μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι $\text{ΕΒ} = \text{ΓΕ} = R$, οπότε το τετράπλευρο ΟΒΕΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες , δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε $\text{ΟΔ} = \text{ΟΓ} \cdot \eta\mu 30^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$, οπότε $(\text{ΟΒΕΓ}) = R \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2}{2}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \text{και } (\Sigma_2)\ \left\{\begin{array}{l} \alpha x + \beta y \ \ = 4 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -8 \end{array}\right\}$$

έχουν την ίδια λύση (x, y), να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{x} = \varphi$ και $\frac{1}{y} = \omega$, το σύστημα (Σ_1) γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi + \omega = \dfrac{1}{4} \\ 3\varphi + 4\omega = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi = \dfrac{1}{4} - \omega \\ 3\left(\dfrac{1}{4} - \omega\right) + 4\omega = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi = \dfrac{1}{4} - \omega \\ \omega = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi = \dfrac{1}{2} \\ \omega = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right\},$$

οπότε το σύστημα (Σ_1) έχει τη λύση: $(x, y) = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\omega}\right) = (2, -4)$.

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα (Σ_2), οπότε θα έχουμε;

$$\left\{\begin{array}{l} 2\alpha - 4\beta \ \ = 4 \\ 4\alpha - 12\beta = -8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha - 2\beta \ \ = 2 \\ \alpha - 3\beta = -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha - 2\beta \ \ = 2 \\ -\beta = -4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha \ \ = 10 \\ \ \beta = 4 \end{array}\right\}.$$

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z = 2(x + y) \qquad \text{και} \qquad z = 3(x - y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y < x < z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) για την οποία: $x^2 + y^2 + z^2 = 680$.

Λύση

(α) Επειδή $z = 3(x - y) > 0 \Rightarrow x - y > 0$, έπεται ότι $x > y$.

Επίσης από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$z = 2(x + y) = 3(x - y) \Leftrightarrow 2x + 2y = 3x - 3y \Leftrightarrow x = 5y,$$

οπότε προκύπτει: $z = 2x + 2y = 12y$, οπότε $z - x = 12y - 5y = 7y > 0$, οπότε $z > x$.

Άρα έχουμε: $z > x > y \Leftrightarrow y < x < z$.

(β) Από τις προηγούμενες σχέσεις, δεδομένου ότι είναι $y > 0$, έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 680 \Leftrightarrow 25y^2 + y^2 + 144y^2 = 680 \Leftrightarrow 170y^2 = 680 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2.$$

Άρα είναι: $(x, y, z) = (10, 2, 24)$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A=8x+1$ και $B=2x-3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Λύση

Έστω $A=8x+1=\alpha^2$ και $B=2x-3=\beta^2$. Τότε λαμβάνουμε ότι:

$$x=\frac{\alpha^2-1}{8}=\frac{\beta^2+3}{2} \qquad (1)$$

και

$$\alpha^2-4\beta^2=13 \,. \qquad (2)$$

Από τη σχέση 92) έχουμε:

$$\alpha^2-4\beta^2=13 \Leftrightarrow (\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)=13$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=13\\ \alpha-2\beta=1\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=-13\\ \alpha-2\beta=-1\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=1\\ \alpha-2\beta=13\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=-1\\ \alpha-2\beta=-13\end{matrix}\right\}$$

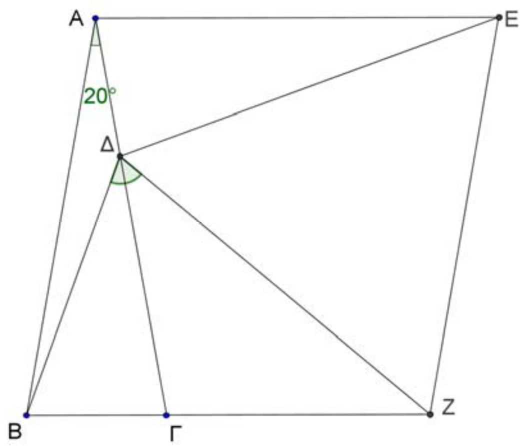
$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(7,3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(-7,-3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(7,-3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(-7,3).$$

Από όλα τα παραπάνω ζεύγη, από τις σχέσεις (1) προκύπτει ότι: $x=6$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=20^0$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Gamma}$. Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE}\parallel\mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{B\hat{\Delta}Z}$.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή είναι $\hat{\mathrm{A}}=20^\circ$ και $\mathrm{AE}\parallel\mathrm{B\Gamma}$ έχουμε ότι:

$$\mathrm{E\hat{A}\Delta}=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-20^\circ}{2}=80^\circ.$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΑΔ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία $(\mathrm{AB}=\mathrm{EA},\ \mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Delta})$ και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες $\left(\mathrm{A\hat{B}\Gamma}=\mathrm{E\hat{A}\Delta}=80^\circ\right)$.

Επομένως , έχουμε: $E\Delta = A\Gamma = AB$, $A\hat{E}\Delta = 20^\circ$.

Επειδή το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες $(AE = AB)$, είναι ρόμβος, οπότε $EZ = AB = E\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές. Επιπλέον, ισχύει: $A\hat{E}Z = \hat{B} = 80^\circ$. Επομένως $\Delta\hat{E}Z = A\hat{E}Z - A\hat{E}\Delta = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισόπλευρο.

Τότε είναι: $B\hat{Z}\Delta = B\hat{Z}E - \Delta\hat{Z}E = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο $BZ\Delta$ $(ZB = AB = Z\Delta)$ προκύπτει ότι: $B\hat{\Delta}Z = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2+3x+1}{x} - \frac{27x}{9x^2+3x+1} \geq 6.$$

Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή είναι $x > 0$ θα είναι και $9x^2+3x+1 > 0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\left(9x^2+3x+1\right)^2 - 27x^2 \geq 6x\left(9x^2+3x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(9x^2+3x+1\right)^2 - 6x\left(9x^2+3x+1\right) - 27x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(9x^2+3x+1\right)\left(9x^2-3x+1\right) - 27x^2 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(9x^2+1\right)^2 - 9x^2 - 27x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(9x^2+1\right)^2 - 36x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(9x^2-1\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$, αφού $x > 0$.

Πρόβλημα 2

Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α, β, γ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = \beta$.

Λύση

Αφού οι αριθμοί 1 και β είναι ρίζες της εξίσωσης, έχουμε:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad (1)$$

$$\alpha\beta^2 + \beta^2 + \gamma = 0. \qquad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\alpha\left(\beta^2 - 1\right) + \beta\left(\beta - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\beta - 1\right)\left(\alpha\beta + \alpha + \beta\right) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \alpha\beta + \alpha + \beta = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι είναι $\beta = 1$, τότε $\alpha + \gamma = -1$ και $\alpha + \gamma = 0$, αδύνατο.

Άρα είναι $\beta \neq 1$, οπότε θα είναι:

$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\beta}{\beta+1} = -1 + \frac{1}{\beta+1} \ .$$

Επειδή $\alpha \in \mathbb{Z}$ πρέπει: $\dfrac{1}{\beta+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta \in \{-2, 0\}$. Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\beta = 0$, οπότε έχουμε: $\alpha + \gamma = 0$ και $\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0,$ το οποίο απορρίπτεται αφού από την υπόθεση έχουμε $\alpha \neq 0$.
- $\beta = -2$, οπότε έχουμε $\alpha + \gamma = 2$ και $4\alpha + \gamma = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2,\ \gamma = 4$. Επομένως προκύπτει η τριάδα συντελεστών $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, -2, 4)$.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

Λύση
Θέλουμε να βρούμε για ποιους θετικούς ακεραίους λ έχει λύση ως προς x η εξίσωση

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2} = \lambda \Leftrightarrow (2-\lambda)x^2 + (1+\lambda)x - 2(2+\lambda) = 0.$$

Αν $\lambda = 2$ προκύπτει από την εξίσωση η λύση $x = \dfrac{8}{3}$.

Αν $\lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει λύση ως προς x, αν, και μόνον αν, η διακρίνουσά της είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta = (\lambda+1)^2 + 8(4-\lambda^2) = -7\lambda^2 + 2\lambda + 33 = (-\lambda^2 + 2\lambda) + (33 - 6\lambda^2),$$

Παρατηρούμε ότι για $\lambda \geq 3$ και οι δύο παρενθέσεις είναι αρνητικές, οπότε $\Delta < 0$. Επομένως, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, διάφορος του 2, έπεται ότι: $\lambda = 1$. Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{7}$.

Άρα για $x = \dfrac{8}{3}$ το κλάσμα παίρνει την ακέραια τιμή 2 και για $x = -1 \pm \sqrt{7}$ παίρνει την ακέραια τιμή 1.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B, AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K, Λ, M, N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

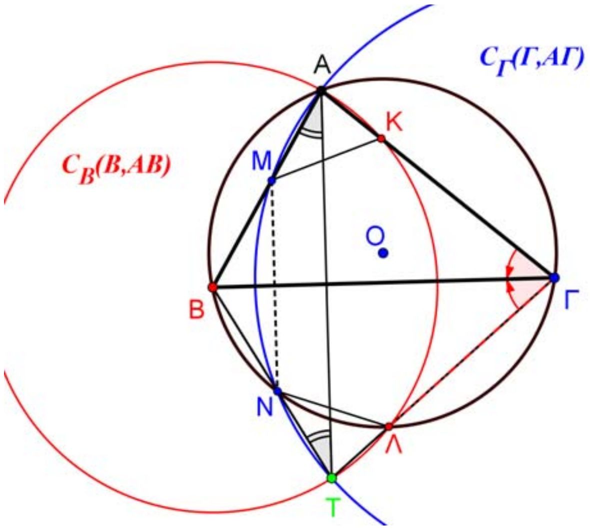
Λύση
Έστω T το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων C_A και C_B. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία T, Λ, Γ είναι συνευθειακά.
Οι χορδές BA και $B\Lambda$ του κύκλου C είναι ίσες μεταξύ τους, διότι είναι ακτίνες του κύκλου C_A, οπότε οι εγγεγραμμένες (στο κύκλο C) γωνίες που βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα, θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή

$$B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma} \qquad (1).$$

Η $B\Gamma$ είναι διάκεντρος των κύκλων C_B και C_Γ, οπότε θα είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής AT και θα διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Gamma}T$, δηλαδή

$$B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Gamma}T = \hat{\Gamma} \qquad (2).$$

Άρα τα σημεία T, Λ, Γ είναι συνευθειακά.



Σχήμα 5

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία T, N, B είναι συνευθειακά.

Το τρίγωνο BAT είναι ισοσκελές ($BA = BT$). Άρα $M\hat{A}T = N\hat{T}A$, οπότε τα αντίστοιχα τόξα AN και MT (του κύκλου C_Γ) είναι ίσα μεταξύ τους.

Από την ισότητα των τόξων $AN = AM + MN$ και $MT = TN + MN$, προκύπτει η ισότητα των τόξων AM και TN. Άρα το τετράπλευρο $MATN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $MN \,//\, AT$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $KAT\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $K\Lambda \,//\, AT$. Άρα $MN \,//\, K\Lambda$ και κατά συνέπεια το $MK\Lambda N$ είναι τραπέζιο και η $B\Gamma$ είναι κοινή μεσοκάθετη των παράλληλων πλευρών του.

Τα τρίγωνα AKM και $T\Lambda N$ είναι ίσα. Άρα το $MK\Lambda N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1.$$

Λύση

Περιορισμός: $x^2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 5$. Η εξίσωση, για $x \leq 0$ ή $x \geq 5$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 + (x^2 - 5x) - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x^2 - 5x}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \ (\mathrm{E}_1) \text{ ή } x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \ (\mathrm{E}_2)$$

- $(\mathrm{E}_1): x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \ \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty),\ x \geq 1$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-5x,\ \text{με } x\geq 5 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3},\ x\geq 5,\ \text{απορρίπτεται.}$$

- $(\mathrm{E}_2): x-\sqrt{x^2-5x}=-1 \ \Leftrightarrow x+1=\sqrt{x^2-5x}, x\in(-\infty,0]\cup[5,+\infty),\ x\geq -1$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-5x,\ \text{με } -1\leq x\leq 0 \text{ ή } x\geq 5$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{7},\ -1\leq x\leq 0 \text{ ή } x\geq 5 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{7}.$$

Πρόβλημα 2

Αν α,β ακέραιοι και ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\alpha^2+\beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Λύση

Έστω ότι $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta=x^2$, όπου $x\in\mathbb{Z}$. Τότε $\beta=\dfrac{x^2-\alpha^2}{2}$. Επειδή $\beta\in\mathbb{Z}$, πρέπει ο αριθμητής $x^2-\alpha^2$ να είναι άρτιος ακέραιος, το οποίο συμβαίνει μόνον όταν οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Έτσι έχουμε

$$\alpha^2+\beta=\alpha^2+\frac{x^2-\alpha^2}{2}=\frac{x^2+\alpha^2}{2}=\frac{(x+\alpha)^2+(x-\alpha)^2}{4}=\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2,$$

όπου οι αριθμοί $\dfrac{x+\alpha}{2}$ και $\dfrac{x-\alpha}{2}$ είναι ακέραιοι, αφού οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Πρόβλημα 3

Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση

$$4x^4+(8+4a)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2=0$$

έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&4x^4+(8+4a)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2\\
&=\left(4x^4+8x^3+a^2x^2\right)+\left(4ax^3+8ax^2+a^3x\right)+\left(4x^2+8x+a^2\right)\\
&=x^2\left(4x^2+8x+a^2\right)+ax\left(4x^2+8x+a^2\right)+\left(4x^2+8x+a^2\right)\\
&=\left(4x^2+8x+a^2\right)\left(x^2+ax+1\right).
\end{aligned}$$

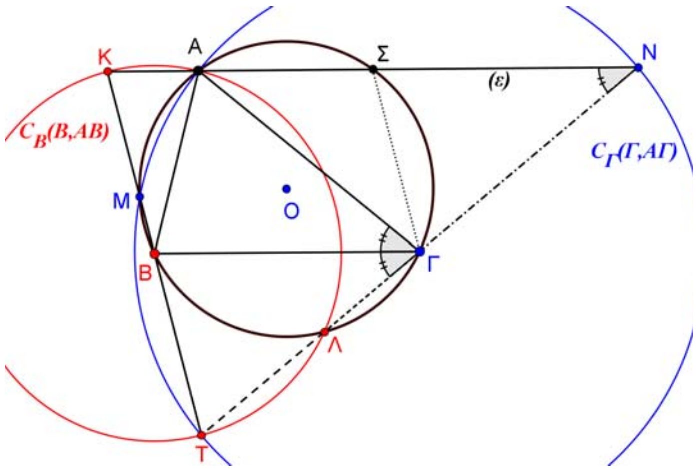
Επομένως, η εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς, αν, και μόνον αν, και τα δύο τριώνυμα x^2+ax+1 και $4x^2+8x+a^2$ έχουν πραγματικές ρίζες

$$\Leftrightarrow a^2-4\geq 0 \ \text{ και } 64-16a^2\geq 0 \Leftrightarrow a^2-4\geq 0 \text{ και } a^2-4\leq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow a=-2 \text{ ή } a=2.$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο M. Οι κύκλοι $C_B(B,AB)$, $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O,R)$ στο σημείο Σ.
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Λ,N,T είναι συνευθειακά.
(β) Να αποδείξετε ότι οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση
(α) Το τρίγωνο ΓAN είναι ισοσκελές ($\Gamma A = \Gamma N$ ως ακτίνες του κύκλου C_Γ). Άρα $A\hat{N}\Gamma = N\hat{A}\Gamma$.



Σχήμα 6

Από την παραλληλία $(\varepsilon)//B\Gamma$ (με τέμνουσα την ΑΓ) έχουμε: $N\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}$.
Από τις προηγούμενες ισότητες γωνιών, προκύπτει: $A\hat{N}\Gamma = \hat{\Gamma} \quad (1)$.
Από την ισότητα των χορδών AB και $B\Lambda$ του κύκλου $C(O,R)$ (οι χορδές AB και $B\Lambda$ είναι ακτίνες του κύκλου C_B) έχουμε: $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma} \quad (2)$.
Από τις σχέσεις *(1)* και *(2)* συμπεραίνουμε ότι: $A\hat{N}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma}$, δηλαδή τα σημεία Γ, N, Λ είναι συνευθειακά.
Η διάκεντρος $B\Gamma$ (των κύκλων C_B και C_Γ) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους AT. Άρα $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}T = \hat{\Gamma}$. Από την ισότητα των γωνιών $B\hat{\Gamma}T$ και $B\hat{\Gamma}\Lambda$, προκύπτει ότι τα σημεία Γ,T,Λ είναι συνευθειακά, οπότε σε συνδυασμό με το προηγούμενο συμπέρασμα έπεται ότι τα σημεία Γ,Λ,N,T είναι συνευθειακά.
(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία B,K,M,T είναι συνευθειακά, οπότε τα σημεία B και Γ είναι μέσα των πλευρών TK και TN, αντίστοιχα, του τριγώνου TKN.
Θα αποδείξουμε ότι το σημείο Σ είναι το μέσο της πλευράς KN (οπότε οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ θα συντρέχουν στο βαρύκεντρο του τριγώνου TKN).

Πράγματι, το τετράπλευρο $ABΓΣ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C(O,R)$, οπότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$Γ\hat{Σ}N = K\hat{A}B \text{ (από το ισοσκελές τραπέζιο } ABΓΣ\text{)}$$

$$K\hat{A}B = B\hat{K}A \text{ (από το ισοσκελές τρίγωνο } ABK\text{).}$$

Άρα η $ΣΓ$ είναι παράλληλη προς την KB, δηλαδή το $Σ$ είναι το μέσο της KN.

Παρατήρηση

Δεν είναι απαραίτητο (για την απόδειξη του δευτέρου ερωτήματος) να αποδείξουμε ότι το σημείο $Λ$ ανήκει στην ίδια ευθεία με τα σημεία $Γ,N,T$.

Χρειάζεται όμως για να αποδείξουμε ότι και $AT,NM,KΛ$ συντρέχουν και να συμπεράνουμε ότι τα σημεία ο κύκλος $C(O,R)$ είναι ο κύκλος Euler του τριγώνου TKN.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x(x-2)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Λύση

Η εξίσωση $x(x-2)=24 \Leftrightarrow x^2-2x-24=0$ είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα $\Delta=100$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x=\frac{2\pm 10}{2} \Leftrightarrow x=6 \text{ ή } x=-4.$$

Δεκτή είναι η ρίζα $x=-4$, γιατί $(-4)^2=16<25$, ενώ $6^2=36>25$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha\beta+\beta^2\right)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

Λύση

Ο αριθμητής της παράστασης γράφεται:

$$\begin{aligned}
&\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha\beta+\beta^2\right)(\alpha-2\beta)\\
&=\alpha^3+\beta^3-\left(\alpha^2-\beta^2\right)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta+\beta\alpha-2\beta^2\right)\\
&=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\beta^2-\alpha+\beta\right)\\
&=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)\right]\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1).
\end{aligned}$$

Ο παρανομαστής της παράστασης γράφεται:

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)$$

Άρα, αφού $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$, έχουμε

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}=\alpha-\beta.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4\lambda^2-4\left(\lambda^2-1\right)=4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = -\lambda + 1$ και $x_2 = -\lambda - 1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(-5,2)$, όταν

$$-5 < -\lambda + 1 < 2 \text{ και } -5 < -\lambda - 1 < 2 \Leftrightarrow -6 < -\lambda < 1 \text{ και } -4 < -\lambda < 3$$

$$\Leftrightarrow -1 < \lambda < 6 \text{ και } -3 < \lambda < 4 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

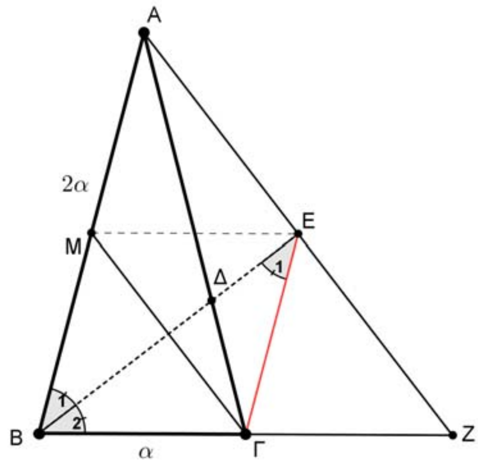
$$(-\lambda+1)^2 + (-\lambda-1)^2 = 20 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 = 20 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 3,$$

Επομένως, αφού πρέπει $-1 < \lambda < 4$ το ζητούμενο ισχύει για $\lambda = 3$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$ και $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = 2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή $\mathrm{E\Gamma} \,/\!/\, \mathrm{AB}$, θα ισχύει $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$ και αφού η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, θα είναι $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2$. Επομένως έχουμε $\hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{E}}_1$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές, δηλαδή: $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma E} = \alpha$.

Στη συνέχεια μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.

1ος τρόπος. Λόγω της παραλληλίας των ΕΓ, ΑΒ θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΖ, από τα οποία λαμβάνουμε:

$$\frac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{BZ}} = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{BZ} = 2 \cdot \mathrm{\Gamma Z}$$

Επομένως το σημείο Γ είναι το μέσο της ΒΖ, δηλαδή $\mathrm{BZ} = 2 \cdot \mathrm{B\Gamma} = 2\alpha$. Επειδή είναι και $\mathrm{AB} = 2\alpha$ το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Τότε το τετράπλευρο ΒΓΕΜ είναι ρόμβος, διότι: έχει $\mathrm{BM} = /\!/\, \mathrm{\Gamma E} = \alpha$ (οπότε ΒΓΕΜ παραλληλόγραμμο) και $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma E} = \alpha$ (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες). Άρα $\mathrm{ME} = \mathrm{BZ}$ και κατά συνέπεια το Ε είναι μέσο του ΑΖ. Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΖ, η ΒΕ είναι διχοτόμος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\kappa\ \alpha \neq 0$ και $-1 < \alpha < 1$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha$,

όπου

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}},\ \mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\ .$$

Λύση

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι $1+\alpha > 0$ και $1-\alpha > 0$, οπότε

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha+1-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$\mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha-(1-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha = \frac{1}{\alpha} - 1 + \alpha = \frac{1-\alpha+\alpha^2}{\alpha}.$$

Επειδή είναι $1-\alpha+\alpha^2 = \left(\alpha - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, για όλες τις τιμές του α, έπεται ότι η παράσταση Κ έχει το πρόσημο του α, δηλαδή θετικό, αν $0 < \alpha < 1$ και αρνητικό, αν $-1 < \alpha < 0$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4\kappa^2 - 4\left(-1+\kappa^2\right) = 4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = \kappa + 1$ και $x_2 = \kappa - 1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(0,5)$, όταν

$$0 < \kappa + 1 < 5 \text{ και } 0 < \kappa - 1 < 5 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 4 \text{ και } 1 < \kappa < 6 \Leftrightarrow 1 < \kappa < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$(\kappa+1)^4 + (\kappa-1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2\kappa^4 + 12\kappa^2 + 2 = 82 \Leftrightarrow \kappa^4 + 6\kappa^2 - 40 = 0,$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$\kappa^2 = 4 \text{ ή } \kappa^2 = -10 \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow \kappa = 2 \text{ ή } \kappa = -2.$$

Επομένως για $\kappa = 2$ ισχύει το ζητούμενο, αφού η τιμή $\kappa = -2$ απορρίπτεται λόγω της σχέσης $1 < \kappa < 4$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3} = \frac{y}{2012y+5} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Λύση

Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+3}{x} = \frac{2012y+5}{y} = \frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012 + \frac{3}{x} = 2012 + \frac{5}{y} = 2012 + \frac{7}{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{y} = \frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε $\frac{3}{x} = \frac{5}{y} = \frac{7}{z} = \frac{1}{\lambda}$ έπεται ότι: $x = 3\lambda,\ y = 5\lambda,\ z = 7\lambda$.

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747 θα έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 = 83\lambda^2 \,|\, 747 \Rightarrow \frac{747}{83\lambda^2} = \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{9}{\lambda^2} = \kappa \in \mathbb{Z},$$

Επομένως οι μοναδικές αποδεκτές τιμές για το λ^2 είναι οι 1, 3 και 9.

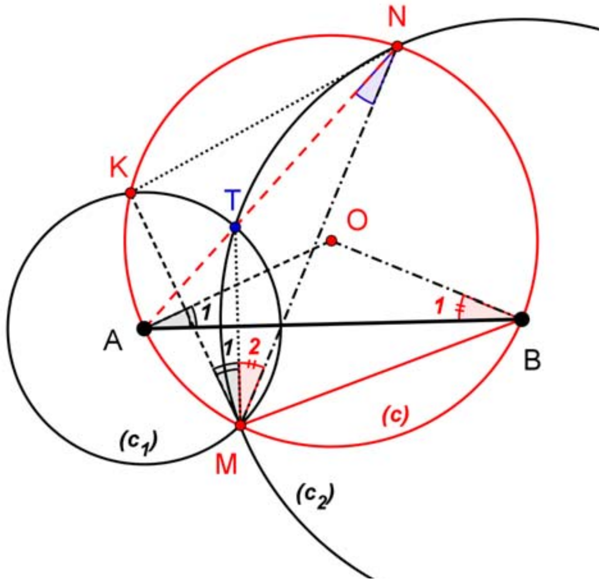
- Για $\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ έπεται ότι $(x, y, z) = (3, 5, 7)$ ή $(x, y, z) = (-3, -5, -7)$.
- Για $\lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$ προκύπτουν για τα x, y, z μη ακέραιες τιμές, άτοπο.
- Για $\lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3$ έπεται ότι $(x, y, z) = (9, 15, 21)$ ή $(x, y, z) = (-9, -15, -21)$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O, R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλοι $c_1(A, AM)$ και $c_2(B, BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O, R)$ στα σημεία K και N αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A, AM)$ και $c_2(B, BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η διάκεντρος τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 5

Η KM είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_1(A,AM)$. Άρα

η OA είναι μεσοκάθετη της KM. (1)

Η MT είναι κοινή χορδή των κύκλων $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η AB είναι μεσοκάθετη της MT. (2)

Η MN είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η OB είναι μεσοκάθετη της MN. (3)

Από τις καθετότητες (1) και (2), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{A}_1 = \hat{M}_1$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες).

Από τις καθετότητες (2) και (3), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{B}_1 = \hat{M}_2$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες)

και τελικά από το ισοσκελές τρίγωνο OAB, έχουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 .$$

Οι τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών μας οδηγούν στην ισότητα: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

Η γωνία $A\hat{N}M$ και $A\hat{B}M$ είναι ίσες, διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AM}$.

Η γωνία $T\hat{N}M$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο $c_2(B,BM)$, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας $T\hat{B}M$, δηλαδή: $T\hat{N}M = A\hat{B}M$

Άρα $A\hat{N}M = T\hat{N}M$ και κατά συνέπεια τα σημεία A,T,N είναι συνευθειακά.

Ισχύει τώρα η ισότητα $A\hat{N}K = A\hat{N}M$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στα ίσα τόξα AM και AK). Επομένως η NA είναι διχοτόμος της γωνίας $K\hat{N}M$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+x}=\frac{2011}{2013}.$$

Λύση
Επειδή $1+2+3+...+x=\frac{x(x+1)}{2}$, για κάθε θετικό ακέραιο x, η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{x(x+1)}=\frac{2011}{2013}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{2011}{2013}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x+1}=\frac{2011}{2013}\Leftrightarrow\frac{2}{x+1}=\frac{2}{2013}\Leftrightarrow x=2012.$$

Πρόβλημα 2
Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a,b,c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Λύση
Από την υπόθεση έπεται ότι η εξίσωση

$$ax^2+bx+c=cx+b\Leftrightarrow ax^2+(b-c)x+(c-b)=0$$

έχει μοναδική λύση. Επομένως η διακρίνουσά της ισούται με 0, δηλαδή

$$\Delta=(b-c)^2+4a(b-c)=0\Leftrightarrow(b-c)(b-c+4a)=0\Leftrightarrow c-b=4a,$$

αφού $b\neq c$.
Όταν $c-b=4a$ η εξίσωση γίνεται:

$$ax^2-4ax+4a=0\Leftrightarrow a\left(x^2-4x+4\right)=0\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2.$$

Άρα το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το $\mathrm{M}(2,2c+b)$.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147.

Λύση
Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+y}{x}=\frac{2012y+z}{y}=\frac{2012z+7}{z}$$
$$\Leftrightarrow 2012+\frac{y}{x}=2012+\frac{z}{y}=2012+\frac{7}{z}\Leftrightarrow\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{7}{z}$$
οπότε, αν θέσουμε $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{7}{z}=\frac{1}{\lambda}$ έπεται ότι: $x=7\lambda^3$, $y=7\lambda^2$, $z=7\lambda$.

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147 θα έχουμε
$$x^2+y^2+z^2=147\Leftrightarrow 49\lambda^6+49\lambda^4+49\lambda^2=147$$
$$\Leftrightarrow\lambda^6+\lambda^4+\lambda^2=3\Leftrightarrow\lambda^6-1+\lambda^4-1+\lambda^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^4+\lambda^2+1+\lambda^2+1+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^4+2\lambda^2+3\right)=0\Leftrightarrow\lambda=-1 \text{ ή } \lambda=1,$$
αφού η εξίσωση $\lambda^4+2\lambda^2+3=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-8<0$.

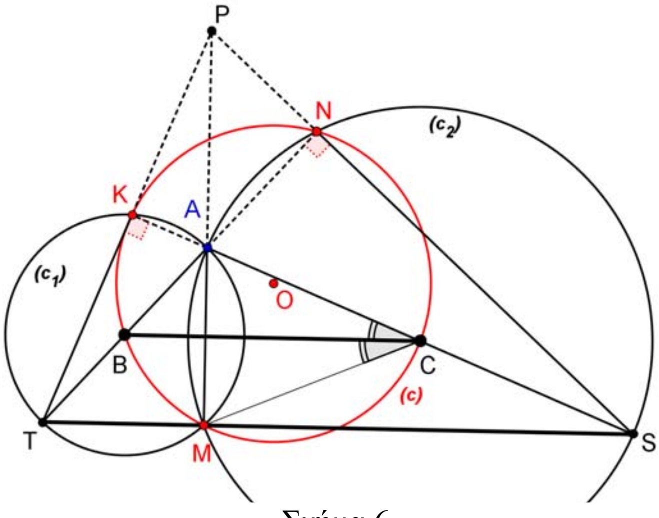
Επομένως οι ζητούμενες τριάδες ακεραίων είναι:
$$\left(x,y,z\right)=\left(7,7,7\right) \text{ ή } \left(x,y,z\right)=\left(-7,-7,-7\right)$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ στα σημεία T, S αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM,KT,NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Θα αποδείξουμε, πρώτα, ότι τα σημεία K,A,C,S και N,A,B,T είναι συνευθειακά.



Σχήμα 6

Η AM είναι η κοινή χορδή των κύκλων $c_1(B,BM)$ και $c_2(C,CM)$.

Άρα η διάκεντρός τους BC είναι μεσοκάθετη της AM.

Η BC όμως είναι παράλληλη με την TS (από την κατασκευή του σχήματος). Άρα η TS είναι κάθετος με την AM ($AM \perp TS$). Δηλαδή $A\hat{M}T = A\hat{M}S = 90^o$.
Από την τελευταία ισότητα γωνιών προκύπτει ότι τα σημεία A,T και A,S είναι αντιδιαμετρικά στους κύκλους $c_1(B,BM)$ και $c_2(C,CM)$ αντίστοιχα.
Επομένως, τα σημεία A,C,S και A,B,T είναι συνευθειακά.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K,A,C και N,A,B είναι συνευθειακά.
Στον κύκλο $c(O,R)$, το σημείο B είναι μέσο του τόξου KM (διότι BM,BK είναι ακτίνες του κύκλου $c_1(B,BM)$). Άρα οι εγγεγραμμένες στα τόξα BM και BK γωνίες, θα είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως

$$K\hat{C}B = M\hat{C}B \qquad (1).$$

Εφόσον η διάκεντρος BC είναι μεσοκάθετη της AM, τα τρίγωνα ABC και MBC είναι ίσα, οπότε :

$$A\hat{C}B = M\hat{C}B \qquad (2).$$

Από τις ισότητες των γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $K\hat{C}B = A\hat{C}B$ και κατά συνέπεια τα σημεία K,A,C είναι συνευθειακά.
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία N,A,B είναι επίσης συνευθειακά.
Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $AMTK$ και $AMSN$ συμπεραίνουμε ότι:

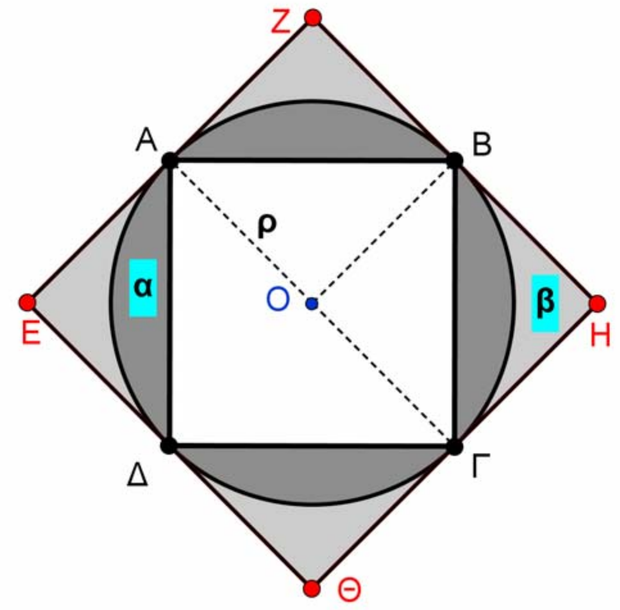
$$A\hat{K}T = A\hat{N}S = 90^o.$$

Επομένως προκύπτουν οι καθετότητες $TK \perp KS$ και $TN \perp NS$.
Σε συνδυασμό τώρα με την καθετότητα $AM \perp TS$, συμπεραίνουμε ότι τα AM, KT, NS είναι ύψη του τριγώνου ATS, οπότε θα συγκλίνουν στο ορθόκεντρό του.

Παρατηρήσεις

Έστω P το ορθόκεντρο του τριγώνου ATS. Τότε τα σημεία P,A,T,S αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα και κατά συνέπεια το σημείο A είναι ορθόκεντρο του τριγώνου PTS.

Το τρίγωνο KMN είναι ορθικό του τριγώνου PTS και κατά συνέπεια το σημείο A είναι έκκεντρο του τριγώνου KMN.



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι $\text{ΟΑ} \perp \text{ΕΖ}$ και $\text{ΟΓ} \perp \text{ΗΘ}$, έπεται ότι η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου $C(\text{Ο},\rho)$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΗΖ είναι ορθογώνιο, οπότε $\text{ΖΗ} = 2\rho$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με $4\rho^2$. Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4-\pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi-2)\rho^2}{(4-\pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi-2) < 4(4-\pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3{,}1428...., \text{ που ισχύει.}$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-10)(x^2-7x+10) = 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} + \dfrac{2x-1}{5} < \dfrac{x(x+1)}{2} \end{array} \right\}$$

Λύση

Έχουμε

$$(x-10)(x^2-7x+10) = 0 \Leftrightarrow x-10=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \text{ ή } x^2-7x+10=0.$$

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$, έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με $\alpha=1,\ \beta=-7$, $\gamma=10$, οπότε είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=2$ ή $x=5$.

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-7)=-10$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm 1,\pm 2,\pm 5,\pm 10\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x-1}{5}<\frac{x(x+1)}{2}\Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2<5x^2+5x\Leftrightarrow x>3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι: $x=5$ ή $x=10$.

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}\quad \text{και}\quad \Gamma(x)=\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)},$$

τότε η παράσταση $\mathrm{A}(x)$ είναι ίση με τη διαφορά $\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)$. Έχουμε:

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}=\frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+x^2+1+2x+x^2}$$

$$=\frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2}=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2}=\frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}{1+x+x^2}=\frac{(x^2+x+1)^2}{x^2+x+1}=x^2+x+1.$$

$$\Gamma(x)=\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}=\frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3(x^2+1)}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x^2+1}=\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1}=x+1.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)=x^2+x+1-(x+1)=x^2.$$

3. **(α)** Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa(x+2)-\frac{3(\kappa x-1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Λύση

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2\kappa x+x=4\kappa(x+2)-3(\kappa x-1)\Leftrightarrow 2\kappa x+x=4\kappa x+8\kappa-3\kappa x+3\Leftrightarrow \kappa x+x=8\kappa+3$$

$$\Leftrightarrow(\kappa+1)x=8\kappa+3. \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $\kappa=-1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=-5$ και είναι αδύνατη.

2. Αν $\kappa\in\mathbb{Z}-\{-1\}$, δηλαδή, αν ο κ είναι ακέραιος διαφορετικός από το -1, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=\dfrac{8\kappa+3}{\kappa+1}$.

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x=\frac{8\kappa+3}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\kappa+8-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8(\kappa+1)-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$

$$x=8-\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\kappa+1\in\{-1,1,-5,5\}\Leftrightarrow\kappa\in\{-2,0,-6,4\}.$$

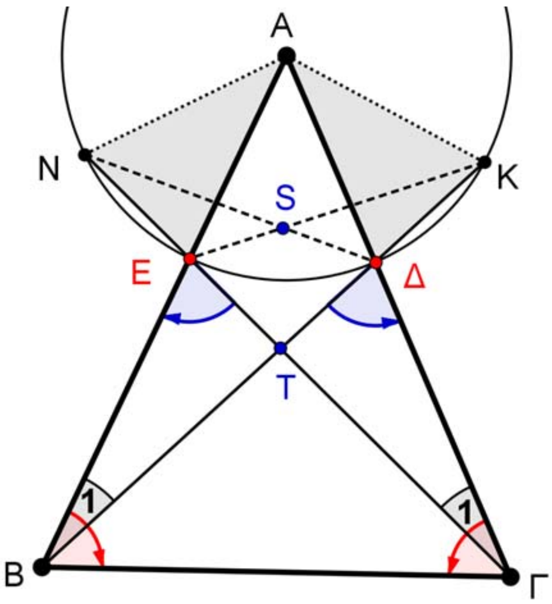
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το κ είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του -1.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή A και ακτίνα $\rho<\mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές AB και $\mathrm{A\Gamma}$ στα σημεία E και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Gamma E}$ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία K, N αντίστοιχα. Αν T είναι το σημείο τομής των $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Gamma E}$ και S το σημείο τομής των $\Delta\mathrm{N}$, EK, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, S και T βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AE\Gamma}$ είναι ίσα γιατί έχουν: (α) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β) $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$) και (γ) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AE\Gamma}$, προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\Gamma}_1$ και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{B\hat{T}\Gamma}=\mathrm{\Gamma\hat{T}B}. \qquad (1)$$

- $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών
$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma \qquad (2)$$
- $$\Delta\mathrm{B}=\Delta\Gamma\,. \qquad (3)$$

Από την ισότητα (1) των γωνιών $\mathrm{B}\hat{\mathrm{T}}\Gamma=\Gamma\hat{\mathrm{T}}\mathrm{B}$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $\mathrm{BT}\Gamma$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο T θα ανήκει στη μεσοκάθετη της $\mathrm{B}\Gamma$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{BT}\Gamma$ έχουμε: $\mathrm{TB}=\mathrm{T}\Gamma$ και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε: $\mathrm{TE}=\mathrm{T}\Delta$.

Από την ισότητα (2) των γωνιών $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma$, προκύπτει η ισότητα τω ισοσκελών τριγώνων $\mathrm{A}\Delta\mathrm{K}$ και AEN. Άρα $\Delta\mathrm{K}=\mathrm{EN}$ και επειδή $\mathrm{TE}=\mathrm{T}\Delta$, καταλήγουμε $\mathrm{TK}=\mathrm{TN}$.

Από τις ισότητες $\mathrm{TE}=\mathrm{T}\Delta$ και $\mathrm{TK}=\mathrm{TN}$ συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων ETK και $\Delta\mathrm{TN}$.

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $\mathrm{SEN}=\mathrm{S}\Delta\mathrm{K}$ και στη συνέχεια η ισότητα $\mathrm{SAE}=\mathrm{SAK}$, οπότε το σημείο S ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:
$$\mathrm{K}(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ x\neq\pm\sqrt{2}\,.$$
(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:
$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2}\,.$$
χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Λύση

(α) Εκτελούμε τις πράξεις και παραγοντοποιούμε τον αριθμητή της παράστασης:
$$\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2}=\frac{(x+2)\left(2x^2-3x+1\right)+x-4}{x^2-2}$$
$$=\frac{2x^3-3x^2+x+4x^2-6x+2+x-4}{x^2-2}=\frac{2x^3+x^2-4x-2}{x^2-2}$$
$$=\frac{2x\left(x^2-2\right)+x^2-2}{x^2-2}=\frac{\left(x^2-2\right)(2x+1)}{x^2-2}=2x+1.$$

(β) Για $x=2010$ η προηγούμενη παράσταση γίνεται ίση με την Α, οπότε θα έχουμε:
$$\mathrm{A}=\mathrm{K}(2010)=2\cdot 2010+1=4021\,.$$

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2}\,,$$
με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

Λύση

Για $a=b$ η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{2}{x-a}=\dfrac{1}{c^2}\Leftrightarrow x=a+2c^2$.

Έστω $a\neq b.$ Τότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$(x-a)(x-b)=c^2(x-a+x-b),\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b$$

$$\Leftrightarrow x^2-\left(a+b+2c^2\right)x+ab+(a+b)c^2=0,\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\Delta=\left(a+b+2c^2\right)^2-4ab-4(a+b)c^2=(a+b)^2-4ab+4c^4=(a-b)^2+4c^4>0,$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες

$$x_{1,2}=\frac{a+b+2c^2\pm\sqrt{(a-b)^2+4c^4}}{2}. \qquad (2)$$

Οι δύο ρίζες είναι δεκτές, αν τα a και b δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Για $x=a$ η εξίσωση γίνεται: $(a-a)(x-b)=c^2(a-a+x-b)\Leftrightarrow 0=c^2(a-b)$, που είναι άτοπο, αφού είναι $c\neq 0$ και έχουμε υποθέσει ότι $a\neq b$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο για $x=b$. Επομένως, για $a\neq b$, η δεδομένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες (2).

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y=x^3+2x-2,\ z=y^3+2y-2,\ x=z^3+2z-2.$$

Λύση

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος λαμβάνουμε:

$$y-z=(x-y)\left(x^2+xy+y^2+2\right) \qquad (1)$$

$$z-x=(y-z)\left(y^2+yz+z^2+2\right) \qquad (2)$$

Επειδή είναι $x^2+xy+y^2+2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}+2>0$ και ομοίως προκύπτει ότι $y^2+yz+z^2+2=\left(y+\dfrac{z}{2}\right)^2+\dfrac{3z^2}{4}+2>0$, αν υποθέσουμε ότι είναι $x>y$, τότε από την (1) λαμβάνουμε ότι $y>z$. Στη συνέχεια από τη σχέση (2) λαμβάνουμε $z>x$.

Έτσι έχουμε $x>y>z>x$, άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $x<y$. Επομένως έχουμε $x=y,$ οπότε θα είναι και $y=z$. Τότε από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$x=x^3+2x-2\Leftrightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow x^3-1+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2\right)=0\Leftrightarrow x=1,$$

αφού το τριώνυμο x^2+x+2 έχει διακρίνουσα $\Delta=-7<0$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}<\text{ΒΓ}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\text{Α}}$, $\hat{\text{Β}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο c(O,R)

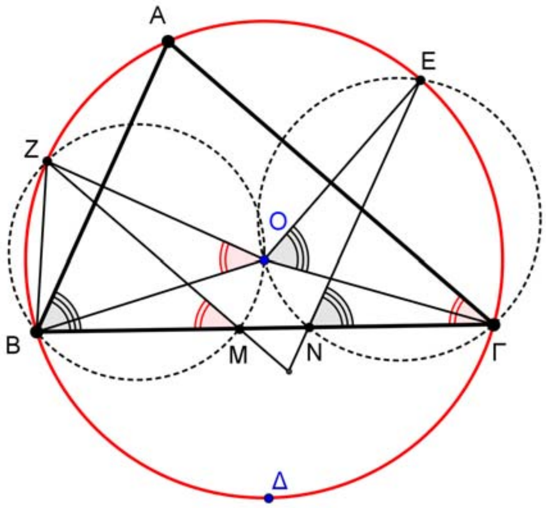
στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{A}\Gamma$, που τέμνει την $\mathrm{B}\Gamma$ στο σημείο M. Από το σημείο E, θεωρούμε παράλληλη στην AB, που τέμνει την $\mathrm{B}\Gamma$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα BMOZ και $\Gamma\mathrm{NOE}$ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω K) των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$.

Λύση

α) Εφόσον η ZM είναι παράλληλη στην $\mathrm{A}\Gamma$, θα ισχύει: $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \hat{\Gamma}$.
Η γωνία $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ και βαίνει στο τόξο ZB (που είναι το μισό του τόξου AB). Άρα $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = \hat{\Gamma}$. Άρα είναι $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τετράπλευρο BMOZ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 4

Ομοίως προκύπτει ότι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{N}}\Gamma = \mathrm{E}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = \hat{\mathrm{B}}$ και ότι το τετράπλευρο $\Gamma\mathrm{NOE}$ είναι εγγράψιμο.

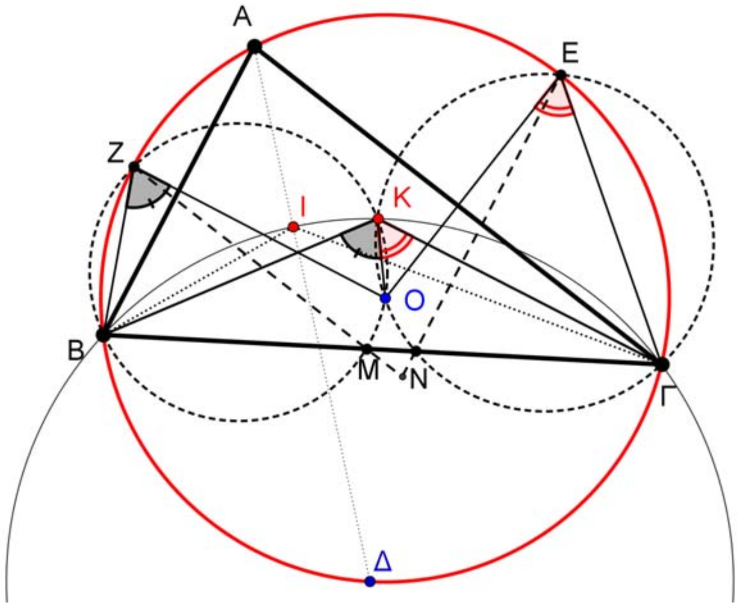
β) Επειδή το σημείο I είναι το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\Delta\hat{\mathrm{I}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{I} = \frac{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}}}{2} \text{ και } \Delta\hat{\mathrm{I}}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{I} = \frac{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\Gamma}}{2}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι $\Delta\mathrm{B} = \Delta\mathrm{I} = \Delta\Gamma$ και επίσης εύκολα προκύπτει ότι: $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία $\mathrm{B}, \mathrm{I}, \mathrm{K}, \Gamma$ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ότι

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \hat{\mathrm{A}} + \frac{\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}}{2} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma.$$



Σχήμα 5

Το τρίγωνο ΟΒΖ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OB}=\mathrm{OZ}=R)$, με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z}=\hat{\Gamma}$. Άρα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O}=90^{\circ}-\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$. Το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O}\Gamma=\mathrm{OE}=R)$, με $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E}=\hat{\mathrm{B}}$. Άρα $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O}=90^{o}-\dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Έτσι ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B}+\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O}+\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O}=90^{o}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}+90^{o}-\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$

$$=180^{o}-\left(90^{\circ}-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right)=90^{\circ}+\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(x^{2}+3x+2\right)^{4}+\left(x^{2}+x-2\right)^{4}=16\left(x+2\right)^{4}.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι τα τριώνυμα $x^{2}+3x+2$ και $x^{2}+x-2$ έχουν παράγοντα το $x+2$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+2\right)^{4}\left[\left(x+1\right)^{4}+\left(x-1\right)^{4}-16\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+2\right)^{4}=0 \text{ ή } \left(x+1\right)^{4}+\left(x-1\right)^{4}-16=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } 2x^{4}+12x^{2}-14=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^{4}+6x^{2}-7=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^{2}=1 \text{ ή } x^{2}=-7 \text{ (αδύνατη)}$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

$2^{ος}$ τρόπος

Αν θέσουμε $a = x^2 + 3x + 2,\ b = x^2 + x - 2$, τότε $a - b = 2x + 4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 = (a-b)^4 &\Leftrightarrow a^4 + b^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ &\Leftrightarrow -ab\left(2a^2 - 3ab + 2b^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0, \end{aligned}$$

αφού η εξίσωση $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$, αν $ab \neq 0$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2u^2 - 3u + 2 = 0,\ u = \frac{a}{b},$$

η οποία δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} &a = 0 \text{ ή } b = 0 \text{ ή } a = b = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ ή } x^2 + x - 2 = 0 \text{ ή } x^2 + 3x + 2 = x^2 + x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = -1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = -2 \text{ (διπλή)} \\ \Leftrightarrow\ & x = -1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ (με πολλαπλότητα 4)} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$,, αν το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha\left(x^2 + y^2\right) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{array}\right\}, \qquad (\Sigma)$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$, δια κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha\left(x^2 + y^2\right) + 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha\left(x^2 + (2x+\lambda)^2\right) + 2x + 2x + \lambda = \lambda \\ y = 2x + \lambda \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 5\alpha x^2 + 4(\alpha\lambda + 1)x + \alpha\lambda^2 = 0 & (1) \\ y = 2x + \lambda & (2) \end{array}\right\}$$

Αν ήταν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 16(\alpha\lambda + 1)^2 - 20\alpha^2\lambda^2 = 4\left(-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4\right)$$

Επειδή το σύστημα έχει λύση στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, έπεται ότι θα είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 \geq 0. \qquad (3)$$

Όμως , το τριώνυμο $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta' = 80\alpha^2 > 0$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (αφού είναι $\lambda_1\lambda_2 = -\dfrac{4}{\alpha^2} < 0$).

Επομένως θα έχουμε $-\alpha^2\lambda^2 + 8\alpha\lambda + 4 < 0$, για $\lambda < \lambda_1$ ή $\lambda > \lambda_2$, άτοπο.

Για $\alpha = 0$ η εξίσωση (1) έχει τη λύση $x = 0$, οπότε προκύπτει ότι $y = \lambda$ και το σύστημα έχει τη λύση $(x, y) = (0, \lambda)$. Άρα είναι $\alpha = 0$.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n = a_n - a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = a_1 - a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0, ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n > 10^3$ και $S_{n+1} \le 8 \cdot 10^3$.

Λύση

1. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$d_1 = \omega,\ d_n = d_1 + (n-1)\omega = n\omega, n = 2,3,\ldots.$$

οπότε θα είναι:

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1})$$
$$\Leftrightarrow \omega + 2\omega + \ldots + n\omega = a_n - a_0 \Leftrightarrow a_n = a_0 + (1 + 2 + \ldots + n)\omega$$
$$\Leftrightarrow a_n = a_0 + \frac{n(n+1)}{2}\omega.$$

Για το άθροισμα S_{n+1} έχουμε:

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = (n+1)a_0 + \left(\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \ldots + \frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)\omega$$
$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left((1^2+1) + (2^2+2) + \ldots + (n^2+n)\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\omega + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)\omega$$
$$= (n+1)a_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)\omega = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\omega.$$

2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, τότε έχουμε $\omega = 6$ και

$$a_n = 1 + 3n(n+1),\ S_{n+1} = n + 1 + n(n+1)(n+2) = (n+1)\left[1 + n(n+2)\right] = (n+1)^3.$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα των ανισώσεων:

$$a_n > 10^3 \text{ και } S_{n+1} \le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow a_n = 1 + 3n(n+1) > 10^3,\ S_{n+1} = (n+1)^3 \le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow$$
$$n(n+1) > 333,\ n+1 \le 2\cdot 10 \Leftrightarrow n > 18,\ n \le 19 \Leftrightarrow n = 18 \text{ ή } n = 19.$$

αφού είναι $17\cdot 18 = 306,\ 18\cdot 19 = 342$.

Άρα ο ζητούμενος ελάχιστος θετικός ακέραιος n είναι ο 18.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς ΒΓ . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $Α\hat{Δ}Β$ στο σημείο Κ και τη διχοτόμο της γωνίας $Α\hat{Δ}Γ$ στο σημείο Μ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο T, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

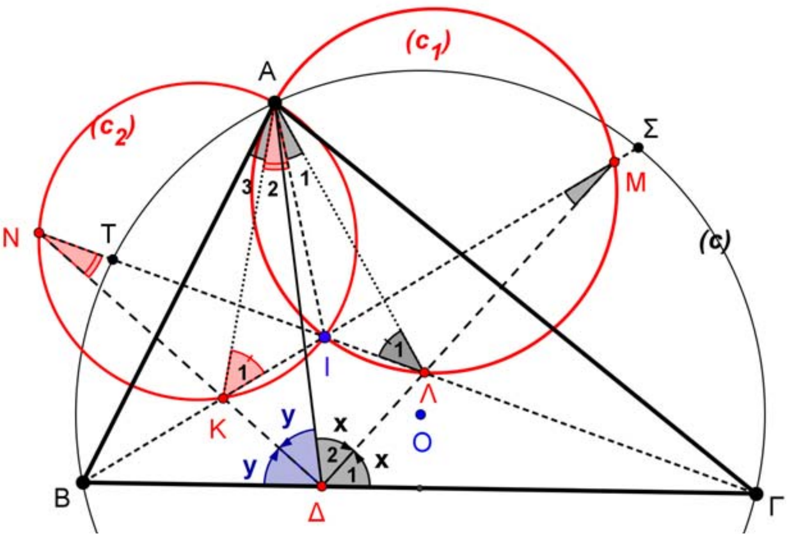
α) Τα σημεία $\mathrm{A, I, \Lambda, M}$ και $\mathrm{A, I, K, N}$ είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους (έστω) (c_1) και (c_2) αντίστοιχα, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

β) Αν η $\mathrm{A\Delta}$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, που αντιστοιχεί στη κορυφή A τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

α) Από την κατασκευή των διχοτόμων συμπεραίνουμε ότι τα σημεία K, Λ είναι τα έκκεντρα των τριγώνων $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ αντίστοιχα.
Ισχύει τώρα η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{A}_1 = \mathrm{I\hat{A}\Gamma} - \Lambda\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\Delta\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{180^0 - 2\hat{x} - \hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - 90^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \hat{x} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$$



Σχήμα 6

Από το τρίγωνο $\mathrm{M\Delta B}$ έχουμε: $\hat{x} = \hat{M} + \frac{\hat{B}}{2} \Leftrightarrow \hat{M} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$, δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{M} = \hat{x} - \frac{\hat{B}}{2}$.
Άρα το τετράπλευρο $\mathrm{AI\Lambda M}$ είναι εγγράψιμο.
Ισχύει επίσης η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{A}_2 = \mathrm{I\hat{A}B} - \mathrm{K\hat{A}B} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\Delta\hat{A}B}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - \frac{180^0 - 2\hat{y} - \hat{B}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} - 90^o + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{y} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από το τρίγωνο $\mathrm{N\Delta\Gamma}$ έχουμε: $\hat{y} = \hat{N} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{N} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, δηλαδή $\hat{A}_2 = \hat{N} = \hat{y} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.
Άρα το τετράπλευρο AIKN είναι εγγράψιμο.

β) Εφόσον I είναι το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\mathrm{A\hat{I}B} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = 90^o + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \text{ και } \mathrm{A\hat{I}\Gamma} = \hat{B} + \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2} = 90^o + \frac{\hat{B}}{2}.$$

Από το τρίγωνο AIK έχουμε:

$$\hat{K}_1 = 180^o - A\hat{I}B - \hat{A}_2 = 180^o - 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{N} = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{y} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^o - \hat{y}.$$

Από το τρίγωνο $AI\Lambda$ έχουμε:

$$\hat{\Lambda}_1 = 180^o - A\hat{I}\Gamma - \hat{A}_1 = 180^o - 90^o - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{M} = 90^o - \frac{\hat{B}}{2} - \hat{x} + \frac{\hat{B}}{2} = 90^o - \hat{x}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $A\Delta \perp B\Gamma$ τότε $\hat{x} = \hat{y} = 45^o$, οπότε $\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$.

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι (οι ίσες γωνίες $\hat{K}_1, \hat{\Lambda}_1$ βαίνουν στη κοινή χορδή AI).

Παρατηρήσεις

α) Τα κέντρα των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκονται επάνω στην ΣT.

β) Το σημείο A είναι το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου $\Delta KI\Lambda MN$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2-5x=14,\quad \frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}.$$

Λύση

Η εξίσωση $x^2-5x=14$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-5)=14$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 14. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm7,\pm14\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 7 και -2.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή τριωνύμου

$$x^2-5x-14=0,\ \text{με}\ \alpha=1,\ \beta=-5,\gamma=-14,$$

οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=81$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=7$ ή $x=-2$.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}\Leftrightarrow 2x-2+x^2-1<x^2-x\Leftrightarrow 3x<3\Leftrightarrow x<1.$$

Επομένως η ζητούμενη ακέραια λύση του συστήματος είναι η $x=-2$.

2. Αν οι α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4.$$

Λύση

$$\begin{aligned}A&=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4\\&=\left(\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2\right)-\left(\alpha^2\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta^3\gamma^2+\beta^4\gamma^2\right)-\left(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^4\right)\\&=\alpha^2\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)-\beta^2\gamma^2\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)-\gamma^2\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\\&=\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)-\gamma^2\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\\&=\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2\right)=\left[\alpha^2-(\beta\gamma)^2\right]\left[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\right]\\&=(\alpha+\beta\gamma)(\alpha-\beta\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma).\end{aligned}$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y}\ ,\ \frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}.$$

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{y}=w$ και απαλείψουμε παρονομαστές, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x-8w=2 \\ x-4w=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+8w \\ x=13+4w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+8w \\ 2+8w=13+4w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+8w \\ 8w-4w=13-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+8w \\ 4w=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+8\cdot\dfrac{11}{4} \\ w=\dfrac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2\cdot 11 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{cases}.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x,y)=\left(24, \dfrac{4}{11}\right)$

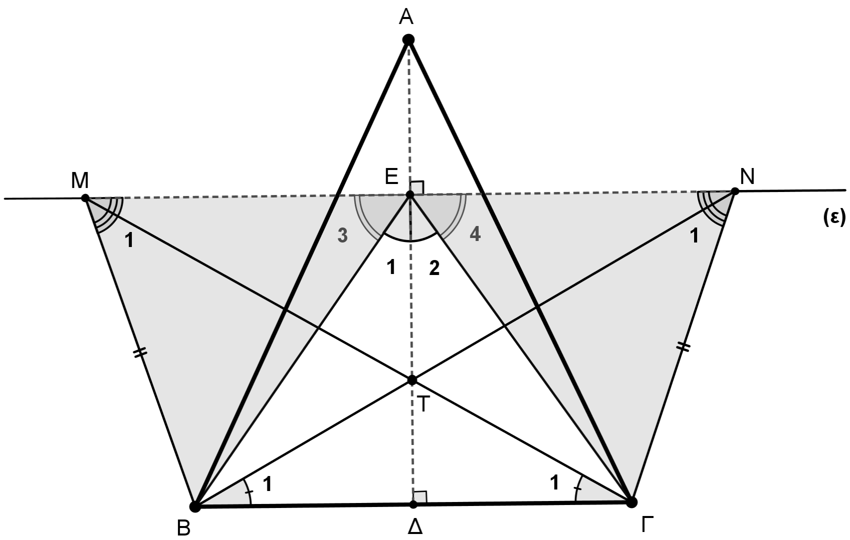
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και το ύψος του $ΑΔ$. Από τυχόν σημείο $Ε$ του ύψους $ΑΔ$ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $ΒΓ$. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $Μ, Ν$ έτσι ώστε $ΕΜ = ΕΝ$ και $ΜΒ < ΜΓ$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΜΓ$ και $ΝΒ$ τέμνονται πάνω στο ύψος $ΑΔ$.

Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα διότι έχουν τις υποτείνουσες $(ΑΒ = ΑΓ)$ και δύο οξείες γωνίες $(\hat{Β} = \hat{Γ})$ ίσες. Άρα $ΔΒ = ΔΓ$, δηλαδή το $Δ$ είναι μέσο της $ΒΓ$.

Τα τρίγωνα τώρα $ΕΔΒ$ και $ΕΔΓ$ είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ($ΕΔ$ κοινή και από τη προηγούμενη ισότητα $ΔΒ = ΔΓ$). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν $\hat{Ε}_1 = \hat{Ε}_2$ και ΕΒ = ΕΓ.

Από την τελευταία ισότητα γωνιών, προκύπτει $\hat{Ε}_3 = \hat{Ε}_4$ γιατί οι γωνίες $\hat{Ε}_3, \hat{Ε}_4$ είναι συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{Ε}_1, \hat{Ε}_2$.



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα $ΕΜΒ$ και $ΕΝΓ$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $ΕΜ = ΕΝ$ (από τα δεδομένα της άσκησης).

2. $ΕΒ = ΕΓ$ (από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων $ΕΔΒ$ και $ΕΔΓ$).

3. $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$ (συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{E}_1, \hat{E}_2$).

Άρα θα έχουν $MB = N\Gamma$ και $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$.

Τα τρίγωνα MNB και $MN\Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $MN = MN$ (η πλευρά MN είναι κοινή).
2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).
3. $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).

Άρα θα έχουν και $M\Gamma = NB$.

Τα τρίγωνα τέλος $MB\Gamma$ και $NB\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $B\Gamma = B\Gamma$ (η πλευρά $B\Gamma$ είναι κοινή)
2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$)
3. $M\hat{B}\Gamma = M\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = N\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}B = N\hat{\Gamma}B$

Άρα θα έχουν και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Αν τώρα συμβολίσουμε με T το σημείο τομής των $M\Gamma$ και NB, σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$, συμπεραίνουμε ότι η $T\Delta$ είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $TB\Gamma$, δηλαδή η $T\Delta$ είναι κάθετη προς τη $B\Gamma$ στο σημείο Δ. Άρα το σημείο T, θα ανήκει στο ύψος $A\Delta$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$
$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$
$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z.

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες προκύπτει ότι πρέπει να αληθεύουν οι περιορισμοί: $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$, αλλά και οι περιορισμοί $x^2 \geq y + z,\ y^2 \geq z + x$ και $z^2 \geq x + y$. Στη συνέχεια με ύψωση στο τετράγωνο των δύο μελών των δεδομένων εξισώσεων λαμβάνουμε

$$\begin{Bmatrix} x^2 - y - z = x^2 - 4x + 4 \\ y^2 - z - x = y^2 - 4y + 4 \\ z^2 - x - y = z^2 - 4z + 4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4x - y - z = 4 \\ -x + 4y - z = 4 \\ -x - y + 4z = 4 \end{Bmatrix}, \qquad (1)$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε: $x + y + z = 6$.

Οι αριθμοί x, y, z προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος (1), αν τις γράψουμε στη μορφή

$$\begin{Bmatrix} 5x - (x + y + z) = 4 \\ 5y - (x + y + z) = 4 \\ 5z - (x + y + z) = 4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5x - 6 = 4 \\ 5y - 6 = 4 \\ 5z - 6 = 4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{Bmatrix}.$$

Διαφορετικά, αν υποθέσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις ανισότητες $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$ αληθεύει μόνον ως γνήσια ανισότητα, έστω $x > 2$, τότε με πρόσθεση αυτών κατά μέλη προκύπτει ότι $x + y + z > 6$, που είναι άτοπο. Άρα θα είναι $x = y = z = 2$.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι κύκλοι $c_1(A, AB)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_1 = AB$) και $c_2(A, A\Gamma)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_2 = A\Gamma$). Ο κύκλος $c_1(A, AB)$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο E και την ευθεία AB στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(A, A\Gamma)$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο N.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Gamma A = \Gamma B$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι τετράγωνο.

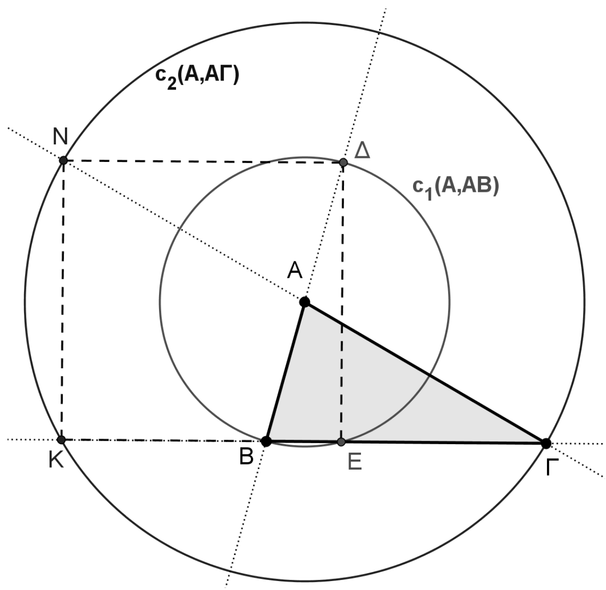
Λύση

α. Η $B\Delta$ (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_1(A, AB)$, οπότε A είναι το μέσο του $B\Delta$ και $B\hat{E}\Delta = 90^o$.
Η ΓN (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_2(A, A\Gamma)$, οπότε A είναι το μέσο του ΓN και $\Gamma\hat{K}N = 90^o$.

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $N\Delta\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιες του διχοτομούνται, οπότε $N\Delta = // B\Gamma$.

Από την ισότητα $B\hat{E}\Delta = \Gamma\hat{K}N = 90^o$ προκύπτει ότι οι ευθείες NK και ΔE είναι κάθετες προς την ευθεία $B\Gamma$, οπότε θα είναι $NK // \Delta E$.

Από τις προηγούμενες παραλληλίες συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι παραλληλόγραμμο και από την ισότητα $B\hat{E}\Delta = \Gamma\hat{K}N = 90^o$ καταλήγουμε στο ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι ορθογώνιο.



Σχήμα 5

.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $NK\Gamma$ ισχύει $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε η κάθετη πλευρά απέναντι από τη γωνία Γ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Άρα θα έχουμε

$$KN = \frac{N\Gamma}{2} = A\Gamma = B\Gamma,$$

οπότε, λόγω της ισότητας $N\Delta = B\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι $KN = N\Delta$, δηλαδή δύο διαδοχικές πλευρές του ορθογώνιου ΔEKN είναι ίσες, οπότε αυτό είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση
Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{4x^2+4x+1}{x}+\frac{4y^2+4y+1}{y}\ge 25$$

$$\text{ή αρκεί: } 4(x+y)+8+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 25$$

$$\text{ή αρκεί: } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 1.$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να προκύψει με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι μέσω της σχέσης

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 4,$$

αν θέσουμε $x+y=4$, η οποία αληθεύει γιατί

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge 2+2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=4.$$

Η ισότητα ισχύει για $x=y=2$.

Διαφορετικά, αρκεί να γράψουμε

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 1\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\ge 1\Leftrightarrow xy\le 4\Leftrightarrow x(4-x)\le 4\Leftrightarrow x^2-4x+4\ge 0$$

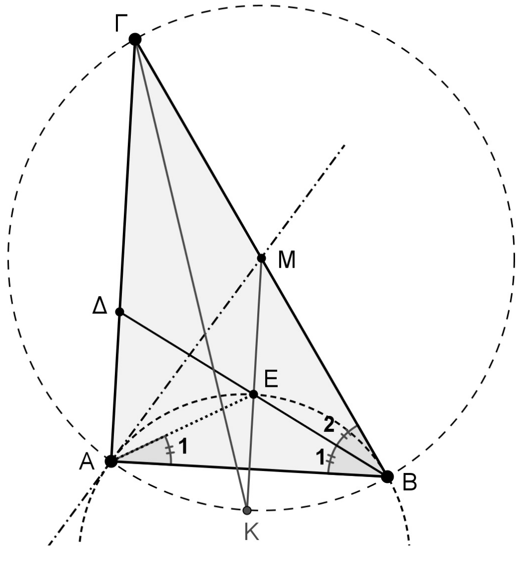
$$\Leftrightarrow (x-2)^2\ge 0, \text{ που ισχύει.}$$

Στην τελευταία σχέση η ισότητα ισχύει για $x=y=2$, οπότε και η ζητούμενη σχέση αληθεύει ως ισότητα για $x=y=2$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) και έστω Ε το μέσο της διχοτόμου ΒΔ. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΕΒ στο σημείο Α τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΕ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Επειδή Ε είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ, θα ισχύει:



Σχήμα 6

$EA = EB$. Άρα το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$.

Επειδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, θα ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ και αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$, καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$. Άρα η ΓB είναι εφαπτόμενη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AEB και κατά συνέπεια $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε ως εξής:

Οι γωνίες $M\hat{A}E$ και $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι και οι δύο οξείες και η $M\hat{A}E$ είναι γωνία χορδής – εφαπτομένης, ενώ η $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AE του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB. Επομένως θα είναι $M\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2}$, οπότε $M\hat{A}B = \hat{B}$ και το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Το σημείο M είναι το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$, οπότε είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Τελικά η ME είναι η μεσοκάθετη της πλευράς AB, οπότε θα διέρχεται από το μέσο K του τόξου AB, από το οποίο διέρχεται και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

Λύση (1^ος^ τρόπος)

Αν θέσουμε $a=2x^2+3x+1,\ b=x^2+3x+2$, τότε $a-b=x^2-1$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} a^3-b^3=7(a-b)^3 &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=7(a-b)^3\\ &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2-7a^2+14ab-7b^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow -(a-b)\left(6a^2-15ab+6b^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow a-b=0 \text{ ή } 2a^2-5ab+2b^2=0\\ &\Leftrightarrow a=b \text{ ή } a=2b \text{ ή } 2a=b\\ &\Leftrightarrow x^2-1=0 \text{ ή } -3x-3=0 \text{ ή } 3x^2+3x=0\\ &\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=-1\\ &\Leftrightarrow x=-1 \text{ (τριπλή ρίζα) ή } x=0 \text{ ή } x=1. \end{aligned}$$

2^ος^ τρόπος

Παρατηρούμε ότι και στους τρεις όρους των δύο μελών της εξίσωσης υπάρχει ο κοινός παράγοντας $(x+1)^3$, οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

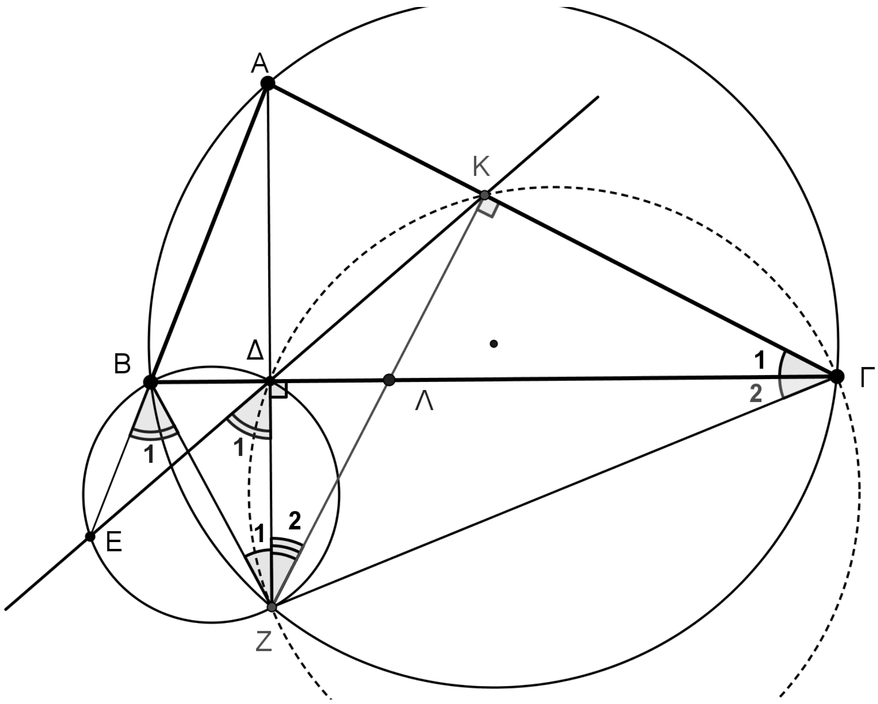
$$\begin{aligned} &(x+1)^3\left[(2x+1)^3-(x+2)^3-7(x-1)^3\right]=0 \Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα})\\ &\text{ή } 8x^3+12x^2+6x+1-x^3-6x^2-12x-8-7x^3+21x^2-21x+7=0\\ &\qquad\Leftrightarrow x=-1(\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } 27x^2-27x=0\\ &\qquad\Leftrightarrow x=-1(\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=1. \end{aligned}$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Το ύψος του $ΑΔ$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο $Ζ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΔΖ$ τέμνει την ευθεία $ΑΒ$ στο σημείο $Ε$. Αν η ευθεία $ΕΔ$ τέμνει την ευθεία $ΑΓ$ στο $Κ$ και η ευθεία $ΖΚ$ την $ΒΓ$ στο σημείο $Λ$, να αποδείξετε ότι το σημείο $Δ$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $ΒΛ$.

Λύση

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΖΓ$ έχουμε: $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΔΖΕ$ έχουμε: $\hat{B}_1=\hat{\Delta}_1$.



Σχήμα 7

Από τις δύο προηγούμενες ισότητες γωνιών προκύπτει $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$, οπότε το τετράπλευρο ΔΚΓΖ είναι εγγράψιμο. Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΖΓ έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$, δηλαδή στο τρίγωνο ΒΖΛ η ΖΔ είναι ύψος και διχοτόμος.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε “γύρους”. Στον πρώτο “γύρο” ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου “γύρου” κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο “γύρο” ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου “γύρου”. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κλπ.

α. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.

β. Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρεθεί ο αριθμός των αθλητών που συμμετείχαν.

Λύση

Από την ανάλυση των κανόνων διεξαγωγής του τουρνουά μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω:

Στο 1^o γύρο συμμετέχουν 2^m αθλητές, γίνονται 2^{m-1} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-1} νικητές.

Στο $2^{\text{ο}}$ γύρο συμμετέχουν 2^{m-1} αθλητές, γίνονται 2^{m-2} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-2} νικητές.

Στο $3^{\text{ο}}$ γύρο συμμετέχουν 2^{m-2} αθλητές, γίνονται 2^{m-3} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-3} νικητές και ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία στο $m^{\text{ο}}$ γύρο βρίσκουμε ότι συμμετέχουν $2^{m-m+1} = 2^1 = 2$ αθλητές, γίνεται $2^{m-m} = 2^0 = 1$ αγώνας και ανακηρύσσεται $2^{m-m} = 2^0 = 1$ νικητής.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

Συνολικά γίνονται m "γύροι" και $2^{m-1} + 2^{m-2} + 2^{m-3} + \cdots + 2 + 1 = 2^m - 1$ αγώνες.

Στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\alpha^n - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1).$$

α. Αν τώρα ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε $m = 3k$, όπου k θετικός ακέραιος, και το συνολικό πλήθος των αγώνων γράφεται:

$$2^m - 1 = 2^{3k} - 1 = \left(2^3\right)^k - 1 = 8^k - 1 = (8-1)(8^{k-1} + 8^{k-2} + \cdots + 1) = 7n,$$

όπου n θετικός ακέραιος.

β. Ο πρωταθλητής έχει παίξει και στους m γύρους, οπότε οι βαθμοί που θα συγκεντρώσει είναι:

$$10 + 20 + 30 + \cdots + (m \cdot 10) = 10(1 + 2 + 3 + \cdots + m) = 10 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = 5m(m+1).$$

Άρα προκύπτει η εξίσωση:

$$5m(m+1) = 210 \Leftrightarrow m(m+1) = 42 \Leftrightarrow m = 6,$$

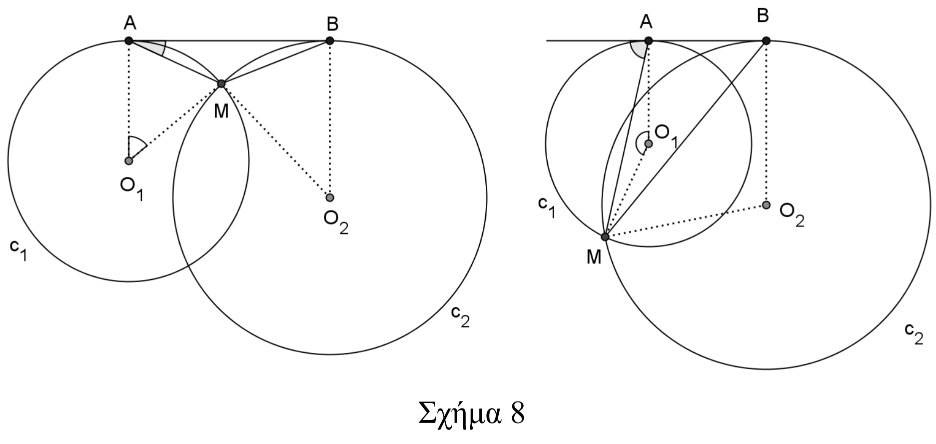
δηλαδή συμμετείχαν $2^6 = 64$ αθλητές.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1 = (O_1, r_1)$ και $c_2 = (O_2, r_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των c_1, c_2 και ισχύει $r_1 < r_2$, να αποδείξετε ότι $MA < MB$.

Λύση

Είναι $MA = 2r_1 \cdot \eta\mu\left(\dfrac{M\hat{O}_1A}{2}\right)$ και $MB = 2r_2 \cdot \eta\mu\left(\dfrac{M\hat{O}_2B}{2}\right)$, οπότε

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot \eta\mu\left(\dfrac{M\hat{O}_1A}{2}\right)}{r_2 \cdot \eta\mu\left(\dfrac{M\hat{O}_2B}{2}\right)}. \qquad (1)$$



Σχήμα 8

Η γωνία $\frac{M\hat{O}_1A}{2}$ ισούται πάντοτε με μια από τις δύο γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB, και επειδή αυτές οι δύο είναι παραπληρωματικές μεταξύ τους, τα ημίτονα και των τριών γωνιών είναι ίσα. Καθώς $M\hat{A}B$ είναι μια από τις γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB θα έχουμε $\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right) = \eta\mu(M\hat{A}B)$. Ομοίως, ισχύει ότι $\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right) = \eta\mu(M\hat{B}A)$ και η σχέση (1) γράφεται

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot \eta\mu(M\hat{A}B)}{r_2 \cdot \eta\mu(M\hat{B}A)} \qquad (2)$$

Από το θεώρημα ημιτόνων στο τρίγωνο MAB έχουμε $\frac{\eta\mu(M\hat{A}B)}{\eta\mu(M\hat{B}A)} = \frac{MB}{MA}$, οπότε η σχέση (2) δίνει

$$\frac{MA}{MB} = \frac{r_1 \cdot MB}{r_2 \cdot MA} \Rightarrow \left(\frac{MA}{MB}\right)^2 = \frac{r_1}{r_2} < 1 \Rightarrow MA < MB.$$

Σημείωση

Η προηγούμενη λύση αφορά τεμνόμενους κύκλους, αλλά και κύκλους εφαπτόμενους εξωτερικά.

Τα σημεία A, B, M πάντοτε δημιουργούν τρίγωνο, αφού τα A, B είναι διακεκριμένα από την υπόθεση, και το M δεν μπορεί να ταυτιστεί με κανένα από τα A, B (αφού σε διαφορετική περίπτωση η ευθεία AB θα είχε με κάποιον από τους δοσμένους κύκλους δύο τουλάχιστον κοινά σημεία και δεν θα ήταν εφαπτομένη του).

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Λύση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε από τα δεδομένα του προβλήματος θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2 - 10x = 75 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 75 = 0 \Leftrightarrow x = 15 \text{ ή } x = -5.$$

Επειδή ο ζητούμενος αριθμός είναι θετικός, η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός 15.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν οι αριθμοί μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \le 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\mathrm{A} = 2^{\mu} + 2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Λύση.

Η δεδομένη σχέση γράφεται στη μορφή

$$\left(2^2\right)^{\mu-2} + \left(2^2\right)^{\nu+2} - 2\cdot 2^{\mu+\nu} \le 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2}\right)^2 + \left(2^{\nu+2}\right)^2 - 2\cdot 2^{\mu+\nu} \le 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2} - 2^{\nu+2}\right)^2 \le 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$2^{\mu-2} - 2^{\nu+2} = 0 \Leftrightarrow 2^{\mu-\nu-4} = 1 \Leftrightarrow \mu - \nu - 4 = 0.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A} = 2^{\mu} + 2^{\nu} = 2^{\nu+4} + 2^{\nu} = 2^{\nu}\cdot\left(2^4 + 1\right) = 17\cdot 2^{\nu} = 34\cdot 2^{\nu-1},$$

που είναι πολλαπλάσιο του 34, αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

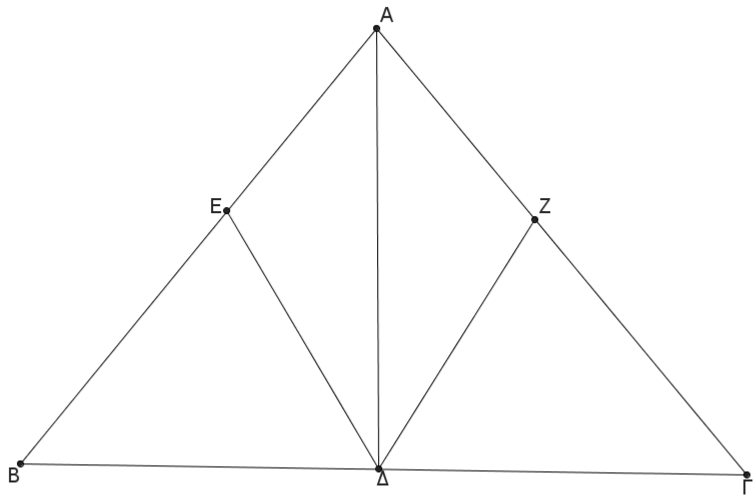
(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος του Α, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

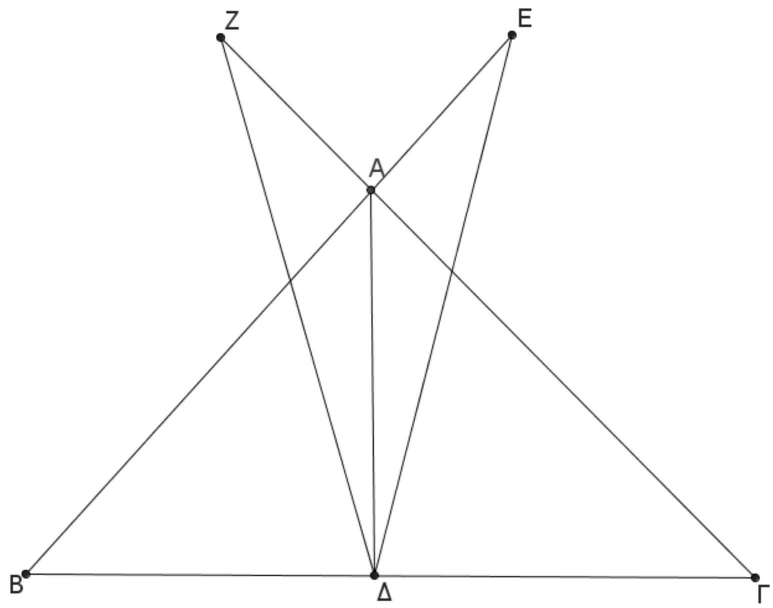
(α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($\mathrm{A}\Delta = \mathrm{A}\Delta, \Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$) και τις περιεχόμενες γωνίες των ίσων πλευρών ίσες, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, τα οποία είναι ορθογώνια με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ και έχουν την πλευρά ΑΔ κοινή και τις οξείες γωνίες

$\Delta\hat{A}B$ και $\Delta\hat{A}\Gamma$ ίσες. Άρα τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα , οπότε θα έχουν και $AB = A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές



Σχήμα 4



Σχήμα 5

(β) Ομοίως όπως στο ερώτημα (α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z.$$

Επειδή οι γωνίες $\Gamma\hat{A}E$ και $B\hat{A}Z$ είναι ίσες ως κατά κορυφή, έπεται ότι:

$$\Delta\hat{A}E - \Gamma\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z - B\hat{A}Z \Rightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B,$$

οπότε και στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Στη συνέχεια προχωράμε όπως στο ερώτημα (α).
Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ προκύπτει και η ισότητα $\Delta\hat{Z}A = \Delta\hat{E}A$, οπότε εύκολα προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΔΓΖ είναι ίσα, οπότε θα είναι $\Delta B = \Delta\Gamma$, η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Άρα είναι ΑΒ = ΑΓ.
Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό θεώρημα της Γεωμετρίας, βάσει του οποίου, αν σε ένα τρίγωνο ένα ύψος του είναι και διχοτόμος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4^o

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή (όταν βέβαια είναι γεμάτη) σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν (για να γεμίσει η δεξαμενή) να είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Λύση

Έστω x, ο αριθμός των ωρών που χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή. Τότε οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός (μαζί με τις αντίστοιχες εξισώσεις που δημιουργούνται) είναι:

(1) Α-Β-Γ $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-2}{4}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+6-6 \Leftrightarrow x=\frac{12}{5}$

(2) Β-Α-Γ $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+8-6 \Leftrightarrow x=\frac{14}{5}$

(3) Α-Γ-Β $\quad \frac{x}{3}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{4}=1 \Leftrightarrow 5x=12+9-4 \Leftrightarrow x=\frac{17}{5}$

(4) Β-Γ-Α $\quad \frac{x}{4}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{3}=1 \Leftrightarrow 5x=12+12-4 \Leftrightarrow x=4$

(5) Γ-Β-Α $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+4 \Leftrightarrow x=\frac{16}{5}$

(6) Γ-Α-Β $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-1}{4}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+3 \Leftrightarrow x=3$

Ένας τρόπος ανοίγματος είναι Β-Γ-Α με αντίστοιχη διάρκεια $x=4$ ώρες (περίπτωση **(4)**).
Ένας δεύτερος τρόπος ανοίγματος είναι Γ-Α-Β με αντίστοιχη διάρκεια $x=3$ ώρες (περίπτωση **(6)**).
Στη περίπτωση **(4)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Β), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Β.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Β θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{4}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Γ η οποία θα λειτουργήσει $x-2$ ώρες και θα αδειάσει τα $\frac{x-2}{6}$ της δεξαμενής. Τέλος θα ανοίξει η βρύση Α η οποία θα λειτουργήσει $x-3$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-3}{3}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(4)**.

Στη περίπτωση **(6)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Γ), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Α (διότι ο μηχανισμός χρονομέτρησης αρχίζει μόλις πέσει νερό στη δεξαμενή).

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Α θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{3}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Β η οποία θα λειτουργήσει $x-1$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-1}{4}$ της δεξαμενής.

Τέλος η βρύση Γ θα λειτουργήσει x ώρες, και θα αδειάσει τα $\frac{x}{6}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(6)**.

Ανάλογα εξηγούνται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^o (

Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (1)$$

που ισχύει γιατί είναι ισοδύναμη με την αληθή ανισότητα $0 \leq \left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2$.

Επιπλέον έχουμε

$$\frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, \qquad (2)$$

η οποία ισχύει γιατί γράφεται ως

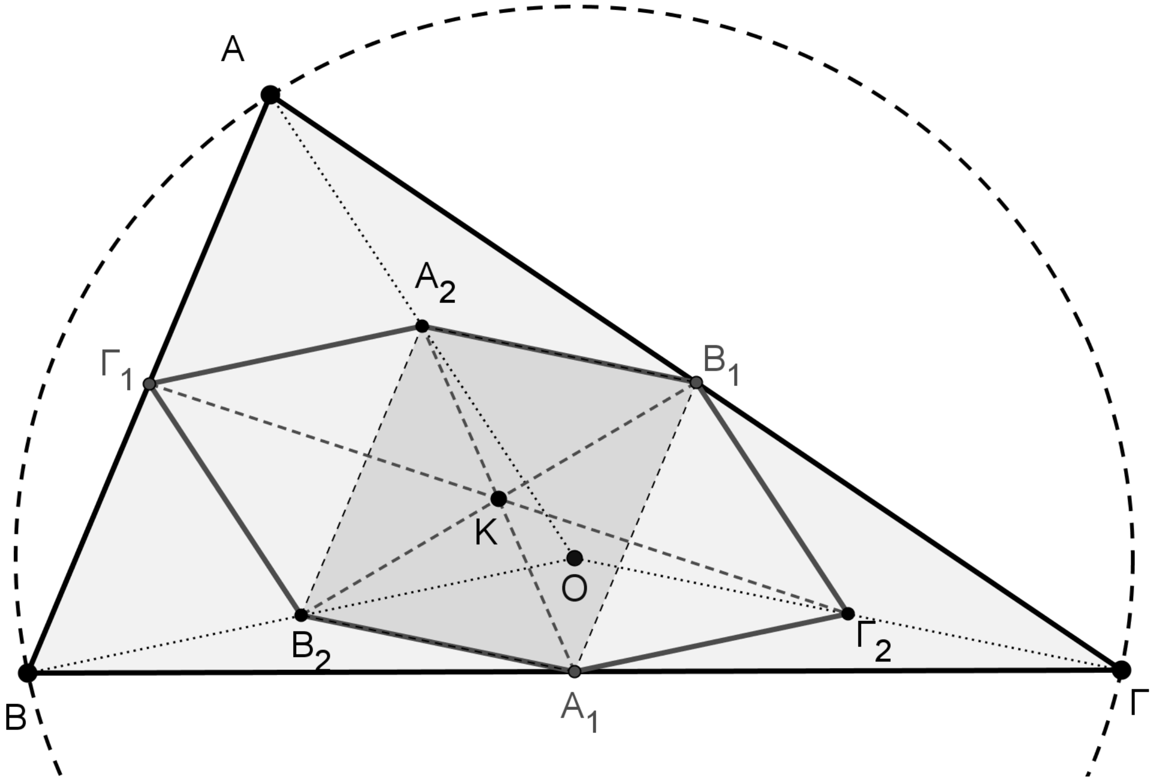
$$\frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq (\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (\alpha-\beta)^2.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των δύο ανισοτήτων (1) και (2) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2ο .
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν A_1, B_1, Γ_1 είναι τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα και A_2, B_2, Γ_2 είναι τα μέσα των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $A_2B_1\Gamma_2A_1B_2\Gamma_1$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του A_1A_2, B_1B_2 και $\Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση
Εφόσον Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, θα ισχύει: $OA = OB = O\Gamma = R$.



Σχήμα 6

Το ευθύγραμμο τμήμα A_2B_1 συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΟΑΓ, άρα:

$$A_2B_1 = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{R}{2} \qquad (1).$$

Το ευθύγραμμο τμήμα A_1B_2 συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΟΒΓ, άρα:

$$A_1B_2 = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{R}{2} \qquad (2).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι όλες οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες με $\frac{R}{2}$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $A_1B_1A_2B_2$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται στο σημείο K.

Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $A_1\Gamma_2A_2\Gamma_1$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και σε αυτή τη περίπτωση οι διαγώνιες θα διχοτομούνται στο σημείο K.

ΘΕΜΑ 3^o .

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\frac{x-y+2}{2}.$$

Λύση

Οι άρρητες παραστάσεις ορίζονται γιατί δίνεται ότι: $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$.

Αν θέσουμε $\sqrt{x-2009}=a$ και $\sqrt{y+2009}=b$, τότε λαμβάνουμε $x=a^2+2009$ και $y=b^2-2009$, από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση $x+y=a^2+b^2$.

Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$a+b=\frac{a^2+b^2}{2}+1 \Leftrightarrow a^2+b^2-2a-2b+2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow a-1=b-1=0 \Leftrightarrow a=b=1,$$

οπότε θα είναι $x=2010, y=-2008$ και $A=2010$.

ΘΕΜΑ 4^o

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l}(x+y)^3=z-2x-y\\(y+z)^3=x-2y-z\\(z+x)^3=y-2z-x\end{array}\right\} \qquad (\Sigma)$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λύση

Θέτουμε $x+y=\alpha$, $y+z=\beta$ και $z+x=\gamma$, οπότε το δοσμένο σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha^3+2\alpha=\beta\\\beta^3+2\beta=\gamma\\\gamma^3+2\gamma=\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha(\alpha^2+2)=\beta\\\beta(\beta^2+2)=\gamma\\\gamma(\gamma^2+2)=\alpha\end{array}\right.$$

Από τη τελευταία έκφραση του συστήματος συμπεραίνουμε ότι έχει τη προφανή λύση:

$$\alpha=\beta=\gamma=0.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση.

Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ τότε πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις έχουμε:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=1.$$

Η τελευταία ισότητα δεν είναι δυνατό να ισχύει , οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha=0$ τότε θα ισχύει: $\beta=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\beta=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\gamma=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\beta=0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Άρα το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2+3x(x-2)+11x-10y=2015.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x(x+1)-2y=403\ . \qquad (1)$$

Επειδή για όλους τους θετικούς ακέραιους x, y οι αριθμοί $x(x+1)$ και $2y$ είναι άρτιοι θετικοί ακέραιοι και η διαφορά τους $x(x+1)-2y$ θα είναι άρτιος θετικός ακέραιος, οπότε δεν είναι δυνατόν να ισούται με 403.

ΘΕΜΑ 2^{o}

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\left(x-f(y)\right)-f\left(y-f(x)\right)=2f\left(f(x)-f(y)\right)\text{ , για κάθε } x, y\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξτε ότι $f(x-f(x))=0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το x και παίρνουμε:

$$f(x-f(x))-f(x-f(x))=2f(f(x)-f(x)),$$

οπότε θα είναι $f(0)=0$.

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου x το 0 και παίρνουμε:

$$f(0-f(y))-f(y-f(0))=2f(f(0)-f(y))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0)=0$, καταλήγουμε:

$$f(-f(y))-f(y)=2f(-f(y))\Leftrightarrow f(-f(y))=-f(y).$$

Θέτουμε (στη τελευταία ισότητα) όπου y το x και έχουμε τη σχέση:

$$f\left(-f(x)\right)=-f(x). \qquad (1)$$

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το 0 και παίρνουμε:

$$f(x-f(0))-f(0-f(x))=2f(f(x)-f(0))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0)=0$, καταλήγουμε:

$$f(x)-f\left(-f(x)\right)=2f\left(f(x)\right). \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $f(f(x)) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Θέτουμε τέλος στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το $f(x)$ και χρησιμοποιώντας τη προηγούμενη ισότητα έχουμε $f(x - f(x)) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3ο.

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί της μορφής $\overline{\boldsymbol{\alpha}\underbrace{\mathbf{000\cdots000}}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\boldsymbol{\alpha}}$, όπου $\boldsymbol{\alpha}$ είναι θετικός <u>μονοψήφιος</u> ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{00\cdots00}\boldsymbol{\alpha}}$, μεσολαβούν $\boldsymbol{2\nu}$ το πλήθος μηδενικά. Να αποδείξετε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το $\boldsymbol{33}$ ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το $\boldsymbol{33}$".

Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι κάθε αριθμός της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$ διαιρείται με το 11. Πράγματι, κάθε αριθμός της παραπάνω μορφής γράφεται;

$$\begin{aligned}\overline{\alpha 00\cdots00\alpha} &= \alpha\cdot 10^0 + 0\cdot 10^1 + \cdots + 0\cdot 10^{2\nu} + \alpha\cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha + \alpha\cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha(1+10^{2\nu+1}) = \\ &= \alpha(1+10)(\underbrace{10^{2\nu} - 10^{2\nu-1} + \cdots + 1}_{\kappa}) = 11\alpha\cdot\kappa.\end{aligned}$$

Έστω τώρα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τρεις οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί. της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$. Θα αποδείξουμε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 3 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 3". **(1)**

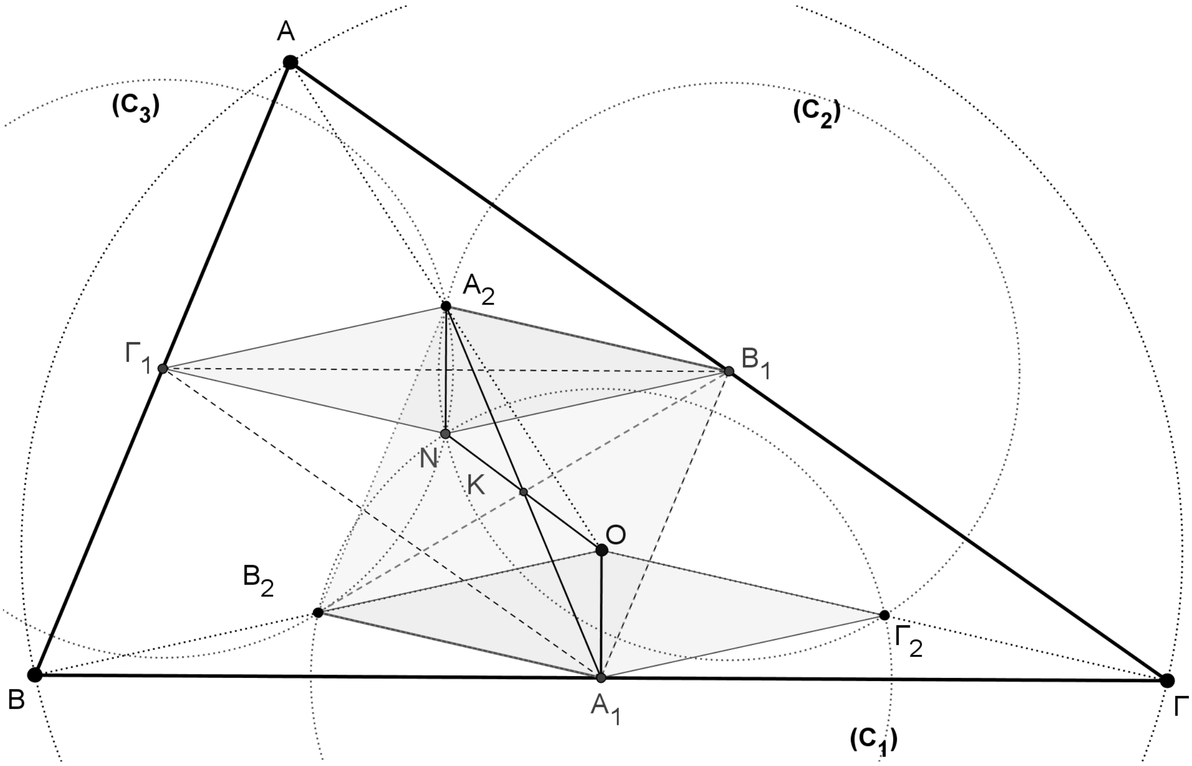
Αν κάποιος από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ διαιρείται με το 3, τότε προφανώς θα ισχύει η πρόταση.
Έστω ότι το 3 δεν διαιρεί κανένα από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
Τότε υπάρχουν οι παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:
1) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k+1$, τότε προφανώς $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 3m$
2) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k+2$, τότε προφανώς $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 3n$
Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ένας τουλάχιστον αριθμός θα είναι της μορφής $3k+1$ και ένας τουλάχιστον της μορφής $3k+2$, οπότε το άθροισμα αυτών των δύο αριθμών θα είναι προφανώς πολλαπλάσιο του τρία.
Επειδή καθένας από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ της μορφής $\overline{\alpha 00\cdots00\alpha}$ διαιρείται με το 11, έπεται ότι και το άθροισμα οσωνδήποτε από αυτούς θα διαιρείται με το 11.
Λαμβάνοντας υπόψιν τις προηγούμενες προτάσεις, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4ο .

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(A_1, \frac{R}{2})$, $C_2(B_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω N) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα A_2, B_2, Γ_2 των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξτε ότι οι A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$ και ON περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$. Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\lambda = \frac{1}{2}$, οπότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ θα έχει ακτίνα $\frac{R}{2}$.



Σχήμα 7

Οι κύκλοι τώρα που έχουν κέντρα τις κορυφές του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ και ακτίνα $\frac{R}{2}$ θα περνάνε από το περίκεντρο N του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. (Το σημείο N είναι το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου $AB\Gamma$)

Αν A_2, B_2, Γ_2 είναι τα μέσα των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα, τότε:

$$A_1B_2 = A_1\Gamma_2 = B_1A_2 = B_1\Gamma_2 = \Gamma_1A_2 = \Gamma_1B_2 = \frac{R}{2}.$$

(Τα παραπάνω τμήματα $A_1B_2, A_1\Gamma_2, B_1A_2, B_1\Gamma_2, \Gamma_1A_2, \Gamma_1B_2$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα των ορθογωνίων τριγώνων OA_1B, $OA_1\Gamma$, OB_1A, $OB_1\Gamma$, $O\Gamma_1A$ και $O\Gamma_1B$.)

Άρα τα δεύτερα κοινά σημεία των κύκλων $C_1(A_1, \frac{R}{2})$, $C_2(B_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$ είναι τα σημεία A_2, B_2, Γ_2.

Τα τετράπλευρα $\Gamma_1 N B_1 A_2$ και $O B_2 A_1 \Gamma_2$ είναι ρόμβοι με πλευρές μήκους $\frac{R}{2}$ και οι πλευρές του ενός τετραπλεύρου, είναι παράλληλες με τις πλευρές του άλλου ($A_2B_1 = // B_2A_1$, $\Gamma_1 A_2 = // A_1\Gamma_2, \ldots$).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Το τετράπλευρο $A_2 O A_1 N$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η A_1A_2 περνά από το μέσο K του ON που είναι μέσο και του A_1A_2.

Το τετράπλευρο $\Gamma_1 A_2 \Gamma_2 A_1$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η $\Gamma_1\Gamma_2$ περνά από το μέσο K του A_1A_2 που είναι μέσο και του $\Gamma_1\Gamma_2$.

Τέλος το τετράπλευρο $B_1\Gamma_1 B_2 \Gamma_2$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η B_1B_2 και περνά από το μέσο K του $\Gamma_1\Gamma_2$ που είναι μέσο και του B_1B_2.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση
$$\frac{x}{8}+\frac{x}{4}+1255=x \Leftrightarrow x-\frac{x}{8}-\frac{x}{4}=1255 \Leftrightarrow \frac{5x}{8}=1255 \Leftrightarrow x=\frac{1255\cdot 8}{5}=2008.$$

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε:
$$0 \leq x \leq y \leq z,$$
$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44.$$

Λύση
Η τελευταία εξίσωση γράφεται:
$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44$$
$$\Leftrightarrow xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=45$$
$$\Leftrightarrow xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)=45$$
$$\Leftrightarrow (xy+x+y+1)(z+1)=45$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1)=45. \qquad (1)$$
Επειδή οι x, y, z είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $x \leq y \leq z$, έπεται ότι:
$$1 \leq x+1 \leq y+1 \leq z+1. \qquad (2)$$
Από τις (1) και (2) και αφού $45=1\cdot 3\cdot 3\cdot 5$ προκύπτουν οι περιπτώσεις
$$(x+1, y+1, z+1)=(1,3,15) \text{ ή } (1,5,9) \text{ ή } (3,3,5) \text{ ή } (1,1,45)$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,\,2,\,14) \text{ ή } (0,\,4,\,8) \text{ ή } (2,\,2,\,4) \text{ ή } (0,0,44).$$

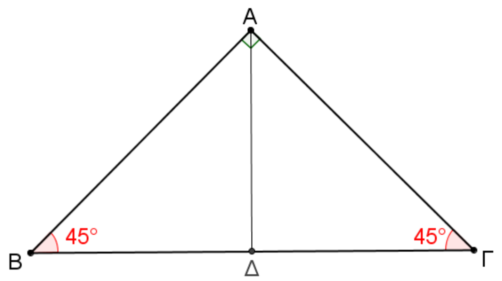
3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων που έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:
"*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*".
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις)

Λύση
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$).
1η περίπτωση.
Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά ΒΓ ώστε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ να είναι ισοσκελή. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

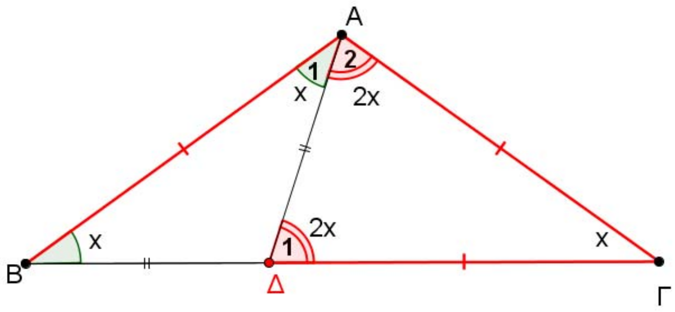
- Αν είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\hat{\mathrm{B}}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}$ τότε ισχύουν οι ισότητες των γωνιών (σχ. 3) : $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\hat{x}$ και $\hat{\mathrm{A}}_2=\hat{\Delta}_1=2\hat{x}$, (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε από τη σχέση $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180$ καταλήγουμε στην εξίσωση:
$$5\hat{x}=180^o \Leftrightarrow \hat{x}=36^o.$$
Στη περίπτωση αυτή είναι $\hat{\mathrm{A}}=108^o$ και $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=36^o$.

- Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ με ίσες γωνίες $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ και $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}$, τότε προκύπτουν οι ίδιες γωνίες για το τρίγωνο ΑΒΓ.

Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma\Delta$ με ίσες γωνίες $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ και $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}A$, τότε προκύπτουν οι γωνίες $\hat{A} = 90^{\circ}$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^{0}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Πράγματι, από τις ισότητες $\hat{B} = B\hat{A}\Delta$ και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}\Gamma$ έπεται ότι: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A} \Rightarrow 180^{o} - \hat{A} = \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 90^{o}$, οπότε θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^{o}$.



Σχήμα 3α



Σχήμα 3β

2η περίπτωση.

Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά $A\Gamma$ ώστε τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma\Delta$ να είναι ισοσκελή και διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $A\hat{B}\Delta = \hat{A}$ και $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma}$, τότε (σχ. 4) ισχύουν οι ισότητες των γωνιών:

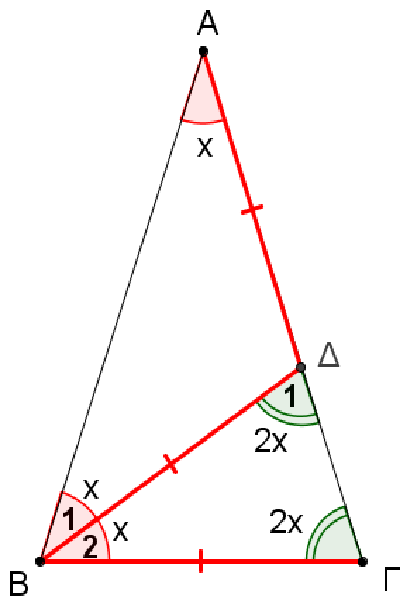
$$\hat{A} = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x}$$

$$\text{και } \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} = 2\hat{x},$$

αφού η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΑΒ, οπότε

$$\hat{x} + \hat{B}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 2x \Rightarrow \hat{B}_2 = x.$$

Από τη σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^{0}$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

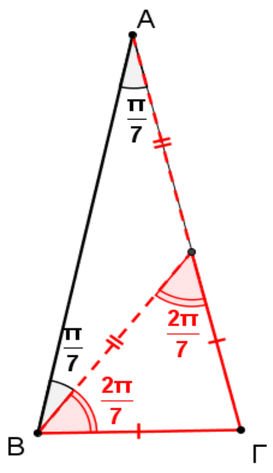


Σχήμα 4

$$5\hat{x} = 180^{o} \Leftrightarrow \hat{x} = 36^{o}.$$

Στη περίπτωση αυτή είναι:

$$\hat{A} = 36^{o} \text{ και } \hat{B} = \hat{\Gamma} = 72^{o}.$$



Σχήμα 5

- Αν $A\hat{B}\Delta = \hat{A} = x$ και $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{B}\Delta = y$, τότε θα έχουμε $y = 2x$ και $3x + 2y = \pi$.οπότε λαμβάνουμε τελικά τις γωνίες

$$\hat{A} = \frac{\pi}{7},\ \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{3\pi}{7}.$$

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί $x,\ y$ και z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2-y=z^2,\ y^2-z=x^2,\ z^2-x=y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

(β) Ένας τουλάχιστον από τους $x,\ y,\ z$ ισούται με 0.

Λύση

(α) Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών δεδομένων ισοτήτων λαμβάνουμε:

$$x^2+y^2+z^2-(x+y+z)=x^2+y^2+z^2 \Rightarrow$$

$$x+y+z=0, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει άμεσα το ερώτημα (α), αφού τότε είναι $z=-(x+y)$ και

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= x^3+y^3+\left[-(x+y)\right]^3 \\ &= x^3+y^3-x^3-y^3-3xy(x+y) \\ &= -3xy(-z)=3xyz. \end{aligned}$$

(β) Από την ισότητα $x+y+z=0$ προκύπτει ότι $z=-x-y$, οπότε η ισότητα $x^2-y=z^2$ γίνεται

$$x^2-y=(x+y)^2 \Leftrightarrow -y=2xy+y^2$$

$$\Leftrightarrow y\cdot(y+2x+1)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ή } y=-2x-1.$$

- Για $y=0$ λαμβάνουμε $x+z=0 \Leftrightarrow z=-x$, οπότε η δεύτερη και η τρίτη των δεδομένων σχέσεων γίνονται:

$$x=x^2 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1,$$

οπότε έχουμε τις τριάδες

$$(x,y,z)=(0,0,0) \text{ ή } (1,0,-1).$$

- Για $y=-2x-1$ από την (1) λαμβάνουμε

$$z=-x-y=x+1,$$

οπότε με αντικατάσταση των y,z στις αρχικές σχέσεις προκύπτει η εξίσωση

$$x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-1.$$

Έτσι λαμβάνουμε και τις τριάδες

$$(x,y,z)=(0,-1,1) \text{ ή } (-1,1,0).$$

Από την εύρεση όλων των δυνατών τριάδων προέκυψε ότι σε κάθε περίπτωση ένας τουλάχιστον από τους x,y,z ισούται με 0.

$2^{ος}$ τρόπος για το (β)

Οι δεδομένες ισότητες $x^2-y=z^2,\ y^2-z=x^2,\ z^2-x=y^2$ με πολλαπλασιασμό επί y^2, z^2 και x^2, αντίστοιχα, γίνονται

$$\left(x^2-z^2\right)y^2=y^3,\ \left(y^2-x^2\right)z^2=z^3,\left(z^2-y^2\right)x^2=x^3,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$x^3+y^3+z^3=0.$$

Λόγω του (α) λαμβάνουμε $xyz=0$, δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους x,y,z ισούται με 0.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από 2, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

Λύση

Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 15 είναι της μορφής: $100x+15$, όπου x μη αρνητικός ακέραιος.
Άρα το άθροισμα των δεκαπέντε θετικών ακεραίων θα είναι:

$$S=(100x_1+15)+(100x_2+15)+\cdots+(100x_{15}+15)=100(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+15\cdot 15=$$
$$=25\cdot 4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+25\cdot 9=25\cdot\left[4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+9\right],$$

δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 25.

Παρατήρηση

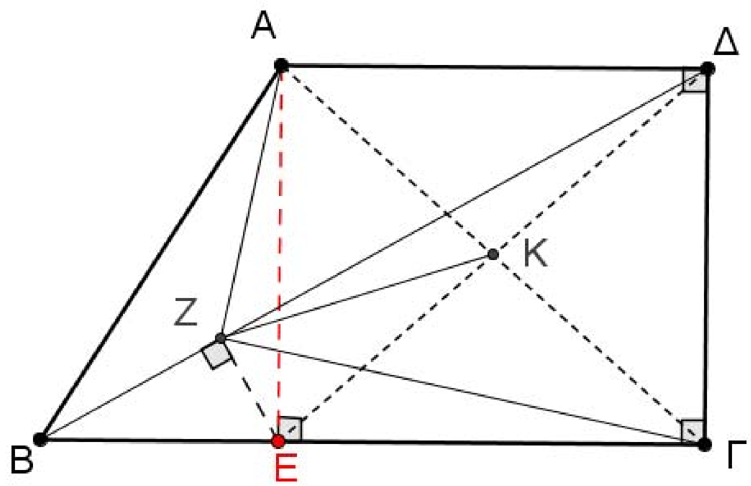
Η "κεντρική ιδέα" της άσκησης είναι ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta$", έχει τη μορφή $100x+\overline{\alpha\beta}$.
Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta\gamma$", έχει τη μορφή $1000x+\overline{\alpha\beta\gamma}$.

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{A\Delta}\parallel \mathrm{B\Gamma}$ και $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}=90^\circ$. Φέρουμε το ύψος ΑΕ και από το Ε κάθετη προς την διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A\hat{Z}\Gamma}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Επειδή είναι $\mathrm{A\hat{E}\Gamma}=\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}=90^\circ$ το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε οι διαγώνιοι του είναι ίσες και διχοτομούνται, δηλαδή το σημείο Κ είναι μέσον των ΑΓ και ΕΔ και

$$\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{E\Delta}. \quad (1)$$

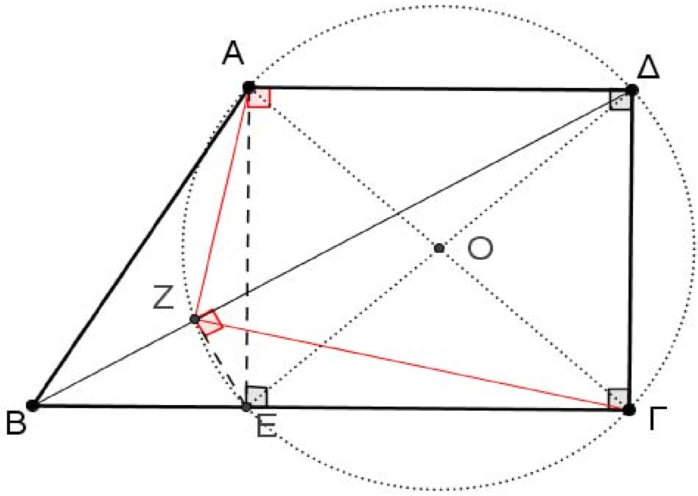


Σχήμα 6

Επειδή είναι $\mathrm{EZ}\perp\mathrm{B\Delta}$ το τρίγωνο ΕΖΔ είναι ορθογώνιο και η ΖΚ είναι η διάμεσος αυτού προς την υποτείνουσα. Άρα είναι

$$\mathrm{ZK}=\frac{\mathrm{E\Delta}}{2}. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $ZK = \frac{A\Gamma}{2}$, δηλαδή η διάμεσος του τριγώνου ΑΖΓ προς την πλευρά ΑΓ ισούται με το μισό της πλευράς ΑΓ. Επομένως είναι $A\hat{Z}\Gamma = 90^\circ$.



Σχήμα 7

2^{ος} Τρόπος

Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων του O.

Εφόσον $E\hat{Z}\Delta = E\hat{A}\Delta = 90^o$, το τετράπλευρο ΕΖΑΔ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια τα σημεία A, Δ, Γ, E, Z είναι ομοκυκλικά. Άρα $A\hat{Z}\Gamma = 90^o$ (διότι βαίνει στη διάμετρο ΑΓ).

3. Βρείτε τις τριάδες θετικών ακέραιων (x, y, z) με $x \ge y \ge z$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2,$$
$$x+y+z=300.$$

Λύση

Έχουμε

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2 \Leftrightarrow x^2y-x^2z+y^2z-y^2x+z^2x-z^2y=2$$
$$\Leftrightarrow (x^2y-y^2x)-(x^2z-y^2z)+(z^2x-z^2y)=2$$
$$\Leftrightarrow xy(x-y)-z(x-y)(x+y)+z^2(x-y)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[xy-z(x+y)+z^2\right]=2 \Leftrightarrow (x-y)(xy-zx-zy+z^2)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(x-z)=2.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον, από την υπόθεση $x \ge y \ge z$ έπεται ότι

$$x-y \ge 0 \text{ και } x-z \ge y-z > 0$$

και αφού

$$(x-y)+(y-z)=x-z,$$

έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$ είναι:

$$x-y=1, y-z=1, x-z=2.$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε από το προηγούμενο σύστημα λαμβάνουμε:

$$x-y=1,\ y-z=1 \Leftrightarrow x=y+1,\ z=y-1,$$

όπου y θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

$$(x,y,z)=(k+1,k,k-1),\ \text{όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Από την εξίσωση $x+y+z=300$ λαμβάνουμε:

$$(k+1)+k+(k-1)=300 \Leftrightarrow 3k=300 \Leftrightarrow k=100,$$

οπότε η ζητούμενη τριάδα είναι μόνον η

$$(x,y,z)=(101,\ 100,\ 99).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB. Θεωρούμε τυχόν σημείο M εκτός του AB και τέτοιο ώστε η κάθετη από το M προς την ευθεία AB να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέτοια ώστε

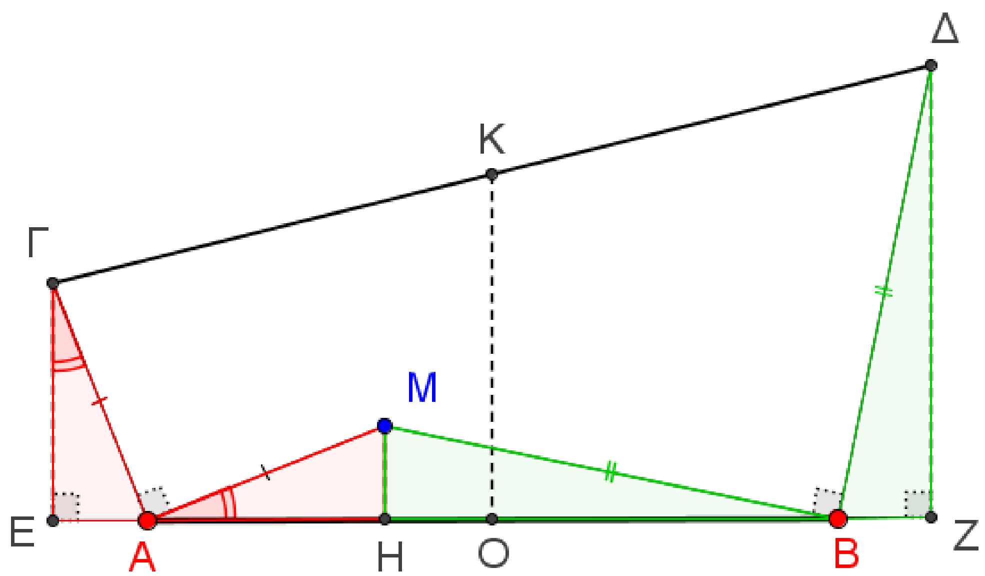
$$A\Gamma \perp AM \text{ και } A\Gamma = AM,\quad B\Delta \perp MB \text{ και } B\Delta = MB,$$

και επιπλέον τα σημεία Γ, M και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Λύση

Από τα σημεία Γ, Μ και Δ φέρουμε καθέτους ΓΕ, ΜΗ και ΔΖ προς την ευθεία ΑΒ. Τότε οι οξείες γωνίες $M\hat{A}H$ και $A\hat{\Gamma}E$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $M\hat{B}H$ και $B\hat{\Delta}Z$. Έτσι από την υπόθεση $A\Gamma = AM$ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα AHM, ΓEA είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Gamma E = AH \qquad (1)$$
$$EA = MH. \qquad (2)$$



Σχήμα 8

Ομοίως από την υπόθεση $B\Delta = MB$ και $B\Delta \perp MB$ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΗΒ, ΒΖΔ είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Delta Z = HB \qquad (3)$$
$$BZ = MH. \qquad (4)$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$\mathrm{OK} = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}}{2}. \qquad (5)$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$\mathrm{OK} = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}}{2} = \frac{\mathrm{AH} + \mathrm{HB}}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{2}. \qquad (6)$$

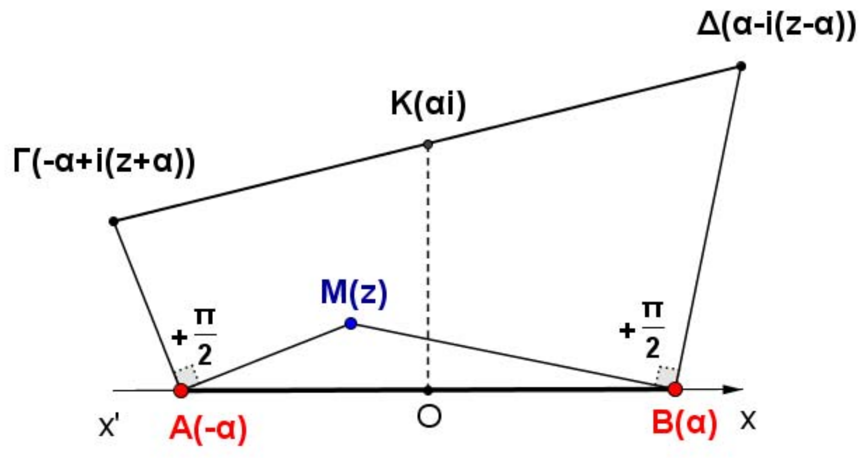
Επιπλέον, το μέσον Ο της ΕΖ είναι και μέσον της ΑΒ, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ΕΑ = ΒΖ, οπότε θα έχουμε

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OE} - \mathrm{AE} = \mathrm{OZ} - \mathrm{BZ} = \mathrm{OB}. \qquad (7)$$

Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε απόσταση από το μέσον Ο ίση προς το μισό του ΑΒ. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ ως άξονα των πραγματικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο και το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως την αρχή των αξόνων. Έστω ότι το σημείο Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z, το σημείο Β είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού a, οπότε το σημείο Α θα είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού $-a$. Τότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $z+a$ και επειδή είναι $\mathrm{A}\Gamma \perp \mathrm{AM}$, $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{AM}$ έπεται ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}}\right) = 90^\circ$, οπότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $i(z+a)$. Επομένως στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}$, άρα και στο σημείο Γ, αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $-a + i(z+a)$.



Σχήμα 9

Με το ίδιο σκεπτικό, αλλά με την παρατήρηση ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}}\right) = -90^\circ$, καταλήγουμε ότι στο σημείο Δ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $a - i(z-a)$.

Επομένως το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού

$$\frac{-a + i(z+a) + a - i(z-a)}{2} = ai,$$

οπότε το σημείο Κ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του μιγαδικού αριθμού z, άρα ανεξάρτητο από τη θέση του σημείο Μ.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta .$$

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι τα σύνολα των θετικών ακέραιων κοινών διαιρετών των αριθμών α, β και των αριθμών Α και Β ταυτίζονται.

Έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών α, β. Τότε από τις σχέσεις $\delta|\alpha$ και $\delta|\beta$ λαμβάνουμε ότι ο δ διαιρεί και κάθε γραμμικό συνδυασμό τους , οπότε

$$\delta|(4\alpha + 5\beta) = \mathrm{A} \text{ και } \delta|(3\alpha + 4\beta) = \mathrm{B},$$

δηλαδή ο δ είναι κοινός διαιρέτης των Α και Β.

Αντίστροφα, έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων Α και Β. Τότε από τις υποθέσεις $\delta|\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta$ και $\delta|\mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta$ έπεται ότι $\delta|\mathrm{A} - \mathrm{B} = \alpha + \beta$, οπότε προκύπτει ότι:

$$\delta|5(\mathrm{A} - \mathrm{B}) - \mathrm{A} = \alpha \quad \text{και} \quad \delta|\mathrm{A} - 4(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \beta ,$$

οπότε ο δ είναι κοινός διαιρέτης και των αριθμών α και β.

Επομένως και οι αριθμοί Α και Β έχουν 120 κοινούς θετικούς ακέραιους διαιρέτες.

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A} = n^2 - n + 1$ και $\mathrm{B} = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Λύση

Έχουμε $\mathrm{A} = n(n - 1) + 1$ και $\mathrm{B} = n(n + 1) + 1$, οπότε και οι δύο αριθμοί είναι περιττοί, αφού τα γινόμενα διαδοχικών ακέραιων $n(n - 1)$ και $n(n + 1)$ είναι άρτιοι ακέραιοι. Επιπλέον, είναι $\mathrm{B} - \mathrm{A} = 2n > 0$, οπότε Α < Β. Έστω $\mathrm{A} + 1, \mathrm{A} + 3, \ldots, \mathrm{A} + (2\kappa - 1)$, όπου κ θετικός ακέραιος, οι άρτιοι ακέραιοι που βρίσκονται μεταξύ των περιττών Α και Β. Τότε πρέπει

$$\mathrm{A}+(2\kappa-1) = \mathrm{B} - 1,$$

δηλαδή

$$\mathrm{B} - \mathrm{A} = 2\kappa \Leftrightarrow 2n = 2\kappa \Leftrightarrow \kappa = n.$$

Επομένως μεταξύ των αριθμών Α και Β βρίσκονται n άρτιοι ακέραιοι, οι οποίοι είναι οι

$$\mathrm{A} + 1, \mathrm{A} + 3, \ldots, \mathrm{A} + (2n - 1),$$

ενώ το άθροισμά τους είναι

$$\Sigma = n\mathrm{A} + [1 + 3 + \ldots + (2n - 1)] = n^3 - n^2 + n + \frac{(1 + 2n - 1)\cdot n}{2} = n^3 + n .$$

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Λύση

Το πρώτο μέλος της δεδομένης εξίσωσης γράφεται:

$$\begin{aligned} xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x) &= x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2 \\ &= xy(x-y)+(x-y)z^2-\left(x^2-y^2\right)z \\ &= (x-y)\left[xy+z^2-xz-yz\right] \\ &= (x-y)\left[x(y-z)-z(y-z)\right] \\ &= (x-y)(y-z)(x-z). \end{aligned}$$

Άρα η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$(x-y)(y-z)(x-z)=6.$$

Από την τελευταία μορφή προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον από την υπόθεση $x \geq y \geq z$ έπεται ότι $x-y \geq 0$ και $x-z \geq y-z > 0$, και αφού οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6, έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$, είναι:

$$x-y=1, y-z=2, x-z=3 \qquad (1)$$

$$\text{ή } \; x-y=2, y-z=1, x-z=3 \qquad (2)$$

$$\text{ή } \; x-y=1, y-z=1, x-z=6 \qquad (3)$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, η περίπτωση (3) δεν είναι αποδεκτή. Τα συστήματα (1) και (2) είναι αποδεκτά , αφού κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε:

- Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε:

  $$x-y=1, \;\; y-z=2 \Leftrightarrow x=y+1, \;\; z=y-2,$$

  όπου y θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

  $$(x,y,z)=(k+1,k,k-2), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

- Από το σύστημα (2) λαμβάνουμε τελικά:

  $$(x,y,z)=(k+2,k,k-1), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Στην πρώτη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+1,k,k-2), k \in \mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+1)^2+k^2+(k-2)^2=3k^2-2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k=\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2-2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(1,0,-2)$.

Στην δεύτερη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+2,k,k-1), k \in \mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+2)^2+k^2+(k-1)^2=3k^2+2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k=-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2+2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(-1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(2,0,-1)$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των μελών των τριάδων που ικανοποιούν την δεδομένη εξίσωση είναι 5 και λαμβάνεται από τις τριάδες

$$(x,y,z)=(1,0,-2) \text{ και } (x,y,z)=(2,0,-1).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM} \text{ και } \mathrm{A\Gamma} = 2\cdot \mathrm{AM}\ ,\ \ \mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{MB} \text{ και } \mathrm{B\Delta} = 2\cdot \mathrm{MB}$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

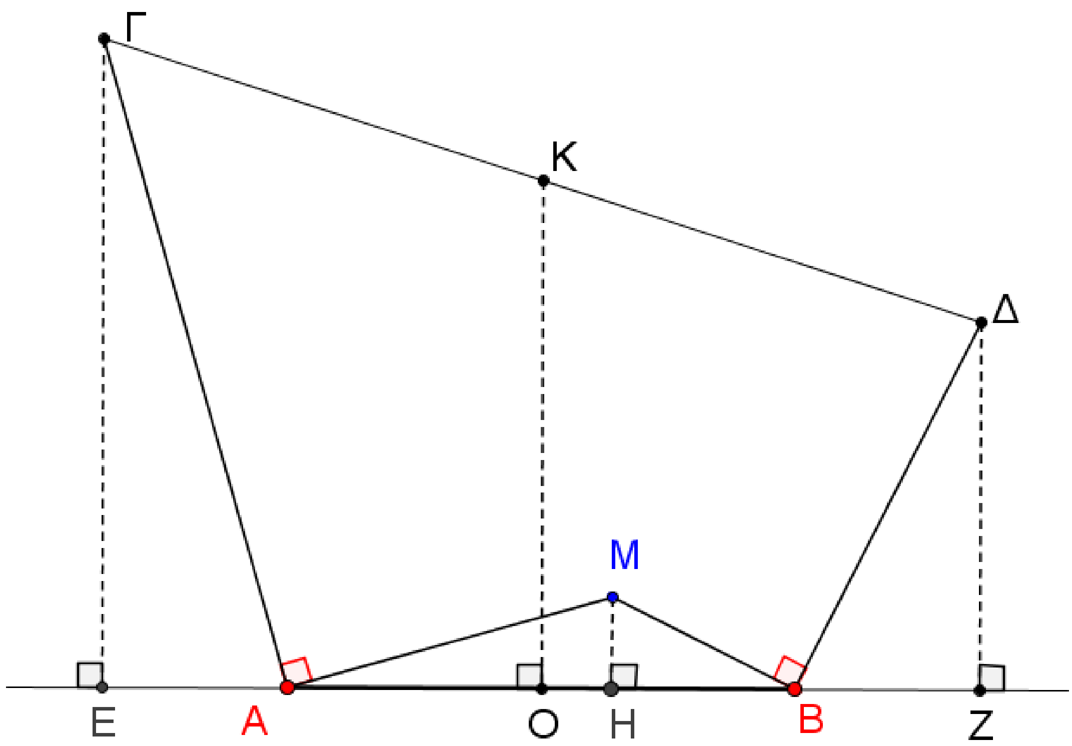
Λύση

Από τα σημεία Γ, Μ και Δ φέρουμε καθέτους ΓΕ, ΜΗ και ΔΖ προς την ευθεία ΑΒ. Τότε οι οξείες γωνίες $\mathrm{M\hat{A}H}$ και $\mathrm{A\hat{\Gamma}E}$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $\mathrm{M\hat{B}H}$ και $\mathrm{B\hat{\Delta}Z}$. Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΜ , ΓΕΑ είναι όμοια, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{AH}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{MH}}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AM}}=2\,,$$

οπότε προκύπτουν οι ισότητες:

$$\mathrm{\Gamma E}=2\cdot \mathrm{AH} \qquad (1)$$
$$\mathrm{EA}=2\cdot \mathrm{MH}\,. \qquad (2)$$



Σχήμα 10

Ομοίως τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΗΒ, ΒΖΔ είναι όμοια, οπότε ομοίως θα έχουμε:

$$\Delta Z = 2 \cdot HB \qquad (3)$$

$$BZ = 2 \cdot MH . \qquad (4)$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2} . \qquad (5)$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2} = \frac{2 \cdot AH + 2 \cdot HB}{2} = \frac{2 \cdot AB}{2} = AB . \qquad (6)$$

Επιπλέον, το μέσον Ο της ΕΖ είναι και μέσον της ΑΒ, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ΕΑ = ΒΖ, οπότε θα έχουμε

$$OA = OE - AE = OZ - BZ = OB . \qquad (7)$$

Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε απόσταση από το μέσον Ο ίση προς το ΑΒ. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Παρατήρηση

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με χρήση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Σύμφωνα με τη συζήτηση που είχε ο Γιάννης με τη Μαρία, αν x, y είναι οι αριθμοί, τότε θα ισχύουν:

$$\left.\begin{cases} xy=(x-50)(y+40) \\ xy=(x+100)(y-20) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 40x-50y=2000 \\ -20x+100y=2000 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x=100 \\ y=20 \end{cases}\right\}.$$

2. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών είναι

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0,$$

οπότε έχουμε

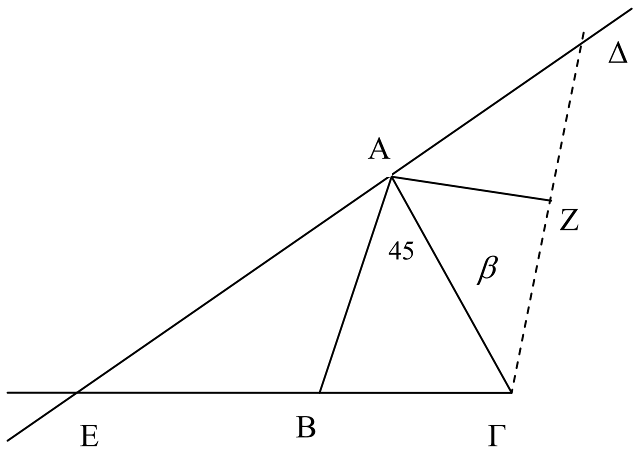
$$\mathrm{A}=\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\gamma-\alpha)(\beta^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\alpha-\beta)(\gamma^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+(\gamma-\alpha)\beta^2+(\alpha-\beta)\gamma^2+(\beta-\gamma+\gamma-\alpha+\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha(\beta^2-\gamma^2)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2+\beta\gamma-\alpha(\beta+\gamma))}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}==-\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}=1.$$

3.



(α) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ$. Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$, οπότε $\mathrm{AB}\parallel\Gamma\Delta$, αφού τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ = *β*, $\Gamma\Delta=\sqrt{\beta^2+\beta^2}=\beta\sqrt{2}$ και ύψος $\mathrm{AZ}=\frac{\Gamma\Delta}{2}=\frac{\beta\sqrt{2}}{2}$. Άρα έχει εμβαδόν

$$(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=\frac{\beta+\beta\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\beta\sqrt{2}}{2}=\frac{\beta^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}.$$

(β) Επειδή είναι $\text{ΑΒ} \parallel \text{ΓΔ}$ τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΔΓ είναι όμοια, οπότε, αν $\text{ΕΑ} = x$, θα έχουμε:

$$\frac{x}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΔΓ}} \Leftrightarrow \frac{x}{\beta} = \frac{x+\beta}{\beta\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{2} = x+\beta \Leftrightarrow x\left(\sqrt{2}-1\right) = \beta \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\beta}{\sqrt{2}-1} = \beta\left(\sqrt{2}+1\right).$$

4. Η δεδομένη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\underbrace{x^6 + 2x^3y^2 + y^4} + 3x^3 + 3y^2 = 40$$

$$\left(x^3 + y^2\right)^2 + 3\left(x^3 + y^2\right) + 2 = 42$$

$$\left(x^3 + y^2 + 1\right)\cdot\left(x^3 + y^2 + 2\right) = 42.$$

Οι αριθμοί όμως $x^3 + y^2 + 1$ και $x^3 + y^2 + 2$, είναι θετικοί ακέραιοι με $x^3 + y^2 + 1 < x^3 + y^2 + 2$ και γινόμενο

$$42 = 1\cdot 41 = 2\cdot 21 = 3\cdot 14 = 6\cdot 7.$$

Επομένως θα πρέπει:

$$x^3 + y^2 + 1 = 1 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 42 \quad (1)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 2 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 21 \quad (2)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 3 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 14 \quad (3)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 6 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 7 \quad (4)$$

Προφανώς οι σχέσεις $(1),(2),(3)$ είναι αδύνατες και από τη σχέση (4), έχουμε:

$$x^3 + y^2 = 5 \text{ που αληθεύει για } x = 1 \text{ και } y = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το τριώνυμο

$$\omega^2 + 3\omega - 40 = 0, \text{ όπου } \omega = x^3 + y^2,$$

η οποία, αφού $x, y > 0$ έχει τη μοναδική λύση $x^3 + y^2 = 5$, που αληθεύει μόνο για $x = 1$ και $y = 2$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισοδύναμα από την δεδομένη ισότητα, έχουμε:

$$\underbrace{x^6-2x^3+1}+\underbrace{x^4-2x^2y^2+y^4}+\underbrace{y^4-2y^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2+\left(y^2-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1=0 \text{ και } x^2-y^2=0 \text{ και } y^2-1=0\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(x=1 \text{ και } y=1\right) \text{ ή } \left(x=1 \text{ και } y=-1\right)$$

2. Για να έχει η εξίσωση διπλή λύση, πρέπει η διακρίνουσά της να είναι μηδέν.

$$\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\kappa\mu=0 \Leftrightarrow \lambda^2=4\kappa\mu .$$

Στη περίπτωση αυτή η διπλή λύση είναι: $x_1=x_2=\dfrac{-\lambda}{2\kappa}$

Ο αριθμός $4\kappa\mu$ είναι άρτιος. Άρα και ο λ^2 είναι άρτιος, οπότε ο λ είναι άρτιος.
Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο λ (δεδομένου ότι είναι μονοψήφιος θετικός ακέραιος) είναι: $\lambda=2$ ή $\lambda=4$ ή $\lambda=6$ ή $\lambda=8$.

Αν $\lambda=2$ τότε: $4=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=1$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$\kappa=1 \text{ και } \mu=1.$$

Αν $\lambda=4$ τότε: $16=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=4$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa=1 \text{ και } \mu=4) \text{ ή } (\kappa=4 \text{ και } \mu=1) \text{ ή } (\kappa=2 \text{ και } \mu=2).$$

Αν $\lambda=6$ τότε: $36=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=9$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa=1 \text{ και } \mu=9) \text{ ή } (\kappa=9 \text{ και } \mu=1) \text{ ή } (\kappa=3 \text{ και } \mu=3).$$

Αν $\lambda=8$ τότε: $64=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=16$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa=2 \text{ και } \mu=8) \text{ ή } (\kappa=8 \text{ και } \mu=2) \text{ ή } (\kappa=4 \text{ και } \mu=4).$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τη διατεταγμένη τριάδα (κ,λ,μ) είναι:

$$(1,2,1),\ (1,4,4),\ (2,4,2),\ (1,6,9),\ (3,6,3),\ (2,8,8),\ (4,8,4).$$

Οι άλλες περιπτώσεις απορρίπτονται, διότι δεν δίνουν ακέραια λύση.
Οι εξισώσεις που προκύπτουν, με την αντίστοιχη διπλή λύση είναι:

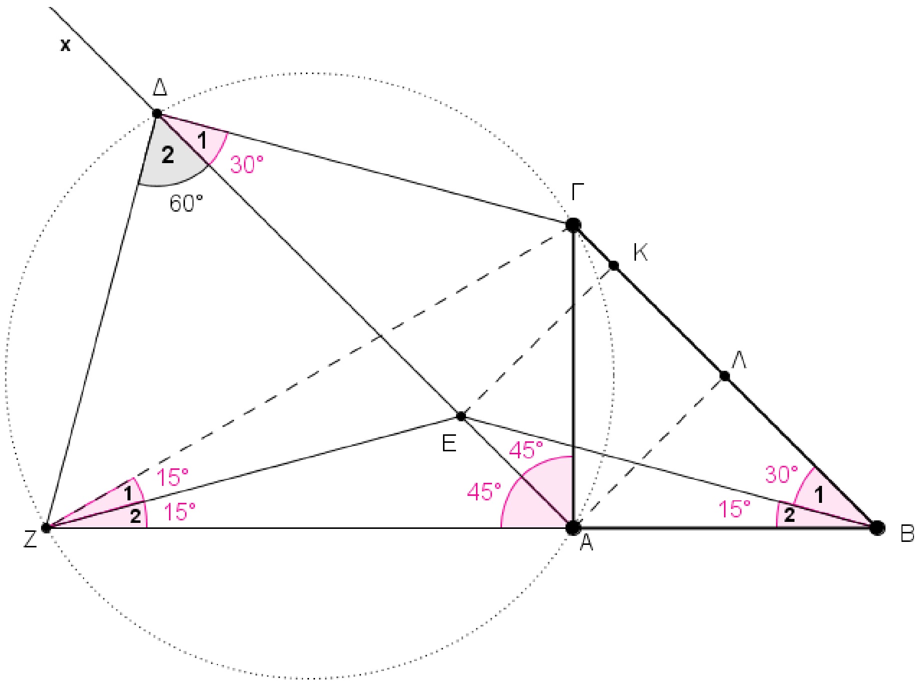
$$x^2+2x+1=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-1,$$

$$x^2+4x+4=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-2,$$

$$x^2+6x+9=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-3.$$

3. (α) Εφόσον το ΒΓΔΕ είναι ρόμβος, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\text{ΒΓ}=\text{ΓΔ}=\text{ΔΕ}=\text{ΒΕ} \qquad (1)$$



Θεωρούμε $ΑΛ$ και $ΕΚ$ κάθετες στη $ΒΓ$.
Τότε $ΑΛ = ΕΚ$ (διότι $ΑΛΚΕ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).
Η $ΑΛ$ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, οπότε $ΑΛ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Άρα $ΑΛ = ΕΚ = \frac{ΒΓ}{2} \overset{(1)}{=} \frac{ΒΕ}{2}$. Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΕΚ$, έχουμε:

$$ΕΚ = \frac{ΒΕ}{2} \text{ οπότε } \hat{Β}_1 = 30^o.$$

Από το ρόμβο $ΒΓΔΕ$ έχουμε $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = 30^o$ και επειδή $Γ\hat{Δ}Ζ = 90^o$ έχουμε τελικά ότι:

$$\boxed{\hat{Δ}_2 = 60^o} \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο $ΑΓΔΖ$ είναι εγγράψιμο (διότι $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^o$) και η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Α}Ζ$. Άρα το $Δ$ είναι μέσο του τόξου $ΓΖ$, οπότε

$$\boxed{ΔΓ = ΔΖ \overset{(1)}{=} ΔΕ} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο.

(β) Προφανώς η $ΑΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Α}Ζ$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $ΖΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Ζ}Α$.
Εφόσον το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο, θα ισχύει $ΕΖ = ΕΒ$ και επειδή $\hat{Β}_2 = 15^o$, θα ισχύει:

$$\hat{Ζ}_2 = 15^o \qquad (4)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΓΔΖ έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \hat{\Delta}_1 = 30^o$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{Z}}_1 = 15^o$.

4. Για $xyz \neq 0$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\frac{3xy}{z} + \frac{2yz}{x} = 70,\ \frac{7yz}{x} + \frac{4zx}{y} = 256,\ \frac{5zx}{y} + \frac{6xy}{z} = 52,$$

το οποίο, αν θέσουμε

$$\frac{xy}{z} = u,\ \frac{yz}{x} = v,\ \frac{zx}{y} = w$$

γίνεται

$$\left\{\begin{array}{ll} 3u + 2v = 70 & (1) \\ 7v + 4w = 256 & (2) \\ 5w + 6u = 52 & (3) \end{array}\right\}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε

$$9(u + v + w) = 378 \Leftrightarrow .$$

$$u + v + w = 42\ . \qquad (4)$$

Λόγω της (4) η εξίσωση (2) γίνεται

$$7v + 4(42 - u - v) = 256$$

$$\Leftrightarrow -4u + 3v = 88. \qquad (5)$$

Από τις (1) και (5) λαμβάνουμε $u = 2,\ v = 32$, οπότε από την (4) προκύπτει ότι $w = 8$. Άρα έχουμε το σύστημα

$$\frac{xy}{z} = 2,\ \frac{yz}{x} = 32,\ \frac{zx}{y} = 8 \qquad (6)$$

από το οποίο με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων έχουμε

$$xyz = 2 \cdot 8 \cdot 32\ . \qquad (7)$$

Από τις (6) και (7) λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{array}{l} 32x^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \\ 8y^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \\ 2z^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 16 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 256 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \pm 4 \\ y = \pm 8 \\ z = \pm 16 \end{array}\right\},$$

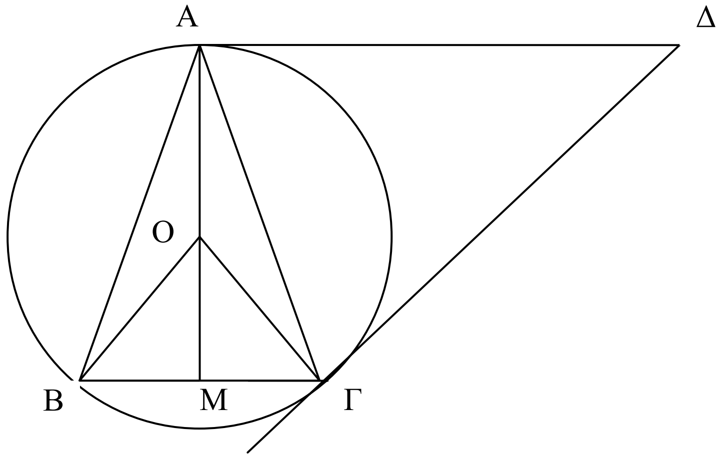
οπότε προκύπτουν συνολικά 8 τριάδες που είναι λύσεις του συστήματος:

$$(x, y, z) = (4,8,16) \text{ ή } (-4,-8,-16) \text{ ή } (4,8,-16) \text{ ή } (-4,-8,16)$$

$$\text{ή } (4,-8,-16) \text{ ή } (-4,8,16) \text{ ή } (4,-8,16) \text{ ή } (-4,8,-16).$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1.



(α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ισοσκελή ΄(ΔΑ = ΔΓ, ως εφαπτόμενες από το Δ στον περιγεγραμμένο κύκλο) και έχουν $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta$, ως εντός εναλλάξ. Άρα είναι όμοια.

(β) Παρατηρούμε ότι $B\hat{O}\Gamma = 2\hat{A} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R = B\Gamma = \alpha$.

Έστω η ΑΟ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Μ. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ και ΑΒ = ΑΓ η ΟΑ είναι η μεσοκάθετη της ΒΓ. Άρα είναι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Επιπλέον από το τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε $AM = \alpha\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$A\Gamma^2 = \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Επειδή τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια ($\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta$), θα έχουμε

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{A\Gamma^2}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \alpha\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Άρα είναι

$$\left(AB\Gamma\Delta\right) = \frac{\alpha + \alpha\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} \cdot \frac{\alpha\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{\alpha^2\left(9+5\sqrt{3}\right)}{4}$$

2. **(α)** Για να είναι το 2 κοινή ρίζα των δύο εξισώσεων πρέπει και αρκεί:

$$\begin{Bmatrix} 8\lambda - 2\left(\mu+4\right) - 2 = 0 \\ 4\mu - 4\cdot 2 - \lambda - 2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda = 2 \\ \mu = 3 \end{Bmatrix}.$$

(β) Για λ=2 και μ=3 η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2x^3 - 7x - 2}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{17}{8}.$$

Όμως έχουμε τις παραγοντοποιήσεις

$$2x^3-7x-2=(x-2)(2x^2+4x+1)$$
$$3x^2-4x-4=(x-2)(3x+2).$$

οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\frac{2x^2+4x+1}{3x+2}=\frac{17}{8},\quad x\in\mathbb{R}-\left\{2,-\frac{2}{3}\right\}.$$
$$\Leftrightarrow 16x^2-19x-26=0,\ x\in\mathbb{R}-\left\{2,\ -\frac{2}{3}\right\}$$
$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-\frac{13}{16},\ x\in\mathbb{R}-\left\{2,\ -\frac{2}{3}\right\}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{13}{16}.$$

3. Για $x=y=0$ από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) έχουμε:

$$f\left(f(0)-f(0)\right)=f\left(f(0)\right)-0$$
$$\Leftrightarrow f(0)=f\left(f(0)\right) \qquad (2)$$

Από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) θέτοντας όπου y το $f(x)$ έχουμε:

$$f\Big(f(x)-f\left(f(x)\right)\Big)=f\left(f(x)\right)-f(x) \qquad (3)$$

Αν τώρα στη (3) θέσουμε $x=0$ έχουμε:

$$f\Big(f(0)-f\left(f(0)\right)\Big)=f\left(f(0)\right)-f(0)$$

και σε συνδυασμό με την (2) καταλήγουμε $f\left(f(0)\right)=f(0)=0$.

Θέτοντας στην (1) όπου $x=0$, έχουμε:

$f\left(f(0)-f(y)\right)=f\left(f(0)\right)-y$ και δεδομένου ότι $f\left(f(0)\right)=f(0)=0$,

καταλήγουμε στη σχέση

$$f\left(-f(y)\right)=-y. \qquad (4)$$

Θέτοντας στην (1) όπου y το x έχουμε:

$$f\left(f(x)-f(x)\right)=f\left(f(x)\right)-x \Leftrightarrow f(0)=f\left(f(x)\right)-x \Leftrightarrow$$
$$f\left(f(x)\right)=x \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (4) όπου y το $f(x)$, έχουμε:

$$f\Big(-f\left(f(x)\right)\Big)=-f(x)$$

και σε συνδυασμό με την (5), καταλήγουμε στη σχέση

$$f(-x)=-f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

δηλαδή η f είναι περιττή.

4. Αν θέσουμε $x=\dfrac{a+b}{a-b}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{a}{b}=\frac{x+1}{x-1} \qquad (1)$$

(είναι $x \neq 1$, αφού $b \neq 0$). Ομοίως, αν θέσουμε $y = \dfrac{b+c}{b-c}$, $z = \dfrac{c+a}{c-a}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{b}{c} = \frac{y+1}{y-1} \tag{2}$$

$$\text{και} \quad \frac{c}{a} = \frac{z+1}{z-1}\ . \tag{3}$$

Από τις (1), (2) και (3) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{abc}{bca} = 1 \Rightarrow xy + yz + zx = -1.$$

Όμως έχουμε

$$0 \leq (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2.$$

4. Αν υπήρχαν τέτοιοι αριθμοί τότε

$$\left(\frac{3}{2}a\beta^{-1}+\frac{10}{3}a^{-1}\beta\right)^2=9$$, οπότε

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2+10=9$$ οπότε

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2=9-10=-1,$$ *που δεν ισχύει.*

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Α΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω ότι α,β,γ,δ,ε είναι οι αριθμοί των μαθητών των πέντε αυτών τμημάτων. Έτσι έχουμε:

$$10(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=1090\Rightarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=109 \quad (1)$$

Έστω ότι οι αριθμοί των μαθητών των τμημάτων αυτών είναι ανά δύο διαφορετικοί και έστω ότι:

$\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$. Επειδή $\alpha\geq 20$ και α,β,γ,δ,ε φυσικοί έχουμε:

$$\beta>\alpha\geq 20\Rightarrow\beta>20\Rightarrow\beta\geq 21$$

$$\gamma>\beta\geq 21\Rightarrow\gamma>21\Rightarrow\gamma\geq 22$$

$$\delta>\gamma\geq 22\Rightarrow\delta>22\Rightarrow\delta\geq 23$$

$$\varepsilon>\delta\geq 23\Rightarrow\varepsilon>23\Rightarrow\varepsilon\geq 24$$

Συνεπώς $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon \geq 110$, άτοπο λόγω της (1). Άρα, δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda^2 x+3\lambda=\lambda^3+2\lambda x-2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 x-2\lambda x=\lambda^3-3\lambda-2 \Leftrightarrow$$

$$x\left(\lambda^2-2\lambda\right)=\lambda^3-3\lambda-2$$

$$\lambda^2-2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda\left(\lambda-2\right)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \ \acute{\eta} \ \lambda=2$$

1. Αν λ=0 είναι αδύνατη
2. Αν λ=2 είναι αόριστη
3. Αν λ≠0 και λ≠2 τότε

$$x=\frac{\lambda^3-3\lambda-2}{\lambda^2-2\lambda}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\left(\lambda-2\right)\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda\left(\lambda-2\right)} \Leftrightarrow x=\frac{\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda}$$

3. Η ανίσωση γράφεται:

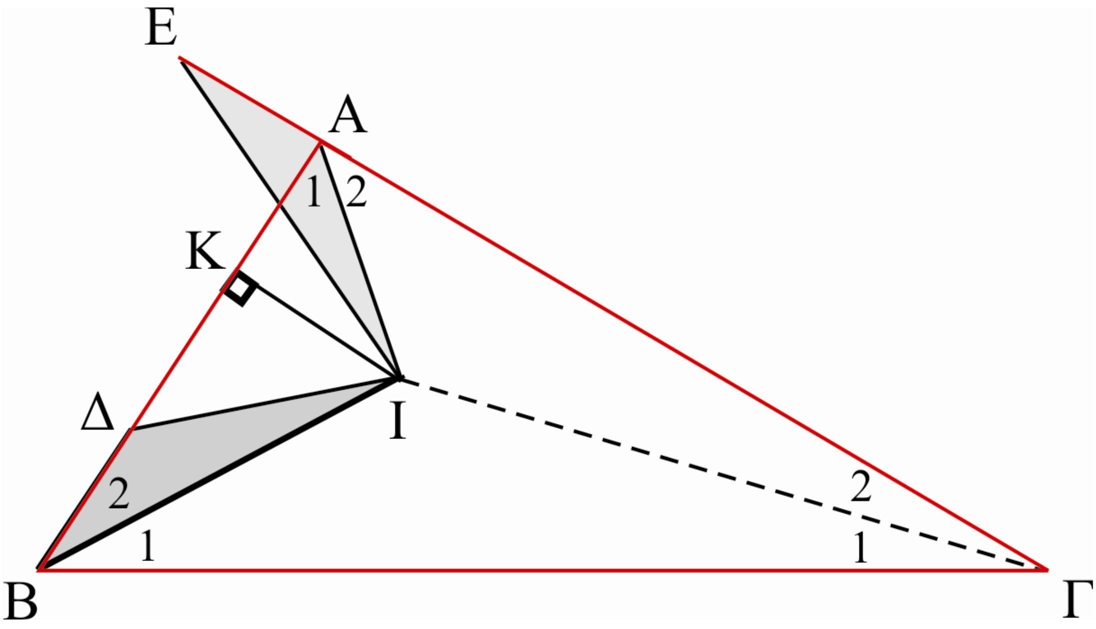
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+2\frac{\alpha}{\gamma}+2\frac{\gamma}{\beta}+2\frac{\beta}{\alpha} \geq 3\frac{\alpha}{\gamma}+3\frac{\gamma}{\beta}+3\frac{\beta}{\alpha},$$ αρκεί

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha} \geq 0$$, αρκεί

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]\geq 0,$$

η οποία ισχύει.

4.



Αν ΓΕ=α τότε ΑΕ=α-β=ΒΔ και ΓΙ η τρίτη διχοτόμος.

Έχουμε $\overset{\Delta}{\mathrm{I\Gamma E}}=\overset{\Delta}{\mathrm{I\Gamma B}}$ διότι ΙΓ=ΙΓ, ΓΕ=ΓΒ και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ άρα $\hat{E}=\hat{B}_1$, ΙΕ=ΙΒ.

Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{IAE}}=\overset{\Delta}{\mathrm{IB\Delta}}$ διότι ΒΔ=ΑΕ, ΙΕ=ΙΒ και $\hat{E}=\hat{B}_1=\hat{B}_2$, άρα ΙΑ=ΙΔ.

Β΄ τρόπος

Αρκεί το Ι να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ. Αν δηλαδή ΙΚ⊥ΑΔ, αρκεί ΚΑ=ΚΔ. Πράγματι ΚΑ=τ–α
και ΚΔ=|ΒΚ–ΒΔ|=|τ–β– (α–β)|=|τ–α|=τ–α, αφού τ>α.

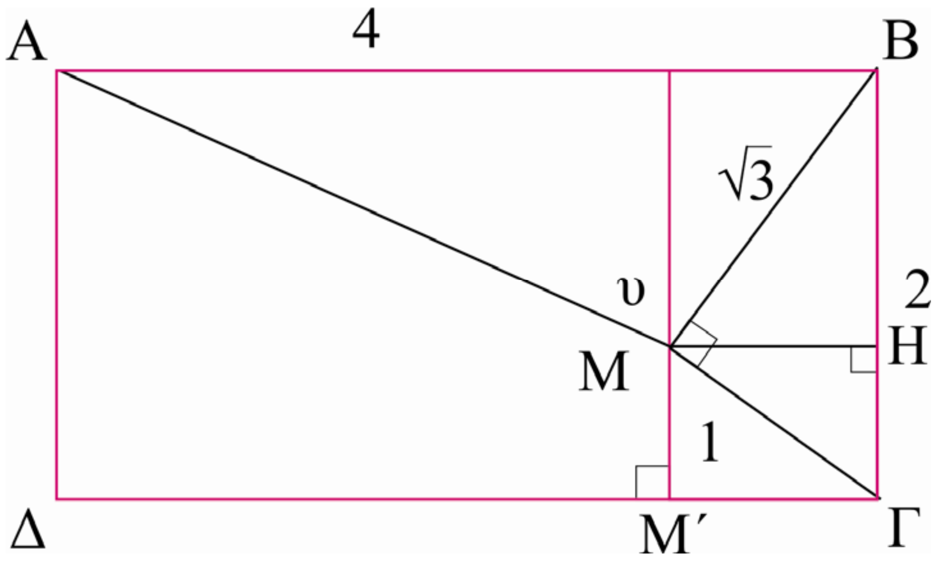
ΛΥΣΕΙΣ Β΄ τάξη Λυκείου

1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες , τότε

$x_1 + x_2 = 2006\kappa + 1 \quad (1)$ και $x_1 \cdot x_2 = 2007 \quad (2)$.

Από την (2) προκύπτει ότι οι x_1, x_2 θα είναι περιττοί. Αλλά τότε το άθροισμα τους $x_1 + x_2$ θα είναι άρτιος, οπότε δεν θα ισχύει η (1).

2.



Παρατηρούμε ότι $\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4 = 2^2$ οπότε το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο στο Μ. Επειδή

$$M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \; \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon \; M\hat{B}\Gamma = 30^0,$$

οπότε $M\hat{\Gamma}B = 60^0 \; \kappa\alpha\iota \; M\hat{\Gamma}\Delta = 30^0$. Έστω

$MM' \perp \Delta\Gamma$, τότε $MM' = \frac{1}{2}$ άρα $\upsilon = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Το εμβαδόν του $\overset{\Delta}{MAB}$ είναι $E = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$..

<u>β΄ τρόπος</u>

$MB^2 = B\Gamma \cdot BH$ οπότε $3 = 2 \cdot \upsilon$ άρα $\upsilon = \frac{3}{2}$

3. Είναι

$$\kappa = (2+2^2+2^3+2^4)+2^4(2+2^2+2^3+2^4)+\ldots+2^{2004}(2+2^2+2^3+2^4) =$$

$$= 30(1+2^4+2^8+\ldots+2^{2004}) = \pi o\lambda.30$$

4. α) Από τη γνωστή ανισότητα: $\frac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta}$ όπου α, β θετικοί με $\alpha \neq \beta$, έχουμε:

$$\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{2} > \sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{6}$$

Οπότε $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} > 2\sqrt[6]{6}$.

Αρκεί λοιπόν

$$2\sqrt[6]{6} \geq \sqrt[3]{19}, \quad \acute{\eta} \quad 2^6 \cdot 6 \geq 19^2, \quad \acute{\eta} \quad 384 \geq 361$$

που ισχύει.

β) Αν $\lambda = \dfrac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ τότε

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{19}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} \text{ οπότε } \lambda^2 < 2.$$

Η εξίσωση για $x \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την $x^2 - 2\lambda x + 2 = 0$ με $\Delta = 4(\lambda^2 - 2) < 0$.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

<u>β΄ τρόπος</u>

$$x^2 - 2\lambda x + 2 = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + 2 =$$

$$= (x-\lambda)^2 + (2-\lambda^2) \geq 2 - \lambda^2 > 0$$

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Γ΄ τάξη Λυκείου

1. Για $x = 0$ έχουμε $f(f(y)) = -f(y)$ *για κάθε* $y \in \mathbb{R}$.
Για $y = 0$ έχουμε $f(f(x)) = x - f(0)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.
Άρα

$$f(f(x)) = -f(x) \text{ και } f(f(x)) = x - f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$-f(x) = x - f(0)$ ή

$f(x) = f(0) - x \quad (1)$ και $f(-x) = f(0) + x \quad (2)$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$

Οπότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) + f(-x) = 2f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η h είναι σταθερή.

2. Έστω ότι η εξίσωση έχει μια ακέραια λύση ρ. Τότε

$$3^{\rho+1}-\rho\cdot 3^{\rho}-4\rho-1=0 \Rightarrow 3^{\rho}(3-\rho)=4\rho+1$$

$$\Rightarrow 3^{\rho}=\frac{4\rho+1}{3-\rho}\ (\text{αφού προφανώς } \rho\neq 3) \Rightarrow \frac{4\rho+1}{3-\rho}>0$$

$$\Rightarrow (4\rho+1)(\rho-3)<0 \Rightarrow -\frac{1}{4}<\rho<3 \Rightarrow \rho\in\{0,1,2\}.$$

Όπως βρίσκουμε εύκολα, οι αριθμοί ρ=0 και ρ=1 δεν είναι λύσεις της εξίσωσης. Ο αριθμός ρ=2 όμως είναι λύση της εξίσωσης. Άρα η εξίσωση έχει τη μοναδική λύση ρ=2.

3. Επειδή

$$|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right)=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+\overline{z}_2z_1=|z_1+z_2|^2$$

αρκεί να δείξουμε ότι: $\dfrac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\dfrac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}\geq|z_1+z_2|^2$.

Πράγματι

$$\frac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\frac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}=(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)\left(\left(\frac{|z_1|}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2+\left(\frac{|z_2|}{\eta\mu\theta}\right)^2\right)\geq\left(|z_1|+|z_2|\right)^2\geq|z_1+z_2|^2$$

4. Από την ισότητα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$ έχουμε ότι τα Κ, Λ, Μ βρίσκονται στο ίδιο τόξο χορδής ΒΓ. Έστω

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma=\phi.$$

Αν ΚΒ· ΚΓ= ΛΒ· ΛΓ= ΜΒ· ΜΓ, τότε

$$\frac{1}{2}\mathrm{KB}\cdot\mathrm{K}\Gamma\,\eta\mu\phi=\frac{1}{2}\Lambda\mathrm{B}\cdot\Lambda\Gamma\,\eta\mu\phi=\frac{1}{2}\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M}\Gamma\,\eta\mu\phi$$

$$\Rightarrow(\mathrm{KB}\Gamma)=(\Lambda\mathrm{B}\Gamma)=(\mathrm{MB}\Gamma)$$

Αυτό σημαίνει ότι τα Κ, Λ, Μ θα βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στην ΒΓ, άτοπο αφού το μέγιστο πλήθος κοινών σημείων ευθείας και κύκλου είναι 2.