sqrt{n}) \geq 0.90 \Leftrightarrow Z_{0.025} + \sqrt{n} \geq 1.29$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 1.29 - (-1.96) \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 3.25 \Leftrightarrow n \geq 10.56$

Άρα σωστό το (ε)

(θ) $n_1 = n_2 = n = 500$, $a = 0.05$

Μονόπλευρος: $R = \{z < -z_a\}$ ή $R = \{z > z_a\}$ όπου $z_{0.05} = 1.645$

Δίπλευρος: $R = \{|z| > z_{a/2}\}$, όπου $z_{0,025} = 1.960$

Δίπλευρος

$|z| > 1.960$ ισχύει μόνο στο (a)

Μονόπλευρος

$z < -1.645$ ισχύει στο (a) και (β)

Τελικά σωστό είναι το (a)

(ι) $n = 10$, $\bar{X} = 325$, $s = 40$ $\mu = 350$

$H_0: \mu = 350$ (vs) $H_A: \mu \neq 350$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s\sqrt{n}} = \frac{325 - 350}{40\sqrt{10}} = -0.1976$$

Απορρίπτω όταν $|t| > t_{9, a/2}$ τελικά σωστό είναι το (γ)

Άσκηση 5

Ανεξάρτητα

(a) $A \rightarrow n_A = 100$ 28 ελαττωμ. $P_A = \frac{28}{100} = 0.28$

$B \rightarrow n_B = 100$ 20 ελαττωμ. $P_B = \frac{20}{100} = 0.20$

ΔΕ $a = 0.05$

$H_0: P_A = P_B$ (vs) $H_A: P_A \neq P_B$

Η κ.π είναι: $C = \{z : z < -z_{a/2}\} \cup \{z : z > z_{a/2}\}$

$$\hat{p} = \frac{n_1 p_A + n_2 p_B}{n_1 + n_2} = \frac{100 \cdot 0.28 + 100 \cdot 0.20}{100+100} = 0.24$$

$$Z = \frac{p_A - p_B}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.28 - 0.20}{\sqrt{0.24 \cdot 0.76\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} = \frac{0.08}{0.060} = 1,33$$

$$C = \{z : z < -1.960\} \cup \{z : z > 1,960\}$$

Επειδή $-1.960 < 1.33 < 1.960$ η παρατηρούμενη τιμή Z της σ.σ.ε πέφτει έξω από την Κ.Π. Δηλαδή η Z βρίσκεται στην περιοχή αποδοχής της Ho και επομένως δεχόμαστε ότι το ποσοστό των ελαττωματικών εξαρτημάτων των δύο κρατών A και B είναι το ίδιο σε επίπεδο $a = 0.05$

(β) Το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας P επειδή η εναλλακτική υπόθεση είναι δίπλευρη βρίσκεται με διπλασιασμό της τιμής P που αντιστοιχεί σε μονόπλευρη υπόθεση.

Επομένως θα βρούμε το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στη μονόπλευρη υπόθεση $H_A : p < p_0$ και να διπλασιάσουμε την τιμή του

$P_1 = P_1(Z \leq 1,33) = \Phi(1.33) = 0.9082$

Άρα $P = 2P_1 = 2 \cdot (1 - 0,9082) = 0,1836$

Επειδή $a = 0,10$ και $P = 0,1836 > 0.10$

Δεχόμαστε την μηδενική υπόθεση Ho

(γ), (δ) Minitab Από το Minitab $n = 2.394$

Άσκηση 6

(α) Από τα δεδομένα έχουμε $\sum_{i=1}^{16} d_i = 61$ και $\sum_{i=1}^{16} d_i^2 = 1049$

Άρα $\bar{d} = \frac{61}{16} = 3.8125$

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16} d_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{16} d_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{1049 - \frac{61^2}{16}}{15} = \frac{1049 - 232.5625}{15}$$

$= 54.4292$ άρα $\boxed{S_D = 7,3776}$

Το 98 % δ.ε για την μ_D δίνεται από τον τύπο:

$\bar{d} \pm t_{a/2,\, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ με $a = 0.02$ $t_{0.01,15} = 2.602$

Άρα το ΔΕ είναι: $3.8125 \pm 2.602 \frac{7.3776}{\sqrt{16}}$

$= (3.8125 - 4.799,\ 3.8125 + 4.799) = (-0.9865,\ 8.6115)$

Επομένως είμαστε 98% σίγουροι ότι $-0.9865 < \mu_D < 8.6115$ πράγμα που σημαίνει ότι είμαστε περισσότερο από 98% σίγουροι ότι η αρτηριακή πίεση πριν την λήψη δίνει κατά μέσο όρο μεγαλύτερες μετρήσεις από αυτές μετά τη λήψη

Θα κάνουμε τον έλεγχο $H_0: \mu_D = 0$ vs $H_A: \mu_D \neq 0$ για $a = 0.02$

Θα χρησιμοποιήσουμε την σ.σ.ε που δίνεται από τη σχέση 8.17 όπου $\delta_0 = 0$

Η κ.π είναι: $C = \{t : t < -t_{a/2,\, n-1}\} \cup \{t : t > t_{a/2,\, n-1}\}$

$= \{t : t < -t_{0.01,15}\} \cup \{t : t > t_{0.01,15}\}$

$= \{t : t < -2.602\} \cup \{t : t > 2.602\} = \{|t| > 2.602\}$

Η παρατηρούμενη τιμή της σ.σ.ε είναι:

$$t = \frac{\bar{d} - \delta_0}{s_D/\sqrt{n}} = \frac{3.8125}{\frac{7.3776}{\sqrt{16}}} = \frac{3.8125}{1.8444} = 2.067$$

Το $|t| < 2.607$ Άρα σε επίπεδο $a = 0,02$ δεχόμαστε την Ho και επομένως το φάρμακο δεν αλλάζει το μέσο επίπεδο της αρτηριακής πίεσης.

(β) $a = 0.05$

Θα κάνουμε έλεγχο $H_0: \mu_D = 0$ (vs) $H_A: \mu_D \quad 0$

Η Κ.Π είναι $C = \{t : t > t_{a,n-1}\} = \{t : t > t_{0.05,15}\}$
$= \{t : t > 1753\}$

Η παρατηρούμενη τιμή της σ.σ.ε $t = 2.067$

$2.067 > 1,753$ άρα απορρίπτουμε την Ho

(γ) Minitab

(δ) Minitab, $n = \underline{21}$

$\boxed{\text{Άσκηση 7}}$

(α) Από τα δεδομένα μας υπολογίζουμε $\bar{X} = 100.3217$ και $S = 0.8908$

Έχουμε $a = 0.01$, $\mu = 100$ μιλ

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{100,3217 - 100}{\frac{0.8908}{\sqrt{12}}} = \frac{0.3217}{0.2572} = 1.25$$

Ακολουθεί την κατανομή $t_{n-1} \rightarrow t_{11}$

Το $t_{11,0,005} = 3.106$

Ο έλεγχος είναι: $H_0: \mu = 100$ vs $H_A: \mu \neq 100$

Η κρίσιμη περιοχή είναι: $\{t: t < t_{\frac{a}{2}, n-1}\} \cup \{t: t > t_{a/2, n-1}\}$

$= \{t: |t| > t_{\frac{a}{2}, n-1}\} = \{t: |t| > t_{0.005, 11}\}$

$|1.25| < 3.106$

Επομένως δεχόμαστε την H_0.

(Β) 95 % δ.ε

Το $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την τυπική απόκλιση είναι:

$$\left(S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{a}{2}, n-1}}}, S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{a}{2}, n-1}}} \right)$$

Τότε η εκτίμηση του 95% δ.ε για την τυπική απόκλιση του μήκους των αξόνων είναι:

$$\left(0.8908\sqrt{\frac{11}{\chi^2_{0.025, 11}}}, 0.8908\sqrt{\frac{11}{\chi^2_{0.975, 11}}} \right)$$

$$= \left(0.8908\sqrt{\frac{11}{21.920}}, 0.8908\sqrt{\frac{11}{3.816}} \right) = (0.6310, 1.5124)$$

Άρα η πραγματική τυπική απόκλιση του βάρους βρίσκεται στο διάστημα $(0.6310, 1.5124)$ με εμπιστοσύνη 95%

(γ) Minitab

(δ) Minitab, Η ισχύς είναι $\Pi(100,3) = 0{,}0579563$

Άσκηση 8

(a) $a=0.10 \quad a/2=0.05 \quad n_A=10, \; n_B=11$

$$F_{a/2,\, n_A-1,\, n_B-1} = F_{0.05,\, 9,\, 10} = 3.02 \quad \text{και}$$

$$F_{1-\frac{a}{2},\, n_A-1,\, n_B-1} = F_{0.95,\, 9,\, 10} = \frac{1}{F_{0.05,\, 10,\, 9}} = \frac{1}{3.14} = 0.3185$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό τον τύπο διότι τα δείγματα είναι τυχαία και ανεξάρτητα και ότι η κατανομή του βάρους της δραστικής ουσίας στα δισκία του αντιβιοτικού τύπου A και B είναι κανονική.

Άρα το ζητούμενο Δ.Ε είναι:

$$(l, u) = \left(\frac{s_B^2}{s_A^2} \cdot F_{1-a/2,\, n_A-1,\, n_B-1},\; \frac{s_B^2}{s_A^2} \cdot F_{\frac{a}{2},\, n_A-1,\, n_B-1} \right)$$

$$= \left(\frac{2.5^2}{3.2^2} \cdot (0.3185),\; \frac{2.5^2}{3.2^2} \cdot 3.02 \right) = \left(0.6110 \cdot 0.3185,\; 0.6110 \cdot 3.02 \right)$$

$$= (0.1946,\; 1.8452)$$

Επειδή το διάστημα που βρήκαμε περιέχει τη μονάδα δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση $H_0: \sigma_B^2/\sigma_A^2 = 1$ στο $a=0.01$ επίπεδο σημαντικότητας άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$

$2^{ος}$ τρόπος (Έλεγχος Υποθέσεων)

Θα κάνουμε έλεγχο υποθέσεων για $a=0.10$

$H_0: \sigma_B^2 / \sigma_A^2 = 1$ (vs) $H_A: \sigma_B^2 / \sigma_A^2 \neq 1$

Η σ.σ.ε είναι: $F = S_A^2 / S_B^2$ (Σχέση 8.22)

και έχει την κατανομή F_{n_A-1, n_B-1} δηλαδή $F_{9,10}$

κάτω από την H_0. Η Κ.Π με επίπεδο $a=0,10$ είναι:

$$C = \{f: f < F_{1-\frac{a}{2}, n_A-1, n_B-1}\} \cup \{f: f > F_{\frac{a}{2}, n_A-1, n_B-1}\}$$

Δηλαδή $C = \{f: f < F_{0.95, 9, 10}\} \cup \{f: f > F_{0.05, 9.10}\}$

$= \{f: f < 0.3185\} \cup \{f: f > 3.02\}$

Η παρατηρούμενη τιμή της σ.σ.ε είναι:

$$f = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{3.2^2}{2.5^2} = 1.6384$$

Η τιμή πέφτει έξω από την Κ.Π.

Επομένως δεχόμαστε την H_0 και συμπεραίνουμε ότι:
Οι διασπορές του βάρους της δραστικής ουσίας στα δισκία των αντιβιοτικών A και B είναι ίσες

(B) $a = 0.10$

Έχουμε τον εξής έλεγχο: $H_0: \mu_A = \mu_B$ (vs) $H_A: \mu_A \neq \mu_B$
(σελ 103) Περίπτωση $2^{η}$ Κανονικοί πληθυσμοί με άγνωστες διασπορές αλλά ίσες

Η σ.σ.ε δίνεται από τον τύπο (8.15) και ακολουθεί την κατανομή $t_{10+11-2} = t_{19}$ κάτω από την H_0.

Η κ.π είναι το σύνολο

$$C = \{t : t < -t_{\frac{a}{2}, n_A+n_B-2}\} \cup \{t : t > t_{\frac{a}{2}, n_A+n_B-2}\}$$
$$= \{t : t < -t_{0.05, 19}\} \cup \{t : t > t_{0.05,19}\}$$
$$= \{t : t < -1.729\} \cup \{t : t > 1.729\} \text{ ή } |t| > 1.729$$

Η σταθμισμένη δειγματική διασπορά είναι:

$$S_p^2 = \frac{(n_A-1)S_1^2 + (n_B-1)S_2^2}{n_A+n_B-2} = \frac{(10-1)\cdot 3.2^2 + (11-1)\cdot 2.5^2}{10+11-2}$$
$$= \frac{9 \cdot 10,24 + 10 \cdot 6.25}{19} = \frac{92.16 + 62.5}{19} = 8.14$$

Η παρατηρούμενη τιμή της σ.σ.ε είναι:

$$t = \frac{X_A - X_B}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = \frac{241,5 - 245,9}{\sqrt{8.14}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{11}}} = -3.5298$$

Άρα $|t| > 1.729$. Άρα απορρίπτουμε την H_0 και οι μέσες τιμές δεν είναι ίσες. Επομένως συμπεραίνουμε ότι είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι μέσες τιμές του βάρους της δραστικής ουσίας στα δύο αντιβιοτικά διαφέρουν

(γ) Minitab

(δ) Minitab

Άσκηση 9

(α) $Exp \sim \lambda = \frac{1}{200}$, άρα $\mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{200}} \Leftrightarrow \boxed{\mu = 200}$

$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{200}\right)^2} = 200^2$ άρα $\boxed{\sigma = 200}$

Προφανώς οι μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_{64}$ είναι ισόνομες και ανεξάρτητες. Άρα σύμφωνα με το Κ.Ο.Θ. ο συνολικός χρόνος ζωής των ηλ. λυχνιών είναι:

$S_{64} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{64}$ η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 64μ και τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{64}$

Άρα $N(12.800, 1600)$. Άρα η μεταβλητή $\frac{S_{64} - 64\mu}{\sigma\sqrt{64}} \sim N(0,1)$

Θέλω $P(S_{64} > 10.000) = P\left(\frac{S_{64} - 64\mu}{\sigma\sqrt{64}} > \frac{10.000 - 64 \cdot 200}{200\sqrt{64}}\right)$

$= P\left(Z > \frac{-2.800}{1.600}\right) = P(Z > -1.75) = 1 - P(Z < -1.75)$

$= 1 - P(Z > 1.75) = 1 - [1 - P(Z < 1.75)] = 1 - 1 + P(Z < 1.75)$

$= 0.9599$

(Β) Αν συμβολίσουμε με Y τον αριθμό των λυχνιών που έχουν χρόνο μικρότερο από 120h η τ.μ. $Y \sim B(n, p)$ με $n = 64$ και

όπου $p = P(X < 120) = F(120) = 1 - e^{-\frac{1}{200} \cdot 120} = 1 - e^{-0.6} = 0.4512$

Επομένως $E(Y) = n \cdot p = 64 \cdot 0.4512 = 28.8768$ λυχνίες

Ζητάμε την πιθανότητα $P(Y<24)$ η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$P(Y \le 24) = \sum_{i=1}^{24} P(Y=y) = \sum_{i=1}^{24} \binom{64}{y} (0.4512)^{y} (1-0.4512)^{64-y}$$

$= 0.1355$ (Αυτός ο υπολογισμός έγινε με Η/Υ)

Επειδή η παράμετρος $n=64$ της διωνυμικής κατανομής είναι αρκετά μεγάλη μπορούμε να κάνουμε χρήση του Κ.Ο.Θ το οποίο στην συγκεκριμένη περίπτωση οδηγεί στην τυποποιημένη τ.μ.

$$Z = \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} = \frac{Y-np}{\sqrt{npq}} = \frac{Y-28.8768}{\sqrt{64 \cdot 0.4512 \cdot 0.5488}}$$

$$= \frac{Y-28.8768}{\sqrt{15.8476}} = \frac{Y-28.8768}{3.981}$$

Η τελευταία θα ακολουθεί κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή $N(0,1)$ και για την ζητούμενη πιθανότητα έχουμε:

$$P(Y \le 24) = P\left(\frac{Y-28.8768}{3.981} \le \frac{24-28.8768}{3.981}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{-4.8768}{3.981}\right) = P(Z \le -1.225)$$

$$= P(Z \ge 1.225) = 1 - P(Z \le 1.225) = 1 - \Phi(1.225)$$

$$= 1 - 0.8898 = 0.1102$$

Επειδή η Διωνυμική είναι διακριτή κατανομή η ίδια πιθανότητα με χρήση διόρθωσης συνέχειας δίνεται από τον προσεγγιστικό τύπο:

$$P(Y \le 24) = P\left(Z \le \frac{24+0.5-28.8768}{3.981}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{-4.3768}{3.981}\right) = P(Z \le -1{,}1)$$

$$= 1 - P(Z \le 1{,}1) = 1 - \Phi(1.1) = 1 - 0{,}8643$$

$$= 0.1357.$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της διόρθωσης συνέχειας η προσεγγιστική τιμή είναι πολύ πιο κοντά στην ακριβή τιμή 0.1355 που βγάλαμε από τον Η/Υ

(γ) Minitab

(δ) Minitab