ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} \quad .$$

Λύση

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} = 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{16}{9} \cdot 8 - \frac{74}{9}$$

$$= 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{128}{9} - \frac{74}{9} = 94 + \frac{54}{9} = 94 + 6 = 100.$$

Πρόβλημα 2

Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσόν χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.

(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.

(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Λύση

(α) Μετά την αγορά τροφίμων έμειναν στον οικογενειάρχη 1360 ευρώ. Αυτά τα χρήματα αποτελούν το 85% των χρημάτων που του έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή. Άρα το 85% αντιστοιχεί σε ποσόν 1360 ευρώ, οπότε το ποσόν που του έμεινε μετά την αγορά του υπολογιστή είναι

$$1360 \cdot \frac{100}{85} = \frac{16 \cdot 100}{1} = 1600 \text{ ευρώ}.$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

το $(100 - 20)\% = 80\%$ του ποσού που πήρε αντιστοιχούν σε 1600 ευρώ.

Άρα τα χρήματα που πήρε από την τράπεζα είναι:

$$1600 \cdot \frac{100}{80} = 2000 \text{ ευρώ}.$$

(β) Τα τρόφιμα στοίχισαν το 15% των χρημάτων που έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή, δηλαδή

$$1600 \cdot \frac{15}{100} = 240 \text{ ευρώ.}$$

Το ποσό αυτό μπορεί να βρεθεί και με την αφαίρεση: $1600 - 1360 = 240$.
(γ) Ο οικογενειάρχης από τα 2000 ευρώ που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε $2000 - 1360 = 640$ ευρώ, δηλαδή ποσοστιαία επί τις εκατό

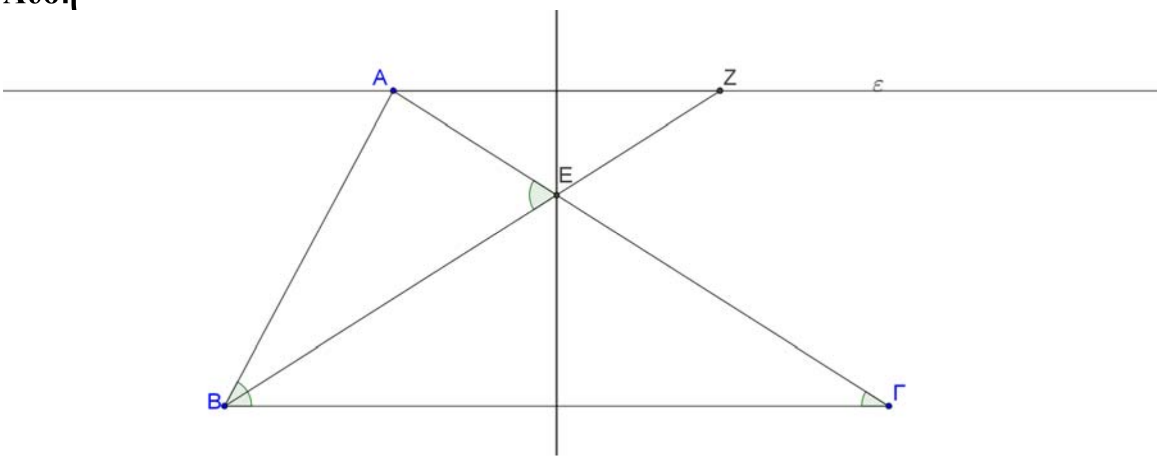
$$\frac{640}{2000} \cdot 100 = \frac{64}{2} = 32.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ε, που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{AZ} = \mathrm{AB}$, **(β)** $\mathrm{A\hat{E}B} = \hat{\mathrm{B}}$.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη της ΒΓ έπεται ότι $\mathrm{EB} = \mathrm{E\Gamma}$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ προκύπτει $\mathrm{E\hat{B}\Gamma} = \hat{\Gamma}$. Επειδή $\mathrm{AZ} \parallel \mathrm{B\Gamma}$ έπεται ότι: $\mathrm{E\hat{B}\Gamma} = \mathrm{A\hat{Z}B}$ (εντός εναλλάξ γωνίες). Από τη σχέση της υπόθεσης $\hat{\mathrm{B}} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$, έχουμε:

$$\mathrm{A\hat{Z}B} = \mathrm{E\hat{B}\Gamma} = \hat{\Gamma} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = \mathrm{A\hat{B}Z}.$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΖ.
(β) Η γωνία $\mathrm{A\hat{E}B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΒΓ, οπότε

$$\mathrm{A\hat{E}B} = \mathrm{E\hat{B}\Gamma} + \hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}}.$$

Πρόβλημα 4

Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω α, β οι δυο φυσικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, Τότε θα είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ και επιπλέον

$$\alpha = 18 \cdot 8 + 5\upsilon \text{ και } \beta = 12 \cdot 9 + \upsilon .$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων)}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$5 \cdot (144 + 5\upsilon) = 7 \cdot (108 + \upsilon) \Leftrightarrow \text{ (από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720 + 25\upsilon = 756 + 7\upsilon \Leftrightarrow 18\upsilon = 36 \Leftrightarrow \upsilon = 2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha = 154 \text{ και } \beta = 110 .$$

2ος τρόπος.

Έχουμε: $\alpha = 18 \cdot 8 + \upsilon_1$, με $\upsilon_1 = 0,1,2,...,17$ και $\beta = 12 \cdot 9 + \upsilon_2$, με $\upsilon_2 = 0,1,2,...,11$.

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα $\upsilon_1 = 5\upsilon_2$ είναι τα :

$$(\upsilon_1, \upsilon_2) = \{(0,0), (5,1), (10,2), (15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος $(10,2)$ μας δίνει $\alpha = 154$ και $\beta = 110$ και το κλάσμα $\frac{154}{110}$ που είναι ισοδύναμο με το $\frac{7}{5}$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

Λύση

Έχουμε: $4 < 5$, οπότε $\sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5}$. Είναι

$2,1^2 = 4,41$, $2,2^2 = 4,84$ και $2,3^2 = 5,29$, οπότε η ζητούμενη τιμή του α είναι $\alpha = 2,2$.

Με αντικατάσταση βρίσκουμε: $\mathrm{A} = 2$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta} .$$

Λύση

Έχουμε $-4 < 1 - 2\beta < 5 \Leftrightarrow -5 < -2\beta < 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{2} < \frac{-2\beta}{-2} < \frac{-5}{-2} \Leftrightarrow -2 < \beta < \frac{5}{2}$. Επειδή ο β είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\beta = 1$ ή $\beta = 2$.

- Για $\beta = 1$ η ανίσωση γίνεται: $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < x \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < x \Leftrightarrow x > 1.$
- Για $\beta = 2$ η ανίσωση γίνεται:
  $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow 0 \cdot x < -1$, η οποία είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\chi O\psi$ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45^0 και επίσης διέρχεται από το σημείο $M(2,-6)$. Το σημείο A ανήκει στον άξονα $\chi'\chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο B ανήκει στον άξονα $\psi'\psi$ και στην ευθεία (ε).

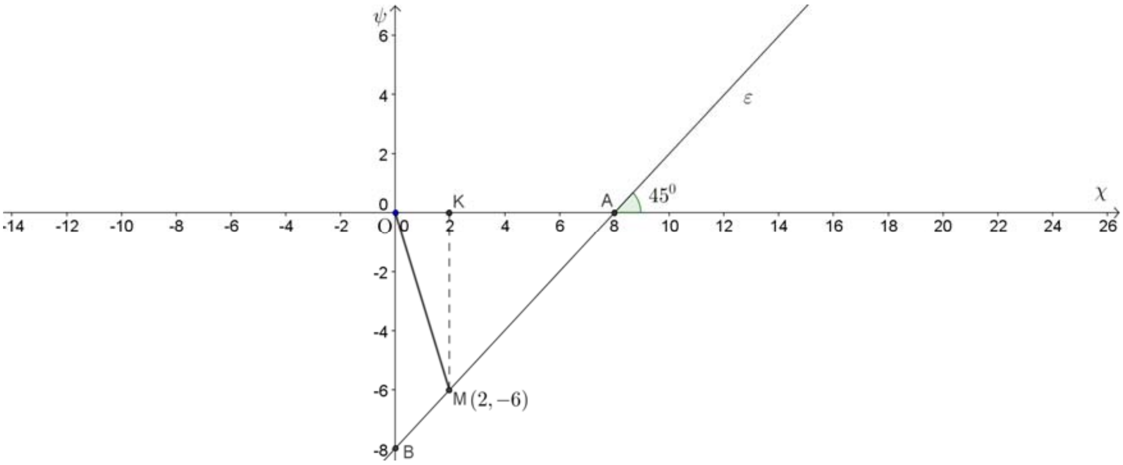
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A , B και το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAM.

Λύση

α) Η ζητούμενη εξίσωση έχει τη μορφή $\psi = \alpha\chi + \beta$, όπου $\alpha = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$. Επειδή η ευθεία περνάει από το σημείο $M(2,-6)$ έχουμε ότι $-6 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -8$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι : $\psi = \chi - 8$



Σχήμα 2

β) Τα σημεία τομής με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ είναι τα $A(8,0)$ και $B(0,-8)$. Άρα έχουμε

$$(OAB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32 \text{ τετρ. μονάδες}$$

γ) Αν Κ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2,0)$, τότε το τρίγωνο ΚΜΑ είναι ορθογώνιο στο Κ και οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη $KM = 6$ και $KA = 6$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε

$$AM = \sqrt{KM^2 + KA^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Ομοίως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAB λαμβάνουμε:

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}.$$

Επειδή τα τρίγωνα OAM και OAB έχουν κοινό ύψος από την κορυφή O, έστω υ, έχουμε:

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

19/10/2013

Πρόβλημα 1ο

$\sqrt{5} = 2{,}23$ $\qquad A = 3(3\cdot 2{,}2 - 4{,}6) - 2(2{,}2 - 0{,}2)$

Αφού $2{,}1^2 = 4{,}41$

$2{,}2^2 = 4{,}84$ $\qquad = 3\cdot(6{,}6 - 4{,}6) - 2\cdot 2$

$2{,}3^2 = 5{,}29$

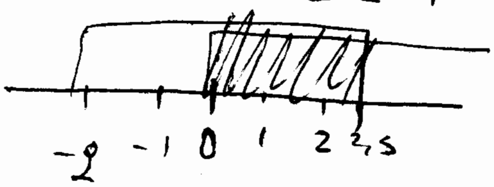
Άρα $\boxed{a = 2{,}2}$ $\qquad = 3\cdot 2 - 4 = 2$

Πρόβλημα 2ο

$B \in \mathbb{N}$ $\qquad -4 < 1 - 2B < 5 \iff -4 - 1 < -2B < 5 - 1$

$\iff -5 < -2B < 4 \implies -\frac{4}{2} < B < \frac{5}{2} \iff -2 < B < 2{,}5$

και $B > 0$



$B = 1$ ή $B = 2$

Για $B = 1$

$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < x \iff 2x + 2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} < x$

$\iff 4x + 4 - 3x - 3 < 2x \iff x + 1 < 2x \iff -x < -1$

$\iff \boxed{x > 1}$

Για $B = 2$

$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{2} \iff 4(x+1) - 3(x+1) < x$

$\iff 4x + 4 - 3x - 3 < x \iff 0x < -1$ αδύνατη

Πρόβλημα 3ο

(α) $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$ Άρα $y = x + \beta$

ε: $y = x + \beta$ $\quad M(\overset{x}{2}, \overset{y}{-6})$

$-6 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -8$

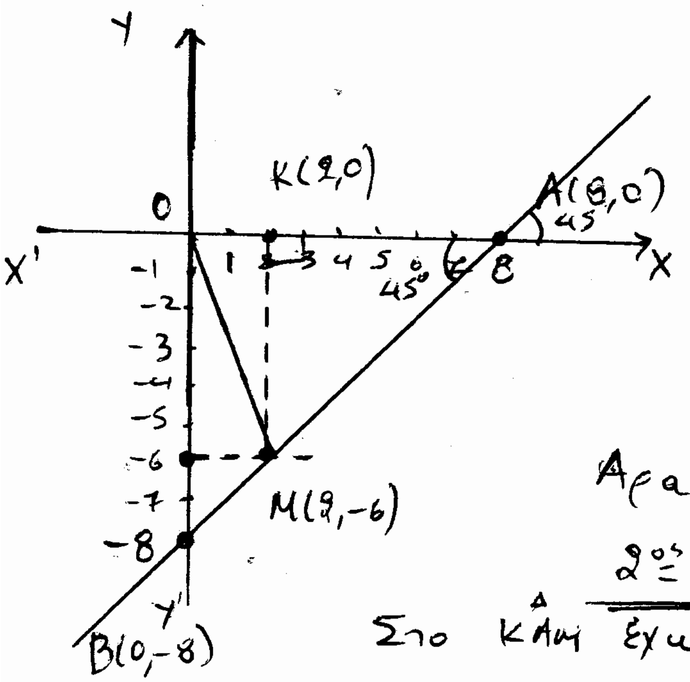
Άρα ε: $y = x - 8$

(β) Το $A(x, 0)$ και $A \in \varepsilon$ άρα

$0 = x - 8 \Leftrightarrow \boxed{x = 8}$ Άρα $A(8, 0)$

Όμοια $B(0, y)$ και $B \in \varepsilon$ άρα

$y = 0 - 8 \Leftrightarrow \boxed{y = -8}$ άρα $B(0, -8)$



$E_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$ τμ

(γ) $KM^2 = (2-2)^2 + (-6-0)^2 = 36$

$\Leftrightarrow \boxed{KM = 6}$

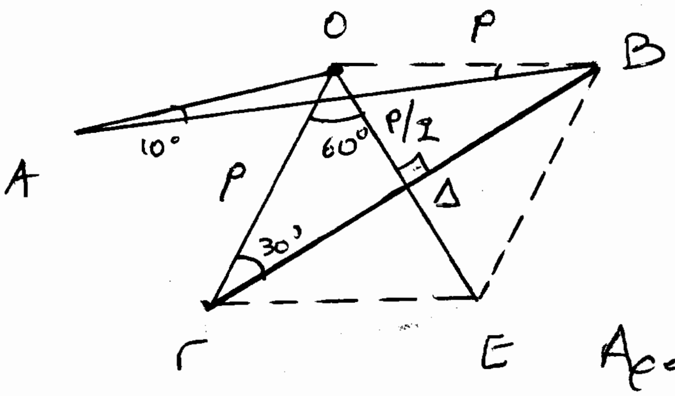
Άρα $E_{OAM} = \frac{1}{2} OA \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ τμ

<u>2ος τρόπος</u>

Στο $K\hat{A}M$ έχω $\varepsilon\varphi 45^\circ = \frac{KM}{KA} \Rightarrow KM = 1 \cdot KA = 6$

άρα $\boxed{KM = 6}$

Πρόβλημα 4ο



(α) $OA = OB = \rho$

Άρα το $\overset{\triangle}{OAB}$ είναι ισοσκελές και $O\hat{B}A = 10^\circ$

$OB = O\Gamma = \rho$

Άρα το $\overset{\triangle}{OB\Gamma}$ είναι ισοσκελές και $O\hat{B}\Gamma = 30^\circ$

Άρα $A\hat{B}\Gamma = O\hat{B}\Gamma - O\hat{B}A$

$\Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma = 30^\circ - 10^\circ \Leftrightarrow \boxed{A\hat{B}\Gamma = 20^\circ}$

Επομένως $\overset{\frown}{A\Gamma} = 40^\circ$, αφού η $A\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$

(β) Παρατηρούμε ότι το O είναι σημείο της μεσοκαθέτου

(i) OE άρα $\boxed{OB = O\Gamma}$ (αφού κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του)

Όμοια το E σημείο της μεσοκαθέτου OE άρα $\boxed{\Gamma E = BE}$

Η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Η $O\Gamma = OE = \rho$ άρα το $\overset{\triangle}{O\Gamma E}$ είναι ισοσκελές όμως $\Gamma\hat{O}E = 60^\circ$ άρα $\overset{\triangle}{O\Gamma E}$ είναι <u>ισόπλευρο</u>

Άρα $O\Gamma = \Gamma E$. Τελικά $O\Gamma = OB = \Gamma E = BE$

Άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος

(ii) Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{O\Gamma\Delta}$ έχουμε: $\eta\mu 30^\circ = \dfrac{O\Delta}{O\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{O\Delta}{\rho}$

$\Leftrightarrow O\Delta = \dfrac{\rho}{2}$ και $\eta\mu 60^\circ = \dfrac{\Gamma\Delta}{O\Gamma} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\rho} \Leftrightarrow 2\Gamma\Delta = \rho\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \Gamma\Delta = \dfrac{\rho\sqrt{3}}{2}$ Άρα $\Gamma B = \rho\sqrt{3}$

$E_{\overset{\triangle}{O\Gamma B}} = \dfrac{1}{2}\Gamma B \cdot O\Delta = \dfrac{1}{2}\rho\sqrt{3}\cdot\dfrac{\rho}{2} = \dfrac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$

Άρα $\boxed{E_{OBE\Gamma} = \dfrac{\rho^2\sqrt{3}}{2}}$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right).$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)=\frac{88}{5}\cdot\frac{5}{44}-\frac{39}{5}\cdot\frac{5}{39}=2-1=1.$$

Πρόβλημα 2
Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}.$$

Λύση
Είναι $\mathrm{MK\Delta}(12,30,54)=6$. Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6 και από αυτούς πρώτοι είναι οι 2 και 3. Άρα έχουμε $\kappa=2$ ή $\kappa=3$.

Για $\kappa=2$ έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2-\frac{2}{2}}{2-\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{3-2}{2}}{2}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{1}=\dfrac{8}{3}.$

Για $\kappa = 3$ ο διαιρέτης $\dfrac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$ της παράστασης Β γίνεται $\dfrac{\frac{3-3}{2}}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$, ενώ ο διαιρετέος γίνεται $\dfrac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{1}{5} \neq 0$, οπότε η παράσταση Β δεν ορίζεται.

Πρόβλημα 3

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Λύση

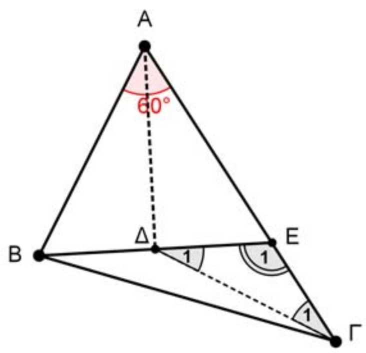
(α) Κατά την πώληση του λαδιού οι κρατήσεις είναι $2,5 \cdot \dfrac{6}{100} = 0,15$ ευρώ, οπότε η καθαρή τιμή πώλησης είναι $2,5 - 0,15 = 2,35$ ευρώ. Τα έξοδα του παραγωγού είναι $1050 + 407 = 1457$ ευρώ, οπότε ο παραγωγός πρέπει να πωλήσει $1457 : 2,35 = 620$ κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει $800 \cdot \dfrac{8}{100} = 64$ κιλά λάδι, οπότε θα μείνουν στον παραγωγό $800 - (620 + 64) = 116$ κιλά λάδι.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 60^\circ$ και $\mathrm{A\Gamma} = \dfrac{3}{2} \cdot \mathrm{AB}$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE} = \mathrm{AB}$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Λύση



Σχήμα 1

Για συντομία, θα συμβολίσουμε με α το μήκος του τμήματος AB, δηλαδή: $\text{AB}=\alpha$.
Εφόσον $\text{A}\Gamma=\frac{3}{2}\text{AB}=\frac{3}{2}\alpha$ και $\text{AE}=\text{AB}=\alpha$, έχουμε:

$$\text{E}\Gamma=\text{A}\Gamma-\text{AE}=\frac{3}{2}\alpha-\alpha=\frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($\text{AB}=\text{AE}$) και η γωνία του $\hat{\text{A}}$ είναι 60^{o}, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του $\text{A}\Delta$ είναι και διάμεσος.
Άρα είναι $\Delta\text{E}=\frac{\alpha}{2}$ και το τρίγωνο $\Delta\text{E}\Gamma$ είναι ισοσκελές, αφού $\text{E}\Gamma=\text{E}\Gamma=\frac{\alpha}{2}$.
Η γωνία $\hat{\text{E}}_1$ είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου ABE. Άρα έχουμε

$$\hat{\text{E}}_1=180^\circ-\text{A}\hat{\text{E}}\text{B}=180^\circ-60^\circ=120^\circ,$$

οπότε : $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_1=\dfrac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^{o}$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\text{K}=\frac{x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}}{3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}},\ \text{αν είναι } x=2^{-10}, y=4^{-8}, z=8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση
Έχουμε:

$$x=2^{-10}, y=4^{-8}=\left(2^2\right)^{-8}=2^{-16}, z=8^{-6}=\left(2^3\right)^{-6}=2^{-18}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned}\text{A}=x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}&=\left(2^{-10}\right)^2\cdot\left(2^{-16}\right)^4\cdot\left(2^{-18}\right)^6\cdot 2^{182}\\&=2^{-20}\cdot 2^{-64}\cdot 2^{-108}\cdot 2^{182}=2^{-10}.\end{aligned}$$

Ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned}\Pi&=3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}=3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+2^4\cdot 3^6\right)^{-1}=3\cdot\left[2^2\cdot 3^3\left(13+2^2\cdot 3^3\right)\right]^{-1}\\&=3\cdot\left(2^2\cdot 3^3\cdot 121\right)^{-1}=3\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-3}\cdot 121^{-1}=2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 11^{-2}.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\text{K}=\frac{2^{-10}}{2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 121^{-1}}=\frac{3^2\cdot 121}{2^8}=\frac{3^2\cdot 11^2}{2^8}=\left(\frac{33}{2^4}\right)^2=\left(\frac{33}{16}\right)^2.$$

Πρόβλημα 2
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x-5\alpha+2<\alpha\left(x-3\right)+2\left(\alpha-1\right).$$

Λύση
Ο αριθμός 3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4\cdot 3-5\alpha+2<\alpha(3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow 12-5\alpha+2<2\alpha-2\Leftrightarrow 16<7\alpha\Leftrightarrow \alpha>\frac{16}{7}.$$

Ο αριθμός -3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

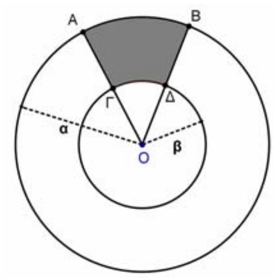
$$4\cdot(-3)-5\alpha+2<\alpha(-3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow -12-5\alpha+2<-6\alpha+2\alpha-2$$

$$\Leftrightarrow -8<\alpha\Leftrightarrow \alpha>-8.$$

Επομένως οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης , όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις $\alpha>\frac{16}{7}$ και $\alpha>-8$, δηλαδή όταν $\alpha>\frac{16}{7}$.

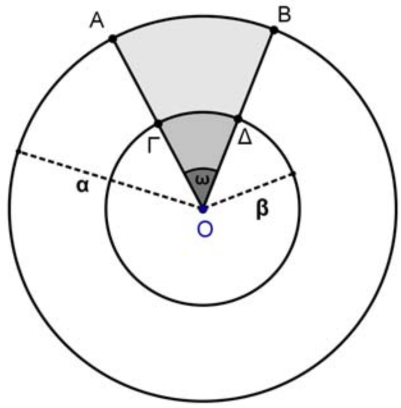
Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega=\mathrm{A\hat{O}B}$ και την τιμή της παράστασης:



$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$

Λύση



Σχήμα 2

Το εμβαδόν του χωρίου ΑΒΔΓ ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων $\left(\mathrm{O},\widehat{\mathrm{AB}}\right)$ και $\left(\mathrm{O},\widehat{\Gamma\Delta}\right)$, δηλαδή είναι

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta\Gamma})=\pi\alpha^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}-\pi\beta^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\omega}{2}.$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, ισούται με $\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)=\pi(\alpha^2-\beta^2)$, οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta\Gamma})}{\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{(\alpha^2-\beta^2)\omega}{2\pi(\alpha^2-\beta^2)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}.$$

Επειδή είναι $\eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 2\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, έχουμε

$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3 = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}.$$

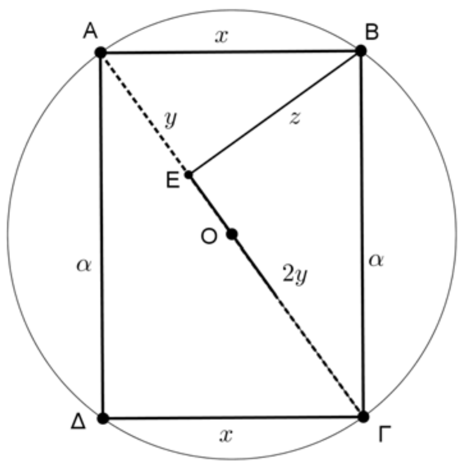
Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{A\Delta} = \alpha$ cm και $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Delta}$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $\mathrm{E\Gamma} = 2\cdot \mathrm{AE}$, να βρείτε:

(i) το μήκος της πλευράς ΑΒ

(ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Λύση



Σχήμα 3

(i) Έστω $\mathrm{AB} = \Gamma\Delta = x$, $\mathrm{AE} = y$, $\mathrm{E\Gamma} = 2y$ και $\mathrm{BZ} = z$.

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα ΑΒΕ έχουμε:

$$x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2. \quad (1)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα ΒΓΕ έχουμε:

$$\alpha^2 = 4y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = \alpha^2 - 4y^2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha^2 - 4y^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = \alpha^2 - 3y^2 \quad (3)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$9y^2 = x^2 + \alpha^2 \Rightarrow x^2 = 9y^2 - \alpha^2. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$9y^2 - \alpha^2 = \alpha^2 - 3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{\alpha^2}{6} \Rightarrow y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6},$$

οπότε λαμβάνουμε και

$$x^2 = \alpha^2 - 3\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \alpha^2 - 3\cdot\frac{\alpha^2}{6} = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) Διάμετρος του κύκλου είναι η $\mathrm{A\Gamma} = 3y$, οπότε η ακτίνα του είναι $R = \frac{3}{2}y = \frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$. Το εμβαδό του κύκλου είναι $E = \pi R^2 = \pi\cdot\frac{6\alpha^2}{16} = \frac{3\pi\alpha^2}{8}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right)$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)$$
$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι $\nu=2$ ή $\nu=5$.

- Για $\nu=2$,έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{2-\frac{1}{5}}:\dfrac{2-\frac{2}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{9}{5}}:\dfrac{2-1}{9}=\dfrac{10}{9}:\dfrac{1}{9}=\dfrac{10}{9}\cdot 9=10$.
- Για $\nu=5$, έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{5-\frac{1}{5}}:\dfrac{5-\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{24}{5}}:\dfrac{\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{10}{24}:\dfrac{5}{18}=\dfrac{10}{24}\cdot\dfrac{18}{5}=\dfrac{180}{120}=\dfrac{3}{2}$.

Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{9}=\frac{\gamma}{11}=\omega$, οπότε θα είναι $\alpha=3\omega$, $\beta=9\omega$ και $\gamma=11\omega$. Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma-\alpha=56 \Leftrightarrow 11\omega-3\omega=56 \Leftrightarrow 8\omega=56 \Leftrightarrow \omega=7\,.$$

Άρα είναι: $\alpha=3\cdot 7=21$, $\beta=9\cdot 7=63$ και $\gamma=11\cdot 7=77$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε}=90^\circ$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\text{Ε}\hat{\Delta}\text{Ζ}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{\text{Β}}-\hat{\Gamma}=20^0$.

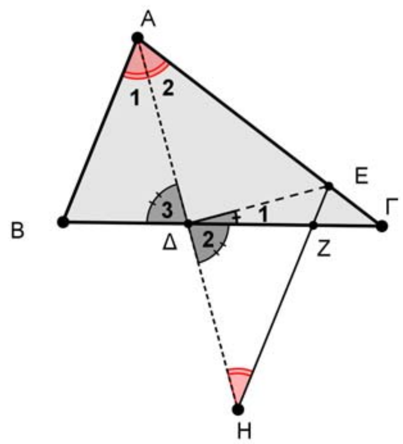
Λύση

1. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Α}}$, θα ισχύει: $\hat{\text{Α}}_1=\hat{\text{Α}}_2=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}$.

Από την παραλληλία των ΑΒ και ΖΗ, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\text{Α}}_1=\hat{\text{Η}}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{\text{Α}}_2=\hat{\text{Η}}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, οπότε η διάμεσος ΕΔ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, δηλαδή θα είναι $\text{ΕΔ}\perp\text{ΑΗ}$ και $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε}=90^\circ$



Σχήμα 1

2. Επειδή $\Gamma\hat{\Delta}\text{Ε}=\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε}=90^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{\text{Ε}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\hat{\Delta}_3\,.$$

Η $\hat{\Delta}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_3=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}+\hat{\Gamma}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{\text{Ε}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\frac{\hat{\text{Α}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}+\frac{\hat{\text{Β}}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\frac{\hat{\text{Α}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\text{Β}}-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{20^\circ}{2}=10^\circ\,.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Λύση

Έχουμε:

$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^2$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^2$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2$.

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2}$$

$$= \left(2 \cdot 10^{6-4}\right)^{-2} = \left(2 \cdot 10^2\right)^{-2} = \frac{1}{\left(2 \cdot 10^2\right)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^4} = \frac{1}{4 \cdot 10000} = \frac{1}{40000}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x.$$

Λύση

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \le 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \le 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \le 8 \Leftrightarrow x \le 3.$$

$$\frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2} - \frac{6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x-6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \le 8 \cdot x \Leftrightarrow x - 6 - (2x-9) \le 8x$$

$$\Leftrightarrow x - 6 - 2x + 9 \le 8x \Leftrightarrow 3 \le 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν $\frac{1}{3} \le x \le 3$, οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1,2 και 3.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ.

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Λύση

(α) Επειδή είναι $(\varepsilon)\,||\,(\delta)$, οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση $3\lambda-1=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=1$. Έτσι η εξίσωση της ευθείας (ε) γίνεται $y=2x+2\mu$. Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$ ανήκει στην ευθεία (ε), οπότε θα ισχύει: $8=2\cdot 2+2\mu \Leftrightarrow 2\mu=4 \Leftrightarrow \mu=2$. Άρα έχουμε:

$$\lambda=1,\ \mu=2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon):\ y=2x+4.$$

(β) Επειδή ισχύουν $2\cdot(-4)+4=-4$ και $2\cdot(-1)+4=2$, τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε), οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας (ε). Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου Μ από τα σημεία Κ και Λ είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

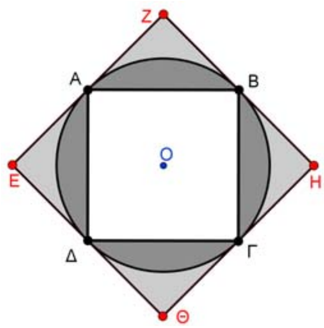
$$\mathrm{MK}=\sqrt{(2+1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

$$\mathrm{M\Lambda}=\sqrt{(-4+1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}<\dfrac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi=3{,}1415$).

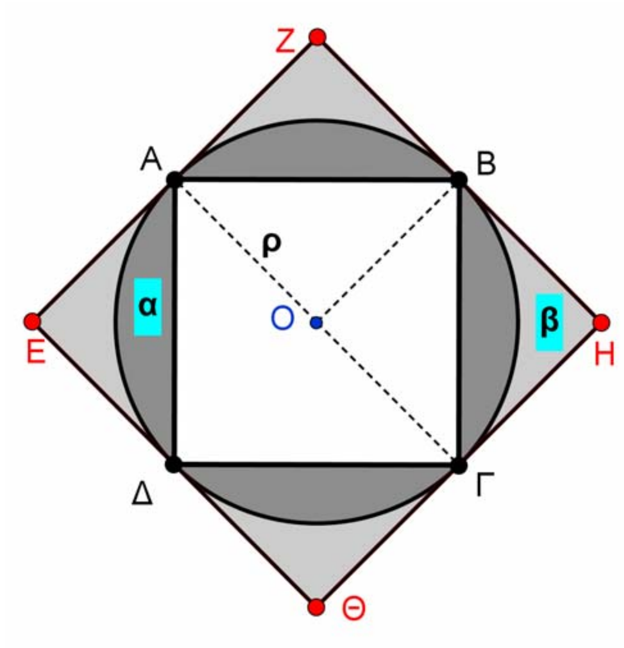
Λύση

1. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ, $\mathrm{OA}\perp\mathrm{EZ}$ και $\mathrm{OB}\perp\mathrm{ZH}$, έπεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΖΒ είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AB}^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=2\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\rho\sqrt{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $2\rho^2$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$, οπότε το άθροισμα Σ_1, θα είναι:

$$\Sigma_1=\pi\rho^2-2\rho^2=(\pi-2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι $OA \perp EZ$ και $O\Gamma \perp H\Theta$, έπεται ότι η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου $C(O,\rho)$. Άρα το τετράπλευρο $A\Gamma HZ$ είναι ορθογώνιο, οπότε $ZH = 2\rho$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ είναι ίσο με $4\rho^2$. Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4-\pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi-2)\rho^2}{(4-\pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi-2) < 4(4-\pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3,1428...., \text{ που ισχύει.}$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{ \begin{array}{c} (x-10)(x^2-7x+10)=0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} + \dfrac{2x-1}{5} < \dfrac{x(x+1)}{2} \end{array} \right\}$$

Λύση

Έχουμε

$$(x-10)(x^2-7x+10)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x=10 \text{ ή } x^2-7x+10=0.$$

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$, έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με $\alpha=1,\ \beta=-7,$ $\gamma=10$, οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=2$ ή $x=5$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έστω $x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο A, του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5 = 9 - 4\cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 = 9 - 8 + 32 = 33.$$
$$y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2 = 4\cdot 25 - 64 + 7\cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

(β) Για την εύρεση του A αρκεί να βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών x, y. Επειδή είναι $\text{ΜΚΔ}(33,99) = 33$, έπεται ότι θα είναι $A = 33$.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

Λύση

Με τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης των δεδομένων ακέραιων με τον μικρότερό τους, βρίσκουμε το ΜΚΔ των αριθμών 16, 32 και 248. Έχουμε

$$\begin{array}{ccc} 16 & 32 & 248 \\ 16 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{array},$$

οπότε είναι $\beta = \text{ΜΚΔ}(16, 32, 248) = 8$.

Από την υπόθεση έχουμε: $\alpha = 8\cdot 6 + \upsilon = 48 + \upsilon$, όπου υ ακέραιος με δυνατές τιμές από 0 μέχρι και 7. Δοκιμάζοντας τις δυνατές τιμές του υ στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι μόνο για $\upsilon = 1$, ο αριθμός $\alpha = 49$ που προκύπτει, είναι πολλαπλάσιο του 7.

Άρα έχουμε $\alpha = 49$ και $\beta = 8$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{I}\hat{\Delta}\Gamma = 70^0$ και $\mathrm{I}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 130^0$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Delta$ και $\mathrm{E}\hat{\mathrm{I}}\Gamma$.

Λύση

α. Εφόσον $\mathrm{I}\Delta // \mathrm{AB}$ θα ισχύει: $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Delta}_1 = 70^o$,(ως εντός εκτός επί τα αυτά των παραλλήλων $\mathrm{I}\Delta, \mathrm{AB}$ τεμνομένων από την $\mathrm{B}\Delta$).

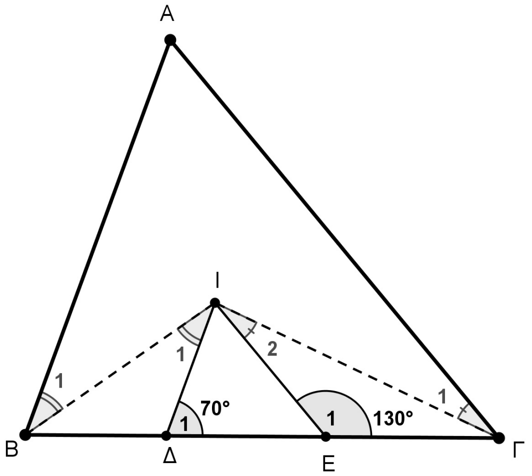
Επειδή είναι $\mathrm{IE} // \mathrm{A}\Gamma$, θα ισχύει: $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{E}}_1 = 180^o - 130^o = 50^o$. (Οι γωνίες $\hat{\Gamma}, \hat{\mathrm{E}}_1$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $\mathrm{IE}, \mathrm{A}\Gamma$ τεμνομένων από την $\mathrm{E}\Gamma$).

Οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}, \hat{\Gamma}$ είναι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε θα ισχύει:

$$\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\mathrm{A}} = 180^o - \hat{\mathrm{B}} - \hat{\Gamma} = 180^o - 70^o - 50^o = 60^o.$$

β. Επειδή η $\mathrm{I}\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{B}}_1 = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = \frac{70^o}{2} = 35^o$.

Επίσης, επειδή $\mathrm{I}\Delta // \mathrm{AB}$, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{I}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1 = 35^o$, γιατί οι γωνίες $\hat{\mathrm{I}}_1, \hat{\mathrm{B}}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $\mathrm{I}\Delta, \mathrm{AB}$ που τέμνονται από την ΙΒ.



Σχήμα 1

Εφόσον ΙΓ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, θα ισχύει: $\hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{50^o}{2} = 25^o$.

Επίσης είναι $\mathrm{IE} // \mathrm{A}\Gamma$, οπότε θα ισχύει: $\hat{\mathrm{I}}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 25^o$, αφού οι γωνίες $\hat{\mathrm{I}}_2, \hat{\Gamma}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $\mathrm{IE}, \mathrm{A}\Gamma$ που τέμνονται από την ΙΓ.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Λύση

α. Επειδή θεωρούμε ότι τα 120+80=200 ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων είναι της ιδίας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδενδρο είναι 2600:200=13 κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν $120 \cdot 13 = 1560$ κιλά λάδι.

Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $1560 \cdot \frac{10}{100} = 156$ κιλά λάδι.

β. Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδενδρα του κτήματος του αγρότη παράγουν x κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει $x \cdot \frac{150}{100} = \frac{3x}{2}$ κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80 \cdot x + 120 \cdot \frac{3x}{2} = 2600 \Leftrightarrow 80x + 180x = 2600 \Leftrightarrow 260x = 2600 \Leftrightarrow x = \frac{2600}{260} = 10.$$

Επομένως τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$ κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά $120 \cdot 15 = 1800$ κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει $1800 \cdot \frac{10}{100} = 180$ κιλά λάδι.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αν $x+y=3\cdot(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A=7x+10y-3w-87$.

Λύση

Έχουμε $x+y=3\cdot(-2)^2=3\cdot4=12$ και

$$y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-24}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^{24}.$$

$$=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\right]^{24}=1^{24}=1.$$

Άρα είναι:

$$A=7x+10y-3w-87=7x+7y+3y-3w-87$$

$$=7(x+y)+3(y-w)-87=7\cdot12+3\cdot1-87=84+3-87=0.$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,
(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

Λύση

Έστω $\overline{xyzw}=1000\cdot x+100\cdot y+10\cdot z+w$ ο ζητούμενος τετραψήφιος φυσικός αριθμός. Τότε, σύμφωνα με το **(α)** θα είναι $w=0$ ή 4 ή 8, οπότε σύμφωνα με το **(β)** θα είναι $z=0$ ή 2 ή 4, αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με το **(γ)** θα είναι $y=1$ ή 5.

Έτσι οι δυνατές μορφές του αριθμού είναι:

$$\overline{x100},\ \overline{x124},\ \overline{x148},\ \overline{x500},\ \overline{x524},\ \overline{x548}.$$

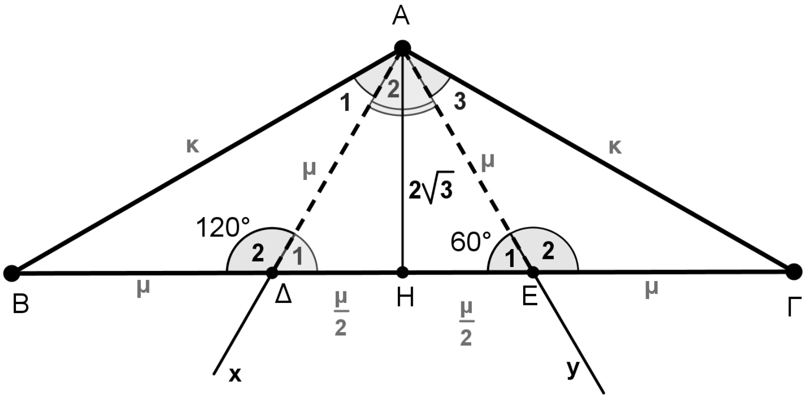
Λαμβάνοντας υπόψη και το (δ) καταλήγουμε στους αριθμούς $4500, 4524, 4548$, αφού το πρώτο ψηφίο τετραψήφιου φυσικού αριθμού δεν μπορεί να είναι το 0.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=120^0$. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες Ax και Ay κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα, που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε , αντίστοιχα. Αν $A\hat{\Delta}B=120^0$, $A\hat{E}\Delta=60^0$ και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

Λύση

α. Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\Delta}_2 = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 120^{o}$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 = 60^{o}$. Από τα δεδομένα όμως έχουμε ότι $\hat{\mathrm{E}}_1 = 60^{o}$. Άρα το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$ είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 2

β. Εφόσον οι ημιευθείες $\mathrm{A\Delta}$ (Ax) και AE (Ay) είναι κάθετες προς τις ΑΓ και ΑΒ, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma - 90^\circ = 120^0 - 90^\circ = 30^{o}$.

Τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$ και $\mathrm{A\Gamma E}$ έχουν: $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$ (από το ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$), $\hat{\Delta}_2 = \hat{\mathrm{E}}_2 = 120^{o}$ και $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = 30^{o}$. Επομένως τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$, $\mathrm{A\Gamma E}$ είναι ίσα και συνεπώς $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από τα ορθογώνια τρίγωνα AEB και $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ που έχουν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 60^\circ = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 30^0$, δηλαδή $\mathrm{AB\Gamma}$ ισοσκελές.

γ. Έστω μ το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου $\mathrm{A\Delta E}$ και κ το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AH\Delta}$ έχουμε:

$$\mathrm{A\Delta}^2 = \mathrm{AH}^2 + \Delta\mathrm{H}^2 \text{ δηλαδή } \mu^2 = \frac{\mu^2}{4} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3\mu^2}{4} = 12 \Leftrightarrow \mu = 4.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο AHB έχουμε:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2, \text{ δηλαδή } \kappa^2 = \left(\frac{3\mu}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \kappa^2 = 48 \Leftrightarrow \kappa = 4\sqrt{3}.$$

Η περίμετρος του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $12 + 8\sqrt{3}$.

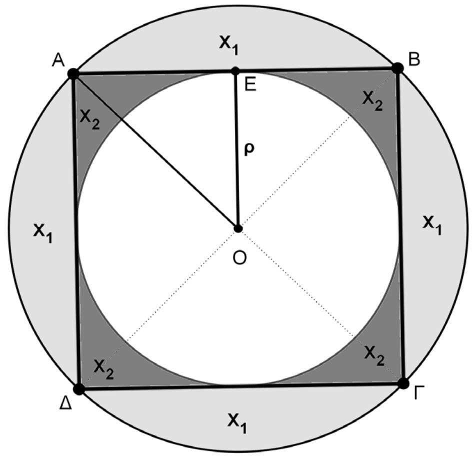
Η περίμετρος του τριγώνου $\mathrm{A\Delta E}$ είναι 12, οπότε ο λόγος του θα είναι $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ. Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $\mathrm{C}(\mathrm{O},\mathrm{OA})$ που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $\mathrm{C}(\mathrm{O},\rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ που ορίζεται από τους κύκλους $\mathrm{C}(\mathrm{O},\rho)$ και $\mathrm{C}(\mathrm{O},\mathrm{OA})$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)$ των χωρίων X_1 και X_2, αντίστοιχα έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O,x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O,\rho,OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΕ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος λαμβάνουμε $OA^2 = \rho^2 + \rho^2 \Leftrightarrow OA^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow OA = \rho\sqrt{2}$, οπότε είναι

$$E\left(\Delta(O,\rho,OA)\right) = \pi\left(\rho\sqrt{2}\right)^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2.$$

(β) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 προκύπτει από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας $\rho\sqrt{2}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ.

Άρα είναι

$$E(X_1) = \pi\left(\rho\sqrt{2}\right)^2 - (2\rho)^2 = 2\pi\rho^2 - 4\rho^2 = (2\pi - 4)\rho^2.$$

Το εμβαδόν του χωρίου X_2 προκύπτει από το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κυκλικό δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας ρ, δηλαδή

$$E(X_2) = (2\rho)^2 - \pi\rho^2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4 - \pi)\rho^2.$$

Άρα είναι $\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi}$ και ισχύει ότι:

$$\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi} > \frac{13}{5} \Leftrightarrow 5(2\pi - 4) > 13(4 - \pi) \Leftrightarrow 23\pi > 72 \Leftrightarrow \pi > \frac{72}{23} \cong 3{,}1304,$$

το οποίο είναι αληθές, αφού είναι $\pi \cong 3{,}14$.

(γ) Θα πρέπει να είναι $\rho < x < \rho\sqrt{2}$ και τα εμβαδά των δύο κυκλικών δακτύλιων που ορίζονται να είναι ίσα, δηλαδή

$$\pi\left[\left(\rho\sqrt{2}\right)^2 - x^2\right] = \pi\left(x^2 - \rho^2\right) \Leftrightarrow 2\rho^2 - x^2 = x^2 - \rho^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 3\rho^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3\rho^2}{2} \Leftrightarrow x = \rho\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$70^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Λύση.
Είναι

$$a = 4 - 2\frac{1}{5} = \frac{4}{1} - \frac{11}{5} = \frac{20}{5} - \frac{11}{5} = \frac{9}{5} \text{ και } b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2} = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5 - \frac{8}{2} = 5 - 4 = 1,$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a} = \frac{9}{5} : 1^{2009} - 1 - \frac{1}{5 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{9}{5} : 1 - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{76}{45} - 1 = \frac{31}{45}.$$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α, αν είναι περιττός μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Λύση

(i) Οι δυνατές μορφές του ακέραιου αριθμού α είναι οι εξής:
α = 4ρ, όπου ρ θετικός ακέραιος, ή α = 4ρ + 1 ή α = 4ρ + 2 ή α = 4ρ + 3 όπου ρ μη αρνητικός ακέραιος.

(ii) Σύμφωνα με την υπόθεση είναι α = 4ρ + 1, οπότε έχουμε:

$$39 < 4\rho + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\rho < 49 \Leftrightarrow 9,5 < \rho < 12,25$$

Επομένως, αφού ο ρ είναι μη αρνητικός ακέραιος, έπεται ότι ρ = 10 ή ρ = 11 ή ρ = 12 και α = 41 ή α = 45 ή α=49.

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^0 και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του ΒΓ.

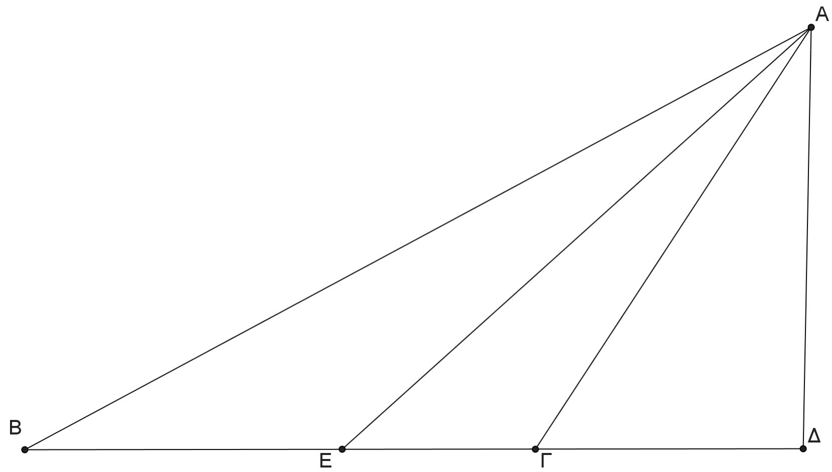
Λύση

α) Κατ' αρχή έχουμε: $\hat{A} = 180^0 - \left(\hat{B} + \hat{\Gamma}\right) = 180^0 - 140^0 = 40^0$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε: $\dfrac{\hat{B}}{1} = \dfrac{\hat{\Gamma}}{6}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 140^0$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \lambda \Rightarrow \hat{B} = \lambda, \hat{\Gamma} = 6\lambda \text{ και } \lambda + 6\lambda = 140^0 \Rightarrow \lambda = 20^0.$$

Άρα είναι: $\hat{B} = 20^0$ και $\hat{\Gamma} = 120^0$.



Σχήμα 1

β) Έστω ΑΔ το ύψος και ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ, αφού διαφορετικά το τρίγωνο ΑΓΔ θα είχε άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των 180^0. Έτσι έχουμε:

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = \left(90^\circ - \Delta\hat{\Gamma}A\right) + \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\hat{A} = 40^0$, $\Delta\hat{\Gamma}A = 180^0 - 120^0 = 60^0$, από τη σχέση (1) λαμβάνουμε $\Delta\hat{A}E = 50^0$.

ΘΕΜΑ 4^o

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\dfrac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\dfrac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\dfrac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Λύση (1^{ος} τρόπος)

α) Έχουμε $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{23}{40}$. Όμως στα $\frac{23}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου έχουν υπολογιστεί δύο φορές οι 12 μαθητές που ασχολούνται με μπάσκετ και βόλεϊ. Άρα οι 80 -12=68 μαθητές είναι τα $\frac{40}{40}-\frac{23}{40}=\frac{17}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου. Έτσι όλο το σχολείο έχει :

$$68:\frac{17}{40}=68\cdot\frac{40}{17}=4\cdot 40=160 \text{ μαθητές.}$$

β) Μόνο με το μπάσκετ ασχολούνται $160\cdot\frac{1}{5}-12=32-12=20$ μαθητές.

2^{ος} τρόπος

α) Αν x είναι ο αριθμός των μαθητών του Σχολείου, τότε , σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{8}+80-12=x,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$10x+8x+5x+3200-480=40x \Leftrightarrow 17x=2720 \Leftrightarrow x=160.$$

β) $\frac{x}{5}-12=\frac{160}{5}-12=20$ μαθητές ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}.$$

Λύση

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)}{5}-7\cdot\frac{\left[(-1)^{3}\right]^{\nu}}{5}$$

$$=4\cdot(-1)^{\nu}-\frac{2}{5}-\frac{7\cdot(-1)^{\nu}}{5}=\left(4-\frac{7}{5}\right)\cdot(-1)^{\nu}-\frac{2}{5}=\frac{13\cdot(-1)^{\nu}-2}{5},$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν ν άρτιος, τότε $\mathrm{A}=\frac{13-2}{5}=\frac{11}{5}$.
- Αν ν περιττός, τότε $\mathrm{A}=-3$.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α.

Λύση

Αφού ο α διαιρούμενος με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2, θα είναι της μορφής $\alpha = 5\lambda + 2$, όπου λ μη αρνητικός ακέραιος. Όμως, αν ο λ ήταν άρτιος, τότε ο α επίσης θα ήταν άρτιος, που αντίκειται στην υπόθεση. Άρα ο λ είναι περιττός, δηλαδή είναι $\lambda = 2\kappa + 1$, όπου κ μη αρνητικός ακέραιος.

Επομένως, έχουμε

$$\alpha = 5 \cdot (2\kappa + 1) + 2 = 10\kappa + 7,$$

σχέση που δείχνει ότι ο θετικός ακέραιος α διαιρούμενος με το 10 αφήνει υπόλοιπο 7, δηλαδή με άλλα λόγια, το τελευταίο ψηφίο του α είναι 7. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο α έχει κ δεκάδες και 7 μονάδες, οπότε το τελευταίο του ψηφίο είναι 7.

ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$

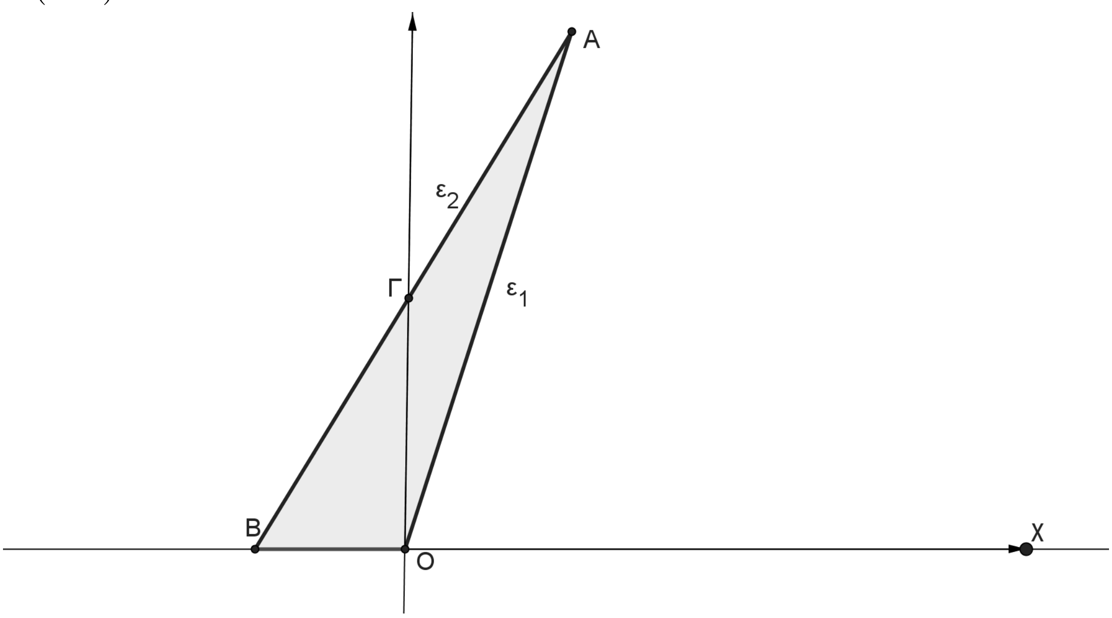
Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4 , ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο Γ(0,6).

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy, Α το κοινό σημείο των ευθειών και Β το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $y = 4x$, ενώ η ευθεία ε_2 έχει εξίσωση $y = 2x + \beta$, αφού είναι παράλληλη με την (η). Όμως διέρχεται από το σημείο Β(0,6), οπότε θα ισχύει $6 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε_2 είναι $y = 2x + 6$. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών βρίσκουμε ότι το κοινό σημείο τους είναι το $\mathrm{A}(3,12)$.



Σχήμα 2

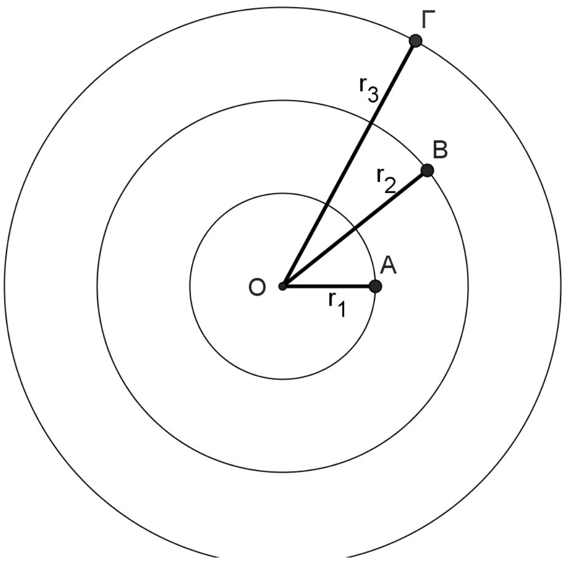
β) Η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $\mathrm{B}(-3,0)$, οπότε η τη βάση του τριγώνου έχει μήκος 3, ενώ το ύψος του ίσο με 12. Άρα έχουμε:

$$\text{E(OAB)} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 12 = 18 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_1, r_2 και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_2, r_3. Αν είναι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)}$, όπου $\mathrm{E}(\Delta_1)$ και $\mathrm{E}(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των δακτυλίων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε

$$\frac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)} = \frac{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right)} = \frac{\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + r_1\right)}{\left(r_3 - r_2\right)\left(r_3 + r_2\right)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2}, \qquad (1)$$

αφού δίνεται ότι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$. Από την ίδια σχέση προκύπτει ότι $r_2 = \dfrac{r_1 + r_3}{2}$, οπότε, λόγω τη σχέσης $r_3 = 3r_1$ λαμβάνουμε $r_2 = \dfrac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$. Έτσι η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2} = \frac{3r_1}{3r_1 + 2r_1} = \frac{3r_1}{5r_1} = \frac{3}{5}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να βρούμε πρώτα τη σχέση $r_2 = \dfrac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$ και στη συνέχεια να εργαστούμε με το λόγο

$$\frac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)} = \frac{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right)} = \frac{\pi\left[\left(2r_1\right)^2 - r_1^2\right]}{\pi\left[\left(3r_1\right)^2 - \left(2r_1\right)^2\right]} = \frac{3r_1^2}{5r_1^2} = \frac{3}{5}.$$

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Λύση

$$\mathrm{A} = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4 = \left(4 \cdot 25\right)^2 + 502 + \left(27 - 25\right) \cdot 249 - 10^4$$

$$= 100^2 + 502 + 2 \cdot 249 - 10000 = 10000 + 502 + 498 - 10000 = 1000$$

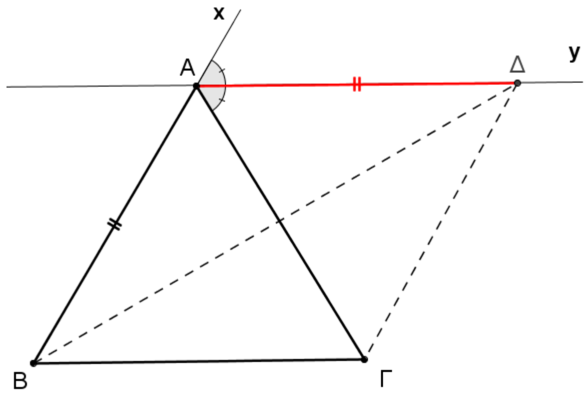
2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία $\mathrm{A}y$ είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$.

Δίνεται ακόμη ότι

$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 62^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Επειδή η $\mathrm{A}y$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$ θα είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{A}}x$. Όμως είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta + \Delta\hat{\mathrm{A}}x = 180^0 - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - 62^0 = 118^0$, οπότε καθεμία από τις γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Delta\hat{\mathrm{A}}x$ είναι 59°.

Επειδή είναι $\mathrm{A}y \parallel \mathrm{B}\Gamma$ έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$\hat{\mathrm{B}} = \Delta\hat{\mathrm{A}}x = 59^0 \text{ και } \hat{\Gamma} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = 59^0.$$

(β) Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ. έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}. \qquad (1)$$

Λόγω της παραλληλίας των ευθειών ΒΓ και $\mathrm{A}y$ έχουμε ότι

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma,$$

οπότε η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.

3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει: $\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστα σης

$$\mathrm{A} = \alpha + 5(4+\alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 \ .$$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4} \Leftrightarrow \frac{42}{10} < \frac{42}{\alpha} < \frac{42}{8} \Leftrightarrow 8 < \alpha < 10,$$

οπότε θα είναι $\alpha = 9$, αφού α θετικός ακέραιος. Άρα είναι:

$$\mathrm{A} = 9 + 5(4+9) + 3(9-4) + 1919 = 9 + 5\cdot 13 + 3\cdot 5 + 1919 = 2008 .$$

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Λύση

Αν είναι A_1 ο αριθμός των αγοριών που συμμετέχουν στην παρέλαση, τότε ο A_1 είναι πολλαπλάσιο του 3 και επιπλέον έχουμε

$$\left\{\begin{matrix} \mathrm{A}_1 = \pi o\lambda.5 + 3 \\ \mathrm{A}_1 = \pi o\lambda.7 + 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{A}_1 - 3 = \pi o\lambda.5 \\ \mathrm{A}_1 - 3 = \pi o\lambda.7 \end{matrix}\right\},$$

οπότε ο αριθμός $\mathrm{A}_1 - 3$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 7. Τότε ο αριθμός $\mathrm{A}_1 - 3$ θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,7)=35, δηλαδή θα είναι ένας από του αριθμούς

35, 70, 105, 140,...,

Επομένως ο αριθμός A_1 θα είναι κάποιος από τους αριθμούς

38, 73, 108, 143,....

Αν Α είναι ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου, τότε από την υπόθεση είναι

$$100 < \mathrm{A} < 200 \Rightarrow \frac{60}{100}\cdot 100 < \frac{60}{100}\cdot \mathrm{A} < \frac{60}{100}\cdot 100 \Rightarrow 60 < \mathrm{A}_1 < 120,$$

οπότε οι αποδεκτές τιμές για τον αριθμό A_1 είναι οι 73 και 108. Επειδή ο αριθμός A_1 είναι και πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι $\mathrm{A}_1 = 108$, οπότε ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου είναι:

$$\mathrm{A} = 108\cdot\frac{100}{60} = 180.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα κορίτσια που συμμετείχαν στην παρέλαση ήταν $2\cdot 108 = 216$, οπότε ο αριθμός Κ των κοριτσιών του Γυμνασίου είναι:

$$\mathrm{K} = 216\cdot\frac{100}{80} = 270 .$$

Άρα συνολικά το Γυμνάσιο έχει 180+270=450 μαθητές και μαθήτριες.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0},\quad \mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}$$

Αν είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, να προσδιορίσετε την τιμή του x.

Λύση

Επειδή $1-\left(-1\right)^{2009}=1-\left(-1\right)=2\neq 0$ έχουμε $\left[1-\left(-1\right)^{2009}\right]^0=1$, οπότε:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0}=\frac{3^4}{2^4}\cdot 2^4-3^4+x=x.$$

Επίσης έχουμε

$$\mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}=\frac{\left(4+1\right)^2}{5}+\frac{x}{2}=5+\frac{x}{2}.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}\Leftrightarrow x=5+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2x=10+x\Leftrightarrow x=10.$$

2. Το σημείο $\mathrm{A}(-\lambda+2,4\lambda-1))$, όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος *λ,*

(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ,

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ , όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α προς τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αντίστοιχα.

Λύση

(α) Σύμφωνα με τις υποθέσεις πρέπει να συναληθεύουν οι ανισότητες:

$$-\lambda+2>0 \text{ και } 4\lambda-1>0\Leftrightarrow \lambda<2 \text{ και } \lambda>\frac{1}{4},$$

από τις οποίες, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\lambda=1$.

(β) Για $\lambda=1$ είναι $\mathrm{A}\left(1,3\right)$, οπότε

$$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}.$$

(γ)

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{OAB\Gamma}\right)=1\cdot 3=3$$

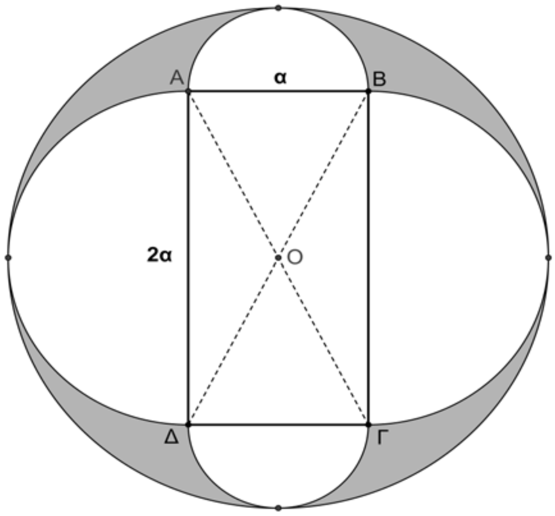
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$, $\mathrm{A\Delta}=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Λύση

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $\frac{3\alpha}{2}$, τα μικρά ημικύκλια έχουν ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ και τα μεγάλα ημικύκλια έχουν ακτίνα α.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει από το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου $\pi\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 = \frac{9\pi\alpha^2}{4}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που είναι $2\alpha^2$, τα εμβαδά των δύο μικρών ημικυκλίων $2\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{4}$ και τα εμβαδά των δύο μεγάλων ημικυκλίων



Σχήμα 2

$2\cdot\frac{1}{2}\pi\alpha^2 = \pi\alpha^2$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\text{E} = \frac{9\pi\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{4} - \pi\alpha^2 - 2\alpha^2 = \frac{4\pi\alpha^2 - 8\alpha^2}{4} = (\pi-2)\alpha^2 .$$

4. Αν ισχύει $\frac{45^\nu\cdot 2^{2\nu}}{6^\nu} = 900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\text{A} = 2003\cdot(-1)^\nu - (-1)^{\nu+1} + 4\cdot(-1)^{\nu+2} .$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{45^\nu.2^{2\nu}}{6^\nu} = 900 \Leftrightarrow \frac{45^\nu\cdot 4^\nu}{6^\nu} \Leftrightarrow \left(\frac{45\cdot 4}{6}\right)^\nu = 900 \Leftrightarrow 30^\nu = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2 .$$

$$\Leftrightarrow 30^\nu = (2\cdot 3\cdot 5)^2 \Leftrightarrow 30^\nu = 30^2 \Leftrightarrow 30^{\nu-2} = 1,$$

από την οποία προκύπτει ότι $\nu - 2 = 0 \Leftrightarrow \nu = 2$, αφού για κάθε άλλη τιμή του $\nu - 2$ η τιμή της δύναμης $30^{\nu-2}$ δεν μπορεί να είναι 1.

Άρα έχουμε:

$$\text{A} = 2003\cdot(-1)^2 - (-1)^{2+1} + 4(-1)^{2+2} = 2003\cdot 1 - (-1) + 4\cdot 1 = 2003 + 1 + 4 = 2008..$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
$68^{ου}$ ΘΑΛΗΣ
24 Νοεμβρίου 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $\mathrm{A}=\left(200:8+12\cdot 100\right)+\left[200:\left(8+2\right)+762\right]\cdot\left[\left(-1\right)^{13}+\left(-1\right)^{12}+\left(-1\right)^{2007}\right]^2$

$$=\left(25+1200\right)+\left(200:10+762\right)\cdot\left[\left(-1\right)+1+\left(-1\right)\right]^2$$
$$=1225+\left(20+762\right)\cdot\left(-1\right)^2$$
$$=1225+782\cdot 1=2007.$$

2. Αν ω είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου, τότε ο ω είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 6, 8 και 10. Επειδή $\text{ΕΚΠ}\left[6,8,10\right]=120$, έπεται ότι $\omega\in\left\{120,240,360,480,...\right\}$ και αφού $300<\omega<400$, θα είναι $\omega=360$.

Αν x,y,z είναι ο αριθμός των μαθητών της Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης, αντίστοιχα, τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\lambda \text{ και } x+y+z=360.$$

Άρα είναι

$$x=5\lambda, y=4\lambda, z=3\lambda$$
$$\text{και } 5\lambda+4\lambda+3\lambda=360 \Leftrightarrow 12\lambda=360 \Leftrightarrow \lambda=30.$$

Άρα είναι: $x=5\cdot 30=150,\ y=4\cdot 30=120,\ z=3\cdot 30=90.$

3. Ο έμπορος πλήρωσε για την αγορά $200\cdot 3=600$ ευρώ.

Η απώλεια του σε κιλά ήταν $200\cdot\frac{10}{100}=20$ κιλά, οπότε του έμειναν

$$200-20=180 \text{ κιλά.}$$

Για να έχει κέρδος 20% επί της τιμής αγοράς πρέπει να εισπράξει

$$600+600\cdot\frac{20}{100}=720 \text{ ευρώ.}$$

Άρα πρέπει να πουλήσει το κιλό $720:180=4$ ευρώ.

4. **(α)** Αν $x=\text{ΒΓ}$, $y=\text{ΑΔ}$ και $\text{ΑΕ}=\upsilon$, τότε $x=2y$ και

$$\frac{\left(x+y\right)\upsilon}{2}=\text{Ε}=\left(\text{ΑΒΓΔ}\right)\Leftrightarrow 3y\cdot\upsilon=2\text{Ε}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=\frac{2\text{Ε}}{3}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=200cm^2.$$

Άρα έχουμε

$$\text{Ε}\left(\text{ΑΒΔ}\right)=\frac{1}{2}y\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\cdot 200cm^2=100cm^2.$$

(β) $\left(\text{ΑΒΚΓ}\right)=2\left(\text{ΑΒΓ}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot\upsilon=2\left(y\cdot\upsilon\right)=2\cdot 200=400cm^2.$

Διαφορετικά

Το τετράπλευρο ΑΒΚΓ έχει καθέτους διαγώνιους, οπότε έχει εμβαδόν

$$\left(\mathrm{AB K \Gamma}\right)=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Gamma}\cdot \mathrm{AK}=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot 2\upsilon=2\left(y\cdot\upsilon\right)=2\cdot 200=400cm^2.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $$\mathrm{A}=-\left[(-2)^8:(-4)^2+(-4)^2\right]:(-2)^4=-\left[2^8:4^2+4^2\right]:2^4$$
$$=-\left[2^8:\left(2^2\right)^2+4^2\right]:2^4=-\left(2^8:2^4+4^2\right):2^4$$
$$=-\left(2^4+4^2\right):2^4=-32:16=-2.$$
$$\mathrm{B}=-(x-3)-3(y-4)-\left[x(y-2)-y(x+3)\right]$$
$$=-x+3-3y+12-(xy-2x-yx-3y)$$
$$=-x-3y+15-xy+2x+xy+3y=x+15.$$
$$\mathrm{A}>\mathrm{B}\Leftrightarrow -2>x+15\Leftrightarrow -x>17\Leftrightarrow x<-17.$$

2. (α) $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}x=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΒΓ και ε).
Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$. Όμως, από την παραλληλία των ευθειών ε και ΒΓ προκύπτει ότι $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\hat{\Gamma}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=40^\circ$ προκύπτει ότι
$$\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-\hat{\mathrm{A}}}{2}=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ.$$
Άρα έχουμε
$$\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\hat{\Gamma}=70^\circ,$$
οπότε θα είναι
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma=180^\circ-2\cdot 70^\circ=40^\circ$$
$$\Rightarrow \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}x=40^\circ.$$
(β) Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ, το τρίγωνο ΚΑΓ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΚΓ, οπότε η ΚΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΚΓ. Άρα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}=\Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}.$$
Επειδή είναι $\varepsilon \parallel \mathrm{B}\Gamma$ θα έχουμε
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K}=\Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z},$$
οπότε θα είναι και
$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K},$$
οπότε το τρίγωνο ΚΑΖ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΑΖ .

3. (α) Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών έπεται ότι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των ψηφίων των μονάδων τους. Θεωρώντας τα τετράγωνα των μονοψήφιων φυσικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι αυτά λήγουν σε 0, 1, 4, 5, 6, 9, οπότε το τελευταίο ψηφίο κάθε τετραγώνου φυσικού αριθμού ανήκει στο σύνολο $\Sigma=\{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα θα πρέπει $b\in\{0,1,4,5,6,9\}$ και αφού ο αριθμός είναι περιττός πρέπει $b\in\{1,5,9\}$.

Επειδή ο Α διαιρείται με το 9 πρέπει να ισχύει ότι:
$$3a+2b=\text{πολλαπλάσιο του } 9. \qquad (1)$$

- Για $b=1$ λαμβάνουμε $3a+2=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=5$ λαμβάνουμε $3a+10=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=9$ λαμβάνουμε $3a+18=\pi o\lambda.9$, οπότε προκύπτει ότι $a\in\{3,6,9\}$. Άρα είναι $\mathrm{A}=33399$ ή $\mathrm{A}=66699$ ή $\mathrm{A}=99999$.

4. **(α)** Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=2\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R=\mathrm{B}\Gamma=\alpha$. Επιπλέον $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$.

Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=2\cdot75^\circ=150^\circ$, οπότε θα έχουμε

$$E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{OAE\Gamma}\right)=\pi\alpha^2\cdot\frac{150^\circ}{360^\circ}=\frac{5\pi\alpha^2}{12}.$$

(β) Επειδή είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\hat{\Gamma}=75^\circ$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΓ) και $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=90^\circ-\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=90^\circ-\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=75^\circ$, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(γ) Επειδή είναι $\mathrm{OA}\perp\mathrm{A}\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta\parallel\mathrm{B}\Gamma$ θα είναι και $\mathrm{OA}\perp\mathrm{B}\Gamma$, οπότε η ΟΑ περνάει από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το τρίγωνο ΟΜΓ έχουμε

$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{O}\Gamma^2-\mathrm{M}\Gamma^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\frac{3\alpha^2}{4}\Leftrightarrow\mathrm{OM}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι $\mathrm{AM}=\mathrm{AO}+\mathrm{OM}=\alpha\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\left(\alpha+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\alpha^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Λύσεις Β΄ Γυμνασίου

1. Εκτελούμε τις πράξεις και βρίσκουμε

$$A=(111-144:12):11+1=(111-12):11+1=99:11+1=9+1=10$$

2. Επειδή ο 100 λήγει σε 0 και τα πολλαπλάσια του 10 λήγουν σε 0, θα πρέπει και ο αριθμός που εκφράζει τα νομίσματα των 2€ να λήγει σε 0. Άρα τα νομίσματα των 2€ θα είναι 5 ή 10 ή 15. Όμως παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να είναι 5 ή 15. Άρα θα είναι 10 . Πράγματι

$$10\cdot 2+8\cdot 10=100.$$

3. Έχουμε:

$$\frac{6}{100}\alpha=\frac{4}{100}\beta \;\; o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \;\alpha=\frac{2}{3}\beta$$

. Έτσι έχουμε

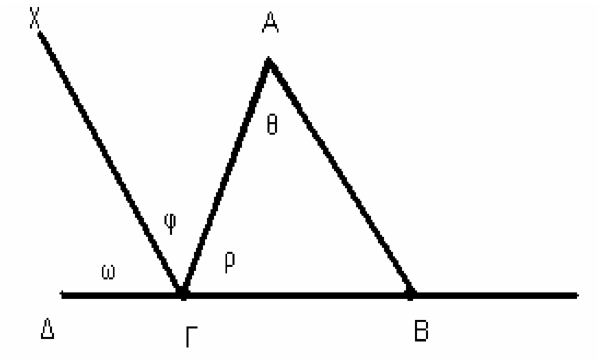
$$\kappa=\frac{9\cdot\frac{2}{3}\beta-3\beta}{6\cdot\frac{2}{3}\beta-\beta}=\frac{6\beta-3\beta}{4\beta-\beta}=\frac{3\beta}{3\beta}=1$$

4. Αφού η Γx είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$ θα ισχύει $\omega=\phi$. Επειδή Γx//ΑΒ θα ισχύει $\phi=\theta$ και αφού

ΑΒ=ΒΓ θα είναι $\theta = \rho$. Άρα $\omega = \phi = \theta = \rho$, και

$\omega + \phi + \rho = 180^0$, οπότε $\omega = \phi = \rho = 60^0$

Άρα $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^0$.



Λύσεις Γ΄ Γυμνασίου

1. Έχουμε

$$\Delta\hat{\Gamma}E = A\hat{\Gamma}B = 180^0 - 3x - 4x = 180^0 - 7x$$

$$\Delta\hat{E}\Gamma = H\hat{E}Z = 180^0 - 2x - 6x = 180^0 - 8x$$

Έτσι, έχουμε, στο τρίγωνο ΓΔΕ:

$\Delta\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{E}\Gamma + \hat{\Delta} = 180^0$ οπότε

$180^0 - 7x + 180^0 - 8x + 5x = 180^0 \Leftrightarrow 10x = 180^0 \Leftrightarrow x = 18^0$.

2. $A = \alpha^2 \cdot (-2\beta)^2 \cdot (-\frac{\gamma}{2})^2 = \alpha^2 \cdot 4\beta^2 \cdot \frac{\gamma^2}{4} = \alpha^2\beta^2\gamma^2 =$

$= (\alpha\beta\gamma)^2 = 10^2 = 100.$

3. Έστω $A=27p+1$. Για p=2 έχουμε $A=27\cdot 2+1=55=5\cdot 11$, ενώ για p≠2 ο 27p είναι περιττός οπότε ο Α είναι άρτιος.

4. Αν υπήρχαν τέτοιοι αριθμοί τότε

$$\left(\frac{3}{2}a\beta^{-1}+\frac{10}{3}a^{-1}\beta\right)^2=9$$, οπότε

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2+10=9$$ οπότε

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2=9-10=-1,\ \textit{που δεν ισχύει.}$$

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Α΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω ότι α,β,γ,δ,ε είναι οι αριθμοί των μαθητών των πέντε αυτών τμημάτων. Έτσι έχουμε:

$$10(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=1090\Rightarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=109 \quad (1)$$

Έστω ότι οι αριθμοί των μαθητών των τμημάτων αυτών είναι ανά δύο διαφορετικοί και έστω ότι:

$\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$. Επειδή $\alpha\geq 20$ και α,β,γ,δ,ε φυσικοί έχουμε:

$$\beta>\alpha\geq 20\Rightarrow\beta>20\Rightarrow\beta\geq 21$$

$$\gamma>\beta\geq 21\Rightarrow\gamma>21\Rightarrow\gamma\geq 22$$

$$\delta>\gamma\geq 22\Rightarrow\delta>22\Rightarrow\delta\geq 23$$

$$\varepsilon>\delta\geq 23\Rightarrow\varepsilon>23\Rightarrow\varepsilon\geq 24$$