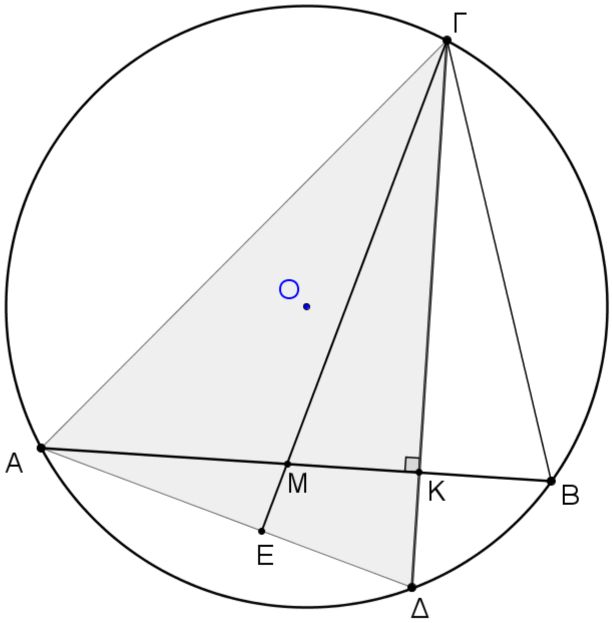


$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B} + \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = 180^0 - \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = 180^0 - 90^\circ = 90^\circ,$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$ και $\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ είναι οι δύο οξείες γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου ΓΚΒ. Επειδή οι δύο χορδές είναι κάθετες θα είναι και $\mathrm{AK} \perp \Gamma\Delta$, δηλαδή ΑΚ είναι επίσης ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$\mathrm{A} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}},$$

όπου m,n ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy \neq 0$, $xy \neq 1$ και $xy \neq -1$.

Λύση

$$\mathrm{A} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}} = \frac{\left(\frac{x^2y^2-1}{y^2}\right)^m \left(\frac{xy+1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(\frac{x^2y^2-1}{x^2}\right)^n \left(\frac{xy-1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}}$$

$$= \frac{\left(x^2y^2-1\right)^{m-n} \cdot x^{2n}}{y^{2m}} \cdot \frac{(xy+1)^{n-m} \cdot y^{m-n}}{(xy-1)^{m-n} \cdot x^{n-m}} \cdot \frac{y^{m+n}}{x^{m+n}}$$

$$= \frac{(xy+1)^{m-n}(xy-1)^{m-n} \cdot (xy+1)^{n-m}}{(xy-1)^{m-n}} \cdot x^{2n-2n} \cdot y^{2m-2m} = 1.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α , β αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \text{ και } \alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37.$$

Λύση

Από την ισότητα $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|\geq 0$ προκύπτει ότι:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2=\left(|\alpha|+|\beta|\right)^2$$
$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$$
$$-\alpha\beta=|\alpha\beta| \Leftrightarrow (\alpha\geq 0 \text{ και } \beta\leq 0) \text{ ή } (\alpha\leq 0 \text{ και } \beta\geq 0).$$

Από τη δεύτερη ισότητα λαμβάνουμε:

$$\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37 \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta+2)-(\alpha+\beta+2)=35$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+2)(\alpha^2\beta^2-1)=35,$$

από την οποία έχουμε ότι ο $\alpha^2\beta^2-1$ είναι ένας από τους παράγοντες του 35, δηλαδή έχουμε:

$$\alpha^2\beta^2-1=\pm 1 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 5 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 7 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 35$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2=2 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=0 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-4 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=8$$
$$\text{ή } \alpha^2\beta^2=-6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=36 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-34.$$

Οι αποδεκτές περιπτώσεις, αφού $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha^2\beta^2\geq 0$, είναι οι:

- $\alpha^2\beta^2=0$, η οποία οδηγεί στις λύσεις $(\alpha,\beta)=(0,-37)$ ή $(\alpha,\beta)=(-37,0)$.
- $\alpha^2\beta^2=36 \Leftrightarrow \alpha\beta=-6$ (αφού α,β ετερόσημοι), η οποία οδηγεί στο σύστημα:

$$\left.\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \alpha\beta=-6\end{cases}\right\} \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(-3,2) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(2,-3).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\text{ΕΓ}=\text{ΖΔ}=\alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $\text{ΑΛ}\perp\text{ΕΖ}$

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α.

Λύση

(α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΔΕΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες (ΑΔ = ΔΓ=3α, ΔΖ = ΕΓ = α). Άρα είναι ίσα και έχουν $\Delta\hat{\text{Α}}\text{Ζ}=\text{Ε}\hat{\Delta}\Gamma$. Αν Μ είναι το σημείο τομής ΑΖ και ΔΕ, τότε έχουμε:

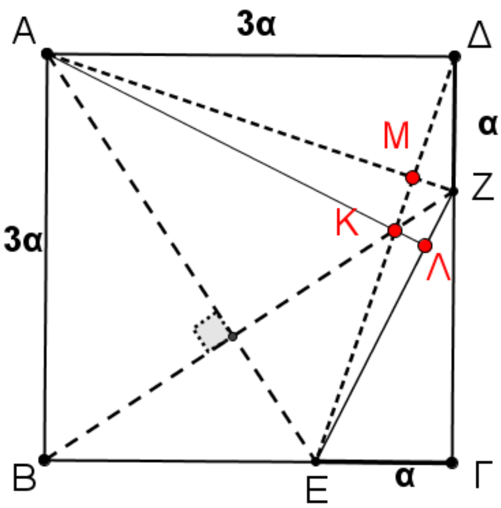
$$\text{Μ}\hat{\Delta}\text{Ζ}+\Delta\hat{\text{Ζ}}\text{Μ}=\Delta\hat{\text{Α}}\text{Ζ}+\Delta\hat{\text{Ζ}}\text{Α}$$
$$=180^0-\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ζ}=180^0-90^\circ=90^\circ.$$

Άρα είναι $\text{ΕΔ}\perp\text{ΑΖ}$ και ομοίως αποδεικνύουμε ότι είναι $\text{ΖΒ}\perp\text{ΑΕ}$, οπότε το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΕΖ.

Άρα θα είναι και

$$\text{ΑΚ}\perp\text{ΕΖ} \text{ ή } \text{ΑΛ}\perp\text{ΕΖ}.$$

Δ



(β) Έχουμε ότι

$$(\mathrm{AEZ}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{EZ}\cdot \mathrm{A\Lambda} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\cdot \mathrm{A\Lambda} \text{ και}$$

$$(\mathrm{AEZ}) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) - (\mathrm{ABE}) - (\mathrm{E\Gamma Z}) - (\mathrm{A\Delta Z}) = 9\alpha^2 - 3\alpha^2 - \alpha^2 - \frac{3\alpha^2}{2} = \frac{7\alpha^2}{2},$$

οπότε λαμβάνουμε: $\mathrm{A\Lambda} = \frac{7\sqrt{5}\alpha}{5}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, όπου a, b, c ψηφία, $a > 0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2$$

Λύση

Από τη σχέση $100 \le \overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2 < 1000$ προκύπτει ότι:

$$10 \le a + b^2 + c^3 \le 31, \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1), δεδομένου ότι $a \in \{1,2,...,9\}$ και $b, c \in \{0,1,2,...,9\}$, συμπεραίνουμε ότι:

$$c \in \{0,1,2,3\} \text{ και } b \in \{0,1,2,3,4,5\}. \qquad (2)$$

Επιπλέον η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\overline{abc} = \left(a + b^2 + c^3\right)^2 \Leftrightarrow 100a + 10b + c = \left(a + b^2 + c^3\right)^2. \qquad (3)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Για $c = 0$ η εξίσωση (3) γίνεται:

$$100a + 10b = \left(a + b^2\right)^2, \qquad (4)$$

από την οποία για $b \in \{0,1,2,3,4,5\}$ δεν προκύπτουν a, b που την επαληθεύουν. Πράγματι, τα ψηφία a, b που ικανοποιούν την εξίσωση (4) πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $a + b^2$ να λήγει σε 0. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα

$$(a,b) = (9,1) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (5,5),$$

από τα οποία κανένα δεν ικανοποιεί την εξίσωση (4).

- Για $c=1$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+1=\left(a+b^2+1\right)^2,$$
από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός $a+b^2+1$ πρέπει να λήγει σε 1 ή 9. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα
$$(a,b)=(8,0) \text{ ή } (7,1) \text{ ή } (9,1) \text{ ή } (4,2) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3)$$
$$\text{ή } (9,3) \text{ ή } (2,4) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (3,5) \text{ ή } (5,5),$$
από τα οποία προκύπτει μόνο η λύση $(a,b)=(4,4)$ και ο αριθμός $\overline{abc}=441$.
- Για $c=2$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+2=\left(a+b^2+2\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 2.
- Για $c=3$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+3=\left(a+b^2+3\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 3.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες το σύστημα
$$x^2+4y^2=4a^2$$
$$ax-y=2a$$
έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε να λύσετε το σύστημα.

Λύση

Το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα
$$\left\{\begin{array}{c} x^2+4y^2=4a^2 \\ ax-y=2a \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=ax-2a \\ x^2+4(ax-2a)^2=4a^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=ax-2a \\ \left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0 \end{array}\right\}.$$
Το σύστημα έχει μία μόνο λύση, αν, και μόνον αν, η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή, αν, και μόνον αν, ισχύει:
$$\Delta=16a^2\left(4a^2-3\right)=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ή } a=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } a=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
- Για $a=0$, το σύστημα έχει τη λύση $(x,y)=(0,0)$.
- Για $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ γίνεται $4x^2-12x+9=0$ και έχει τη διπλή ρίζα $x=\frac{3}{2}$, οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x,y)=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x+y+z$ και $S_2 = xy+yz+zx$, όπου $x,y,z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1S_2 - 6$.

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x,y,z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=6 \Leftrightarrow x(xy+xz)+y(yz+yx)+z(zx+zy)=6$$

$$\Leftrightarrow x(S_2-yz)+y(S_2-zx)+z(S_2-xy)=6$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)S_2-3xyz=6 \Leftrightarrow 3xyz=S_1S_2-6.$$

(β) Για $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$ έχουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ xyz=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \text{ ή } z=0 \end{array}\right\},$$

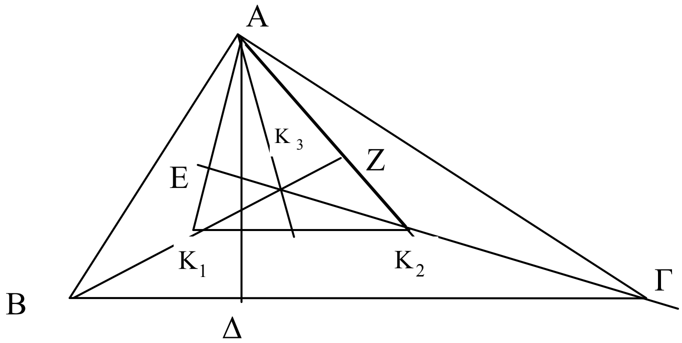
από το οποίο εύκολα προκύπτουν οι λύσεις

$$(x,y,z)=(2,1,0) \text{ ή } (1,2,0) \text{ ή } (2,0,1) \text{ ή } (1,0,2) \text{ ή } (0,2,1) \text{ ή } (0,1,2).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ, ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Λύση



Τα σημεία K_1 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, ενώ τα σημεία K_2 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$. Έτσι έχουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_3\Gamma = 180^0 - \left(\frac{\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}}{2}\right) = 180^0 - 45^\circ = 135^\circ$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_1\mathrm{A} = 135^\circ \text{ και } \Gamma\hat{\mathrm{K}}_3\mathrm{A} = 135^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$K_1\hat{K}_3E = K_3\hat{K}_1E = K_3\hat{K}_2Z = Z\hat{K}_3K_2 = 45^0,$$

ως παραπληρώματα κάποιας γωνίας 135^0. Επομένως τα τρίγωνα AEK_3, K_3EK_1 και K_3ZK_2 είναι ορθογώνια ισοσκελή, οπότε το σημείο K_3 είναι ορθόκεντρο του τριγώνου AK_1K_2.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AK_3E και K_2EK_1 είναι ίσα, γιατί έχουν $EK_3 = EK_1$ και $K_1\hat{K}_2E = E\hat{A}K_3$, αφού έχουν τις πλευρές τους κάθετες. Άρα είναι $AK_3 = K_1K_2$

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1 < k < 30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x),\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0, n \geq 1$ το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της δεδομένης ισότητας πολυωνύμων, λαμβάνουμε

$$3^n a_n = ka_n \Leftrightarrow k = 3^n.$$

Επειδή είναι $1 < k < 30$ οι μόνες δυνατές τιμές του n είναι οι $n = 1$ ή $n = 2$ ή $n = 3$.

Έτσι η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\left(x-3^n\right)P(3x) = 3^n(x-1)P(x),\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Για $n = 1$ η (1) γίνεται $(x-3)P(3x) = 3(x-1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την οποία για $x = 1$ προκύπτει $P(3) = 0$. Άρα είναι $P(x) = a_1(x-3)$.

Για $n = 2$ η (1) γίνεται $\left(x-3^2\right)P(3x) = 3^2(x-1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3) = 0$ και $P(9) = 0$. Άρα είναι $P(x) = a_2(x-3)(x-9)$.

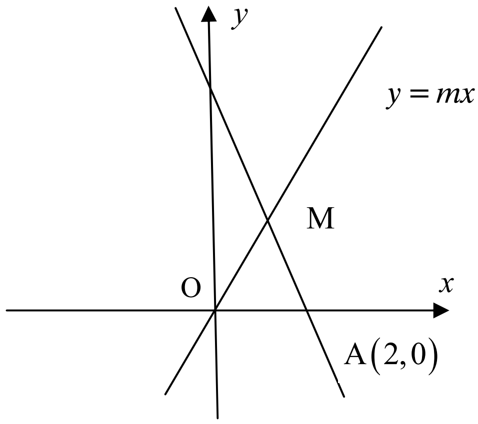
Για $n = 3$ η (1) γίνεται $\left(x-3^3\right)P(3x) = 3^3(x-1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3) = 0$, $P(9) = 0$ και $P(27) = 0$. Άρα είναι $P(x) = a_3(x-3)(x-9)(x-27)$.

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου m για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -3x+6$, $g(x) = mx,\ m \in \mathbb{R}$ και τον άξονα των x ισούται με 3.

Λύση



Από το σύστημα $y = mx, y = -3x+6$ προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι $\left(\frac{6}{m+3}, \frac{6m}{m+3}\right)$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{OAM}) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left|\frac{6m}{3+m}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{6m}{3+m} = 3 \text{ ή } \frac{6m}{3+m} = -3 \Leftrightarrow m = 3 \text{ ή } m = -1.$$

Πρόβλημα 2

Έστω Η το ορθόκεντρο και Ο το περίκεντρο οξυγωνίου τριγώνουΑΒΓ. Έστω ακόμη Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ_1, E_1 και Z_1 έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$, με $\lambda > 1$.. Ο κύκλος C_α που έχει κέντρο το σημείο Δ_1 και διέρχεται από το Η τέμνει την ευθεία ΒΓ στα σημεία A_1 και A_2. Όμοια, οι κύκλοι $C_\beta(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_1\mathrm{H})$ και $C_\gamma(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_1\mathrm{H})$ ορίζουν τα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ και Γ_1, Γ_2 στις ευθείες ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1 και Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Λύση

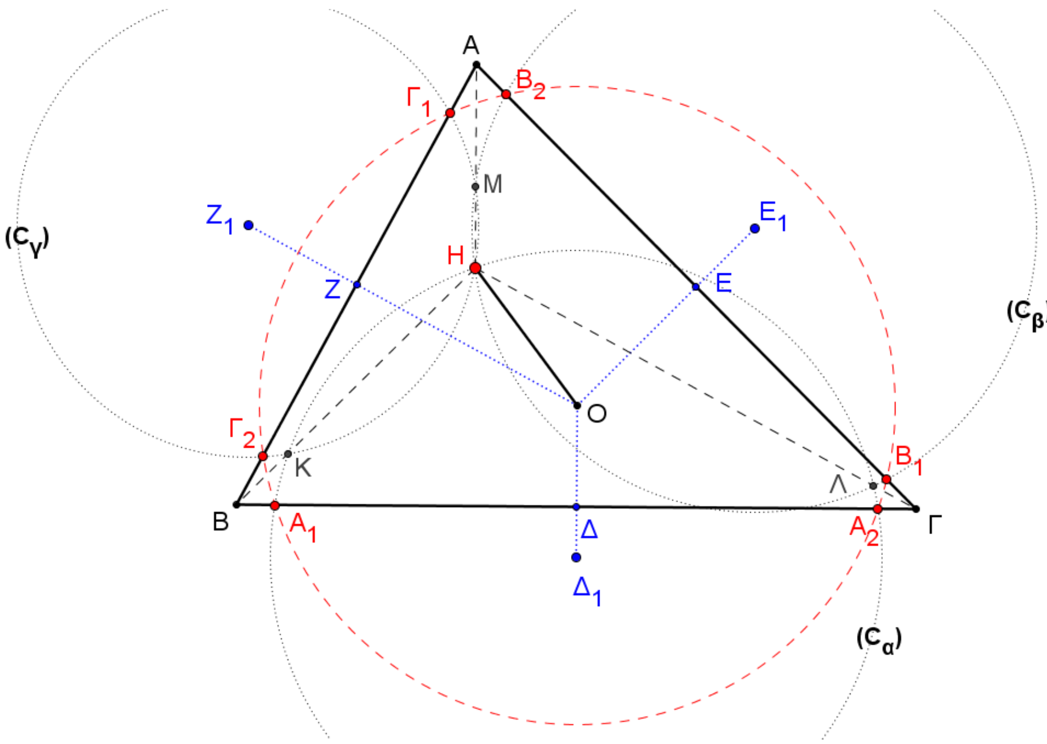
Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Επειδή τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες. Τα τρίγωνα ΔΕΖ και $\Delta_1\mathrm{E}_1\mathrm{Z}_1$ έχουν επίσης τις πλευρές τους παράλληλες, γιατί

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}.$$

Η $\Delta_1\mathrm{Z}_1$ είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής ΚΗ των κύκλων C_α και C_γ. Επειδή η $\Delta_1\mathrm{Z}_1$ είναι παράλληλη με την ΑΓ, έπεται ότι $\mathrm{KH} \perp \mathrm{A\Gamma}$.

Επειδή όμως ισχύει και ότι $\mathrm{BH} \perp \mathrm{A\Gamma}$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι τα σημεία Β, Κ, Η είναι συνευθειακά.

Με όμοιο τρόπο, αν ΜΗ, ΛΗ είναι η κοινή χορδή των κύκλων C_β, C_γ και C_α, C_β, αντίστοιχα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{H}$ και τα σημεία $\Gamma, \Lambda, \mathrm{H}$ είναι συνευθειακά.



Από τη δύναμη του σημείου Β ως προς τους κύκλους C_α και C_γ, έχουμε:

$$\mathrm{BK}\cdot\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{BA}_1\cdot\mathrm{BA}_2 = \mathrm{B\Gamma}_1\cdot\mathrm{B\Gamma}_2,$$

οπότε τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ είναι ομοκυκλικά στο κύκλο με κέντρο το O, που είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των τμημάτων $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ και $\Gamma_1\Gamma_2$.

Όμοια εργαζόμαστε και με τα άλλα ζευγάρια σημείων, οπότε τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1 και Γ_2 βρίσκονται σε κύκλο κέντρου O.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου k και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$, n βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0, n\geq 1$, το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της δεδομένης ισότητας πολυωνύμων, λαμβάνουμε

$$3^n a_n = k a_n \Leftrightarrow k = 3^n.$$

Έτσι η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$(x-3^n)P(3x) = 3^n(x-1)P(x), n\geq 1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Από την (1) για $x=1$ προκύπτει ότι $P(3)=0$, οπότε στη συνέχεια για $x=3$ προκύπτει $P(3^2)=0$. Συνεχίζοντας έτσι λαμβάνουμε τις σχέσεις $P(3^k)=0$, για $k=3,\ldots n-1$.

Επίσης από την (1) για $x = 3^n$ λαμβάνουμε:

$$0 = 3^n\left(3^n - 1\right)P\left(3^n\right) = 0 \Leftrightarrow P\left(3^n\right) = 0.$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο n βαθμού έχει τις n ρίζες 3^k, $k = 1, 2, ..., n$, οπότε

$$P(x) = a_n\left(x - 3\right)\left(x - 3^2\right)\cdots\left(x - 3^n\right),\ a_n \in \mathbb{R}.$$

. **Πρόβλημα 4**

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\left(f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\right)$. Αν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση:

$$f\left(f\left(f(x)\right) - f(y)\right) = f(x) - f\left(f(y)\right), \qquad (1)$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f, είναι περιττή.

Λύση

Θέτουμε στη δεδομένη σχέση όπου y το $f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} f\left(f\left(f(x)\right) - f\left(f(x)\right)\right) &= f(x) - f\left(f\left(f(x)\right)\right) \\ \Leftrightarrow f(0) &= f(x) - f\left(f\left(f(x)\right)\right) \\ \Leftrightarrow f\left(f\left(f(x)\right)\right) &= f(x) - f(0) \\ \Leftrightarrow \left(f \circ f \circ f\right)(x) &= f(x) - f(0) \qquad (2). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε τις ισότητες

$$\left.\begin{aligned} \left(f \circ f \circ f \circ f\right)(x) &= f\left(f(x) - f(0)\right) \\ \left(f \circ f \circ f \circ f\right)(x) &= f\left(f(x)\right) - f(0) \end{aligned}\right\},$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$f\left(f(x) - f(0)\right) = f\left(f(x)\right) - f(0). \qquad (3)$$

Από την (3) για $x = 0$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} f\left(f(0) - f(0)\right) &= f\left(f(0)\right) - f(0) \\ \Leftrightarrow f(0) &= f\left(f(0)\right) - f(0) \\ \Leftrightarrow f\left(f(0)\right) &= 2f(0) \qquad (4). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) για $x = y = 0$ και σε συνδυασμό με τη σχέση (4), έχουμε:

$$\begin{aligned} f\left(f\left(f(0)\right) - f(0)\right) &= f(0) - f\left(f(0)\right) \\ \Leftrightarrow f\left(2f(0) - f(0)\right) &= f(0) - 2f(0) \\ \Leftrightarrow f\left(f(0)\right) &= -f(0) \qquad (5). \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε: $f(0) = 0$.

Αν τώρα στη σχέση (1) θέσουμε $x = 0$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} f\left(f\left(f(0)\right) - f(y)\right) &= f(0) - f\left(f(y)\right) \\ \Leftrightarrow f\left(-f(y)\right) &= -f\left(f(y)\right). \end{aligned}$$

Επειδή όμως σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(y) = x$.

Άρα έχουμε $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι περιττή.

(ii) Το τρίγωνο ΗΕΖ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΕΖ, οπότε για τον υπολογισμό της ΕΖ θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Πρέπει όμως να έχουμε υπολογίσει τις κάθετες πλευρές ΗΖ και ΗΕ συναρτήσει του β.

Από το τρίγωνο ΗΔΓ που είναι ορθογώνιο στο Η με $\Gamma\Delta = \frac{\beta}{2}$ και έχει $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta = 30^0$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{H}\Delta = \Delta\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} \text{ και } \mathrm{H}\Gamma = \Delta\Gamma \cdot \eta\mu 30^0 = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\beta}{4}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα μήκη των ΗΔ και ΗΓ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΔΓ με $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta = 30^0$, οπότε η κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία των 30^0 θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας , δηλαδή είναι $\mathrm{H}\Gamma = \frac{\beta}{4}$ και στη συνέχεια από το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε και την πλευρά $\mathrm{H}\Delta = \frac{\beta\sqrt{3}}{4}$.

Το τρίγωνο ΓΔΖ είναι ισοσκελές ($\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 30^0$), οπότε θα είναι $\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\Delta = \frac{\beta}{2}$ και

$$\mathrm{HZ} = \mathrm{H}\Gamma + \Gamma\mathrm{Z} = \frac{\beta}{4} + \frac{\beta}{2} = \frac{3\beta}{4}.$$

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ με $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 90^\circ$, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 30^0$ και $\mathrm{A}\Delta = \frac{\beta}{2}$, έχουμε:

$$\Delta\mathrm{E} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\sigma\upsilon\nu 30^0} = \frac{\beta/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\beta\sqrt{3}}{3},$$

οπότε θα είναι

$$\mathrm{HE} = \mathrm{H}\Delta + \Delta\mathrm{E} = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} + \frac{\beta\sqrt{3}}{3} = \frac{7\beta\sqrt{3}}{12}.$$

Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΗΕΖ με $\hat{\mathrm{H}} = 90^\circ$ έχουμε:

$$\mathrm{EZ} = \sqrt{\mathrm{HE}^2 + \mathrm{HZ}^2} = \sqrt{\left(\frac{7\beta\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2} = \frac{\beta\sqrt{57}}{6}.$$

Α΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α, για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Για $\alpha = 0$ είναι $\mathrm{A} = 0$, ρητός. Έστω $\alpha \neq 0$. Αν ήταν ο $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ ρητός, τότε ο αριθμός $\frac{\mathrm{A}}{\alpha} = \sqrt{3}$, θα ήταν επίσης ρητός, ως πηλίκο δύο ρητών αριθμών, που είναι άτοπο.

Επομένως, ο αριθμός Α είναι ρητός μόνο για $\alpha = 0$.

(ii) Έχουμε $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$. Αν ο αριθμός Β ήταν ρητός, τότε ο αριθμός $\mathrm{B} - 4 = 2\sqrt{3}$ θα ήταν επίσης ρητός, ως διαφορά δύο ρητών, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x+1-2|x|=\alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.
Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Λύση
Επειδή στην εξίσωση εμφανίζεται η απόλυτη τιμή του αγνώστου x διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $x\geq 0$.
Τότε ισχύει $|x|=x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x+1-2x=\alpha x, x\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)x=1, x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha+1}, & \text{αν } \alpha>-1 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha\leq -1. \end{cases}$$

(ii) Έστω $x<0$.
Τότε ισχύει $|x|=-x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x+1+2x=\alpha x, x<0 \Leftrightarrow (\alpha-3)x=1, x<0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha-3}, & \text{αν } \alpha<3 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha\geq 3. \end{cases}$$

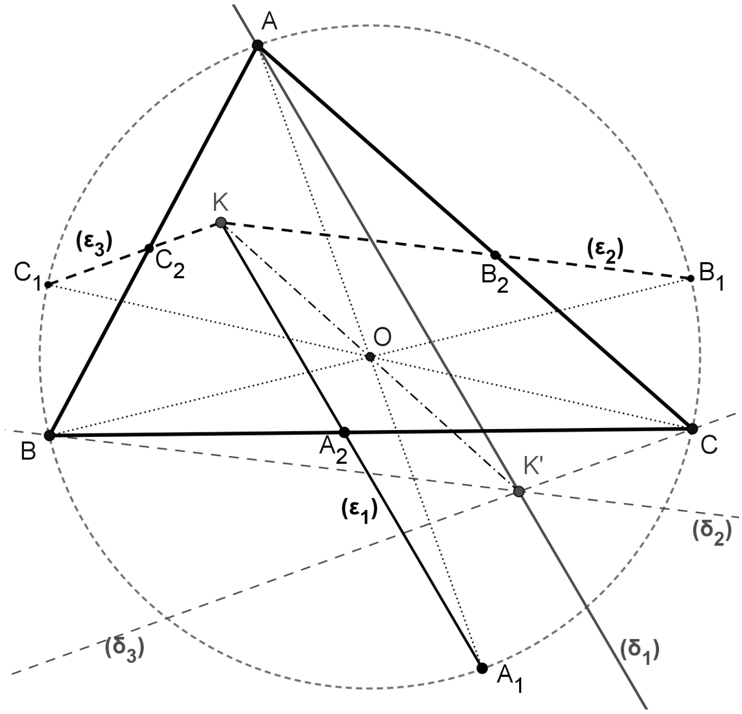
Επομένως, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση. Η εξίσωση έχει 2 πραγματικές λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους, αν ισχύει: $-1<\alpha<3$.
Πράγματι, για $-1<\alpha<3$ η εξίσωση έχει τις λύσεις $x_1=\dfrac{1}{\alpha-3}<0$ και $x_2=\dfrac{1}{\alpha+1}>0$ που είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1,B_1,C_1 τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του A,B,C. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC,AC,AB θεωρούμε τα σημεία A_2,B_2,C_2 αντίστοιχα και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A_1,A_2, (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία B_1,B_2 και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1,C_2.
Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1), (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1),(\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν

Λύση
Οι ευθείες (ε_1) και (δ_1) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της AA_1.
Οι ευθείες (ε_2) και (δ_2) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της BB_1.

Οι ευθείες (ε_3) και (δ_3) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της CC_1.

Σύμφωνα με τη θεωρία, αν περιστρέψουμε μία ευθεία κατά 180^0 γύρω από το κέντρο συμμετρίας, τότε αυτή θα συμπέσει με τη συμμετρική της ευθεία, ως προς κέντρο το σημείο O. Επομένως, οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) συντρέχουν, έστω στο σημείο K, αν, και μόνο αν, οι ευθείες (δ_1), (δ_2) και (δ_3) συντρέχουν στο σημείο K', που είναι το συμμετρικό του σημείου K ως προς το σημείο O.



Σχήμα 3

Παρατήρηση

Το σημείο K ταυτίζεται με το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC, αν, και μόνο αν, τα σημεία A_2, B_2, C_2 είναι τα μέσα των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα.

Στη περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή πρόταση:

"*Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ως προς τα μέσα των πλευρών τριγώνου, βρίσκονται επάνω στο περιγεγραμμένο του κύκλο και είναι αντιδιαμετρικά των κορυφών του*"

Πρόβλημα 4

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3 - y^3 = 26z^3$$

$$x^2y - xy^2 = 6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z.

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x + 2y + 3z = 8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z.

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη ισότητα επί 3 και την αφαιρούμε από την πρώτη, οπότε λαμβάνουμε

$$(x-y)^3 = 8z^3 \Leftrightarrow x - y = 2z. \qquad (1)$$

Τότε η δεύτερη ισότητα γίνεται:

$$2zxy = 6z^3\,, \qquad (2)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $z \neq 0$.
Τότε η (2) είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$xy = 3z^2\,, \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η σχέση

$$x(x-2z) = 3z^2 \Leftrightarrow x^2 - 2zx - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3z \text{ ή } x = -z\,,$$

οπότε θα είναι

$$x = 3z, y = z \text{ ή } x = -z, y = -3z\,.$$

(ii) Για $z = 0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2)=0\\ xy(x-y)=0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow x-y=0 \text{ ή } x=y=0\,,$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$x = y, \text{ ανεξάρτητα από το } z\,.$$

(β) Για $x = 3z, y = z$ η εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ γίνεται $8z = 8 \Leftrightarrow z = 1$, οπότε έχουμε ότι $(x,y,z) = (3,1,1)$, ενώ για $x = -z, y = -3z$, η εξίσωση γίνεται $-4z = 8 \Leftrightarrow z = -2$, οπότε έχουμε ότι $(x,y,z) = (2,6,-2)$.
Για $z = 0$, είναι $x = y$, οπότε από την εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ προκύπτει ότι

$$(x,y,z) = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 0\right).$$

Β΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x,y,z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 65z^3 \\ x^2y + xy^2 &= 20z^3 \\ x - y + 2z &= 10. \end{aligned}$$

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί 3 και την προσθέτουμε στην πρώτη, οπότε λαμβάνουμε την εξίσωση

$$(x+y)^3 = 125z^3 \Leftrightarrow x + y = 5z\,. \qquad (1)$$

Τότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$5zxy = 20z^3\,, \qquad (2)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $z \neq 0$.
Τότε από την εξίσωση (2) λαμβάνουμε:

$$xy = 4z^2\,. \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η εξίσωση

$$x(5z-x) = 4z^2 \Leftrightarrow x^2 - 5zx + 4z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4z \text{ ή } x = z\,,$$

οπότε θα είναι

$$x = 4z, y = z \text{ ή } x = z, y = 4z\,.$$

Για $x=4z, y=z$ η τρίτη εξίσωση του συστήματος γίνεται $5z=10 \Leftrightarrow z=2$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x,y,z)=(8,2,2)$, ενώ για $x=z,\ y=4z$ η τρίτη εξίσωση γίνεται $-z=10 \Leftrightarrow z=-10$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x,y,z)=(-10,-40,-10)$.

(ii) Για $z=0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases}(x+y)(x^2-xy+y^2)=0\\ xy(x+y)=0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow x+y=0 \text{ ή } x=y=0 \Leftrightarrow x=-y,$$

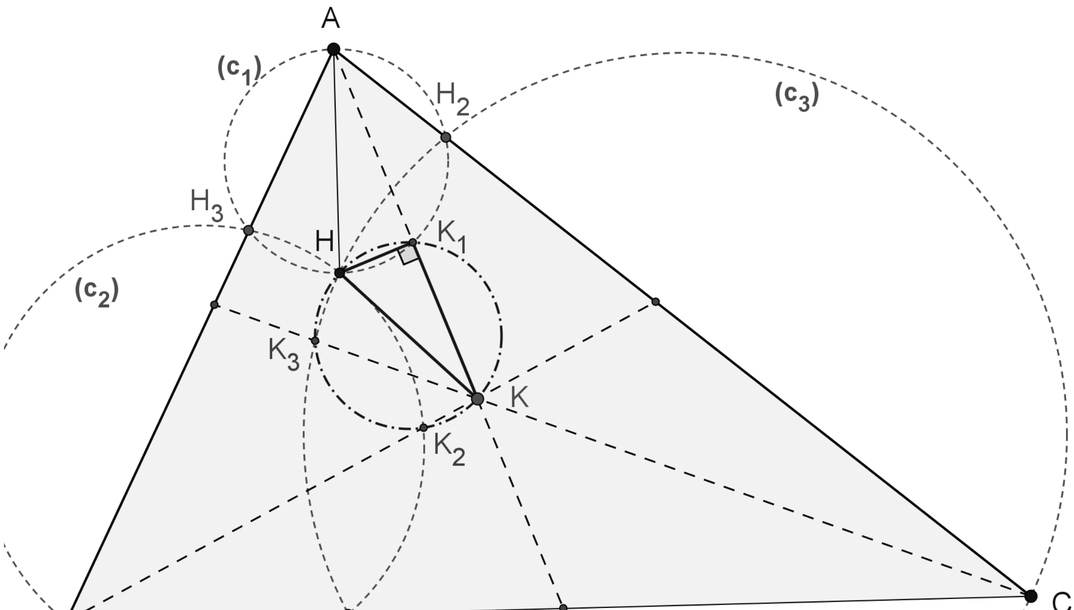
οπότε από την τρίτη εξίσωση προκύπτει ότι $(x,y,z)=(5,-5,0)$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC, K τυχόν σημείο στο εσωτερικό του και τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 τέμνει την ημιευθεία AK στο σημείο K_1, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 τέμνει την ημιευθεία BK στο σημείο K_2 και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2 τέμνει τη ημιευθεία CK στο σημείο K_3. Να αποδείξτε ότι τα σημεία K_1, K_2, K_3, H και K είναι ομοκυκλικά (δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο), όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.

Λύση

Έστω (c_1) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3, (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2.



Σχήμα 4

Το τετράπλευρο AH_2HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_1) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο BH_1HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο CH_1HH_2 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_3) περνάει από το σημείο H.
Τελικά, οι τρεις κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) περνάνε από το ορθόκεντρο H του τριγώνου ABC.

Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την AH, οπότε $HK_1 \perp AK_1$, δηλαδή το σημείο K_1 ανήκει στο κύκλο διαμέτρου HK.
Όμοια αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία K_2, K_3, ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x + 1 - 2|x| = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ δύο διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιες τιμές του α οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες;

Λύση
Λόγω της ύπαρξης του $|x|$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $x \geq 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + x + 1 - 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha + 1)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha+1)^2 - 4 = (\alpha-1)(\alpha+3)$. Άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες, όταν είναι $\alpha \leq -3$ ή $\alpha \geq 1$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο θετικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$.
Επομένως έχουμε:

- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (1) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές θετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (1) έχει τη διπλή θετική ρίζα $x = 1$ στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (1) δεν έχει μη αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(ii) Έστω $x < 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + x + 1 + 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha - 3)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha-3)^2 - 4 = (\alpha-5)(\alpha-1)$. Άρα η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες όταν είναι $\alpha \leq 1$ ή $\alpha \geq 5$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο αρνητικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha - 3 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 3$.
Επομένως έχουμε:

- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (2) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (2) έχει τη διπλή αρνητική ρίζα $x = -1$ στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (2) δεν έχει αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Από τις περιπτώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η δεδομένη εξίσωση έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δύο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους, οι οποίες είναι ετερόσημες για $\alpha = 1$.

Πρόβλημα 4
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$$

Λύση
Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι ισχύει: $2x^2 + 3x + 2 > 0$ και $x^2 + x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν θέσουμε $a = \sqrt{2x^2 + 3x + 2},\ b = \sqrt{x^2 + x + 1},\ x \in \mathbb{R}$, τότε λαμβάνουμε:

$$a^2 - b^2 = (2x^2 + 3x + 2) - (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2,$$

οπότε από τη δεδομένη εξίσωση προκύπτει η εξίσωση με αγνώστους a, b,

$$a^2-b^2=(a-2b)^2 \Leftrightarrow 4ab-5b^2=0 \Leftrightarrow b(4a-5b)=0 \Leftrightarrow 4a=5b,$$

αφού είναι $b\neq 0$. Έτσι έχουμε την εξίσωση

$$4\sqrt{2x^2+3x+2}=5\sqrt{x^2+x+1},$$

της οποίας τα δύο μέλη είναι θετικά, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$16\cdot\left(2x^2+3x+2\right)=25\cdot\left(x^2+x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2+23x+7=0 \Leftrightarrow x=\frac{-23\pm 3\sqrt{37}}{14}.$$

Με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι η τιμή $x=\dfrac{-23+3\sqrt{37}}{14}$ δεν επαληθεύει την εξίσωση, οπότε η μοναδική ρίζα της είναι η $x=\dfrac{-23-3\sqrt{37}}{14}$. Αυτό θα μπορούσε να προκύψει και από τη σχέση $a-2b<0$ η οποία αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε πρέπει να είναι $x<-1$.

Γ΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία $a_n, n\in\mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1}=a_n+kn,\ n\in\mathbb{N}^*,$$

όπου k θετικός ακέραιος και $a_1=1$. Να βρείτε για ποια τιμή του k ο αριθμός 2011 είναι όρος της ακολουθίας $a_n, n\in\mathbb{N}^*$.

Λύση

Από τη δεδομένη αναδρομική σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}
&a_1=1\\
&a_2=a_1+k\\
&a_3=a_2+2k\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n-1}=a_{n-2}+(n-2)k\\
&a_n=a_{n-1}+(n-1)k
\end{aligned}$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$a_n=1+k(1+2+\ldots+n-1)=1+k(1+2+\ldots+n-1)=1+\frac{k(n-1)n}{2}.$$

Επομένως, αρκεί να προσδιορίσουμε τις τιμές των k και n για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$a_n=1+\frac{k(n-1)n}{2}=2011 \Leftrightarrow k(n-1)n=4020 \Leftrightarrow k(n-1)n=1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot67$$

$$\Leftrightarrow (n,k)=(2,2010) \text{ ή } (n,k)=(3,670) \text{ ή } (n,k)=(4,335) \text{ ή } (n,k)=(5,201) \text{ ή } (n,k)=(6,134)$$

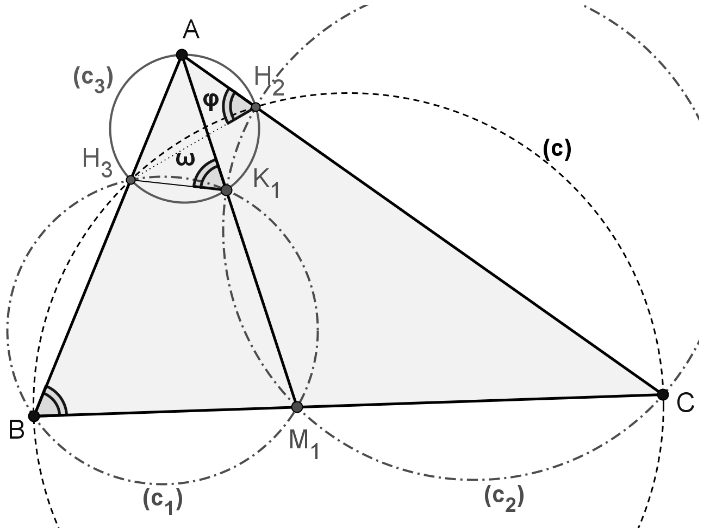
Επομένως, για $k=2010$ είναι $a_2=2011$, για $k=670$ είναι $a_3=2011$, για $k=335$ είναι $a_4=2011$, για $k=201$ είναι $a_5=2011$ και για $k=134$ είναι $a_6=2011$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC και έστω M_1, M_2, M_3 τυχόντα σημεία των πλευρών του BC, AC, AB, αντίστοιχα. Έστω ακόμη τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων AH_2H_3, BM_1H_3, CM_1H_2 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_1), οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BH_1H_3, AM_2H_3, CM_2H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_2) και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων CH_1H_2, AM_3H_2, BM_3H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_3). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν , δηλαδή περνάνε από το ίδιο σημείο, αν, και μόνο αν, οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 συντρέχουν.

Λύση

Έστω (c_1) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BM_1H_3, (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CM_1H_2, (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 και (c) ο περιγεγραμμένος κύκλος του εγγράψιμου τετραπλεύρου BH_3H_2C.



Σχήμα 5

Θεωρώντας τις τέμνουσες AB και AC του κύκλου (c), συμπεραίνουμε:

$$AB \cdot AH_3 = AC \cdot AH_2 .$$

Το γινόμενο όμως $AB \cdot AH_3$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου A ως προς το κύκλο (c_1) ενώ το γινόμενο $AC \cdot AH_2$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου A ως προς το κύκλο (c_2).

Άρα το σημείο A, ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων (c_1) και (c_2).

Έστω τώρα ότι οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνονται στο σημείο K_1 (εκτός βέβαια από το σημείο M_1). Τότε η ευθεία που ορίζουν τα σημεία αυτά (δηλαδή τα K_1 και M_1) είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων (c_1) και (c_2).

Από τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτει ότι τα σημεία A, K_1 και M_1 είναι συνευθειακά.

Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος (c_3) περνάει από το σημείο K_1, δηλαδή ότι το τετράπλευρο $AH_2K_1H_3$ είναι εγγράψιμο.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο BH_3H_2C έχουμε: $\hat{\varphi}=\hat{B}$. Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BM_1K_1H_3$ έχουμε: $\hat{\omega}=\hat{B}$. Άρα είναι $\hat{\omega}=\hat{\varphi}$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $AH_2K_1H_3$ είναι εγγράψιμο.
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι δύο άλλες τριάδες κύκλων, περνάνε από το ίδιο σημείο.
Προφανώς τώρα οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν, αν, και μόνο αν, συντρέχουν οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 (δεδομένου ότι τα σημεία A, K_1, M_1, τα σημεία B, K_2, M_2 και τα σημεία C, K_3, M_3, είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3
Αν $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ με $(a,b)\neq(0,0)$ και $(x,y)\neq(0,0)$ και ισχύουν

$$a\left(x^2-y^2\right)-2bxy=x\left(a^2-b^2\right)-2aby$$
$$b\left(x^2-y^2\right)+2axy=y\left(a^2-b^2\right)+2abx,$$

να αποδείξετε ότι $x=a$ και $y=b$.

Λύση
Σύμφωνα με τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών, προκύπτει ότι το σύστημα των δύο δεδομένων εξισώσεων είναι ισοδύναμο με την εξίσωση:

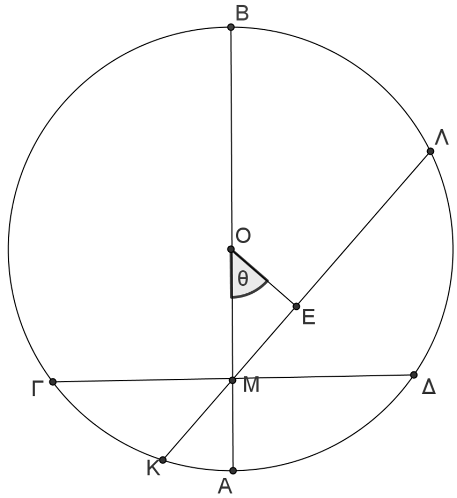
$$\left[a\left(x^2-y^2\right)-2bxy\right]+\left[b\left(x^2-y^2\right)+2axy\right]i=\left[x\left(a^2-b^2\right)-2aby\right]+\left[y\left(a^2-b^2\right)+2abx\right]i$$
$$\Leftrightarrow (a+bi)\cdot\left[\left(x^2-y^2\right)+2xyi\right]=\left[\left(a^2-b^2\right)+2abi\right]\cdot(x+yi)$$
$$\Leftrightarrow (a+bi)\cdot(x+yi)^2=(a+bi)^2\cdot(x+yi)$$
$$\Leftrightarrow x+yi=a+bi \text{ (αφού } (\alpha,\beta)\neq(0,0) \text{ και } (x,y)\neq(0,0))$$
$$\Leftrightarrow x=a,\ y=b.$$

Πρόβλημα 4
Σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$, όπου $\mathrm{r}=15cm$, σε απόσταση $9cm$ από το κέντρο του κύκλου. Να βρείτε τον αριθμό των χορδών του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.

Λύση
Θεωρούμε τη χορδή ΑΒ που περνάει από το σημείο Μ και το κέντρο Ο του κύκλου, καθώς και την κάθετη προς αυτήν χορδή ΓΜΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΓΔ. Η χορδή ΑΒ έχει ακέραιο μήκος $30cm$. Από το θεώρημα τεμνομένων χορδών έχουμε ότι:

$$\mathrm{ΓΜ}\cdot\mathrm{ΜΔ}=\mathrm{ΑΜ}\cdot\mathrm{ΜΒ}\Leftrightarrow\left(\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}\right)^2=6\cdot(9+15)\Leftrightarrow\left(\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}\right)^2=144\Leftrightarrow\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}=12\Leftrightarrow\mathrm{ΓΔ}=24.$$

Έτσι μέχρι τώρα έχουμε βρει δύο χορδές του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και έχουν ακέραιο μήκος. Θεωρούμε τυχούσα χορδή ΚΛ του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάει από το Μ και έστω $\mathrm{ΜΕ}=x$, $\mathrm{M\hat{O}E}=\theta$, όπου Ε είναι το μέσο της ΚΛ, σχήμα 6. Αν υποθέσουμε ότι $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, τότε έχουμε θεωρήσει όλες τις χορδές του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το Μ και τα άκρα τους Κ και Λ βρίσκονται στα ελάσσονα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{ΑΓ}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{ΒΔ}}$, αντίστοιχα . Για κάθε μία από αυτές τις χορδές αντιστοιχεί και μία ακόμη που είναι η συμμετρική της ως προς τη διάμετρο ΑΒ.



Σχήμα 6

Για τη χορδή ΚΛ, αν συμβολίσουμε το μήκος της ως $\ell(\theta)$, έχουμε

$$\ell(\theta) = 2\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Επειδή είναι $\ell'(\theta) = \dfrac{81\eta\mu 2\theta}{\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta}} > 0,\ \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι η συνάρτηση $\ell(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, οπότε η συνάρτηση $\ell(\theta)$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left[\ell(0), \ell\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = [24, 30]$. Άρα το μήκος της χορδής ΚΛ μπορεί να πάρει όλες τις ακέραιες τιμές του διαστήματος $[24, 30]$. Αν λάβουμε υπόψιν και τη συμμετρική χορδή της ΚΛ ως προς τη διάμετρο ΑΒ, τότε τα πέντε μήκη 25, 26, 27, 28, 29 λαμβάνονται δύο φορές το καθένα, ενώ τα μήκη 24 και 30 λαμβάνονται από μία φορά. Έτσι έχουμε συνολικά 12 χορδές που περνάνε από το Μ με ακέραιο μήκος.

Παρατήρηση 1

Θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το *θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής* για τη συνεχή συνάρτηση $\ell(\theta) = 2\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta},\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, η οποία έχει ελάχιστη τιμή την $\ell(0) = 24$ και μέγιστη τιμή την $\ell\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 30$. Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι τα μήκη των χορδών είναι αντιστρόφως ανάλογα από τα αποστήματά τους και ότι το μέγιστο απόστημα λαμβάνεται για $\theta = 0$, ενώ το ελάχιστο απόστημα λαμβάνεται για $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Παρατήρηση 2

Σημειώνουμε ακόμη ότι οι χορδές με ακέραια μήκη 25, 26, 27, 28, 29, μπορούν να κατασκευαστούν γεωμετρικά, αφού αν θέσουμε $\text{ΚΜ} = x$ και $\text{ΜΛ} = y$, τότε έχουμε

$$x + y = m,\ m \in \{25, 26, 27, 28, 29\} \text{ και } xy = 144 = 12^2.$$

Έτσι εξασφαλίζουμε την ύπαρξη αυτών των χορδών με ακέραιο μήκος, χωρίς τη χρήση του διαφορικού λογισμού.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α, β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι για $\beta=0$, ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}=\alpha$ είναι ρητός, για κάθε ρητό αριθμό α.

Έστω ότι, για $\beta \neq 0$, ο αριθμός $\rho=\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$\rho-\alpha=\left(\alpha+\beta\sqrt{10}\right)-\alpha=\beta\sqrt{10}$$

θα είναι ρητός, αλλά και ο αριθμός $\frac{\rho-\alpha}{\beta}=\sqrt{10}$ θα είναι ρητός, που είναι άτοπο.

Άρα ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός, για $\beta=0$ και για κάθε ρητό αριθμό α.

(ii) Έστω ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$x^2=\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=5+\frac{2}{4}+\sqrt{10}=\frac{11}{2}+\sqrt{10},$$

θα είναι ρητός, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x|-2\right)^2=x^2+4\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$|x|^2-4|x|+4=x^2+4\alpha \Leftrightarrow x^2-4|x|+4=x^2+4\alpha \Leftrightarrow |x|=1-\alpha .$$

Επειδή είναι $|x|\geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha<1$, οπότε είναι $1-\alpha>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις:
  $$x=1-\alpha \text{ ή } x=\alpha-1.$$
- $\alpha=1$, οπότε η εξίσωση έχει μόνο τη λύση $x=0$.
- $\alpha>1$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή του Α και είναι παράλληλη προς τη πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Δ και έστω Ε το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή Α. Από το Α τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την ΕΒ η οποία τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Μ και τη ΒΓ στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι : ΑΒ = ΒΚ = ΚΔ = ΔΑ.

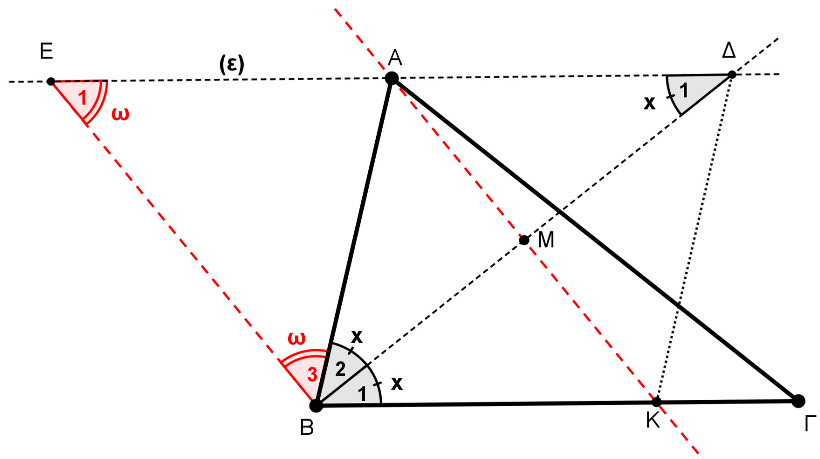
Λύση

Επειδή είναι $A\Delta \parallel B\Gamma$ θα ισχύει: $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 = \hat{x} = \frac{\hat{B}}{2}$.

Επίσης η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, οπότε θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \frac{\hat{B}}{2}$.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \frac{\hat{B}}{2}$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, δηλαδή:

$$AB = A\Delta . \qquad (1)$$



Σχήμα 3

Επειδή E είναι το συμμετρικό του Δ ως προς το A, θα ισχύει:

$$A\Delta = AE . \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε $AE = AB$ και κατά συνέπεια $\hat{E}_1 = \hat{B}_3 = \hat{\omega}$.

Από το τρίγωνο τώρα $BE\Delta$ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{E}_1 = 180^o \Rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{\omega} = 180^o \Rightarrow \hat{x} + \hat{\omega} = 90^o ,$$

δηλαδή το τρίγωνο $BE\Delta$ είναι ορθογώνιο ($BE \perp B\Delta$) και εφόσον $AM \parallel BE$ καταλήγουμε:

$$AM \perp B\Delta .$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $BA\Delta$ η AM είναι ύψος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς $B\Delta$.

Επειδή τώρα το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετη του $B\Delta$, το τρίγωνο $KB\Delta$ είναι ισοσκελές και ίσο με το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$ (διότι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ και $B\Delta$ κοινή πλευρά). Άρα θα έχουν και $AB = A\Delta = BK = K\Delta$, οπότε το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + \beta + \gamma = 2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2 .$$

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες λαμβάνουμε

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 2010^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2010^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - 2(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - \frac{2}{3} \cdot 2010^2 = \frac{2010^2}{3} .$$

Άρα έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)=\frac{2010^2}{3}-\frac{1}{3}\cdot 2010^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=\beta-\gamma-\gamma-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma,$$

γιατί, αν ήταν $\alpha-\beta\neq 0$ ή $\beta-\gamma\neq 0$ ή $\gamma-\alpha\neq 0,$ τότε θα είχαμε

$$\left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2>0.$$

Επομένως, από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=2010$ λαμβάνουμε $\alpha=\beta=\gamma=670$.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left(|x|-1\right)^2 = 2x+\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-2|x|+1=2x+\alpha \Leftrightarrow x^2-2\left(|x|+x\right)+1-\alpha=0. \qquad (1)$$

Λόγω της παρουσίας της απόλυτης τιμής του x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $x \geq 0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-4x+1-\alpha=0, \qquad (2)$$

η οποία είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 16-4(1-\alpha)=4(3+\alpha)$.

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν, $\alpha \geq -3$. Για να διαπιστώσουμε πόσες από αυτές είναι δεκτές θεωρούμε το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών που είναι

$$\mathrm{P}=1-\alpha \text{ και } \mathrm{S}=4>0.$$

Έτσι, για την εξίσωση (2) έχουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha \leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες** μη αρνητικές, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$. Ειδικότερα, αν $\alpha=1$, τότε η εξίσωση έχει τις ρίζες $x=4$ και $x=0$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **μία** μόνο ρίζα μη αρνητική, τη $x=2+\sqrt{3+\alpha}$

(ii) $x<0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2+1-\alpha=0, \qquad (3)$$

η οποία έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, τη $x=-\sqrt{\alpha-1}$, αν $\alpha>1$.

Συνοπτικά, από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε για τη δεδομένη εξίσωση, τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $\alpha<-3$, η εξίσωση **δεν έχει ρίζες** στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, τις $x=2+\sqrt{3+\alpha}$, $x=-\sqrt{\alpha-1}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 8 \\ x^2+y^2+z^2 &= 26 \\ xy+xz &= (yz+1)^2. \end{aligned}$$

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ x^2+y^2+z^2=26 \\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=26 \\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ xy+yz+zx=19 \\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y+z=8\\ xy+yz+zx=19\\ 19-yz=(yz+1)^2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)+yz=19\\ (yz)^2+3(yz)-18=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)+yz=19\\ yz=-6 \text{ ή } yz=3\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)+yz=19\\ yz=3\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)+yz=19\\ yz=-6\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)=16\\ yz=3\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(y+z)=25\\ yz=-6\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(8-x)=16\\ yz=3\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x(8-x)=25\\ yz=-6\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x^2-8x+16=0\\ yz=3\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x^2-8x+25=0\\ yz=-6\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x=4\\ yz=3\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8\\ x^2-8x+25=0\,(\text{αδύνατη στο } \mathbb{R})\\ yz=-6\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4\\ y+z=4\\ yz=3\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4\\ z=4-y\\ y(4-y)=3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=4\\ z=4-y\\ y^2-4y+3=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow (x,y,z)=(4,1,3) \text{ ή } (x,y,z)=(4,3,1).$$

Πρόβλημα 3

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1\le\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=(\alpha+\beta)\gamma, \quad (1)$$

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}\ge\frac{(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma. \quad (2)$$

Η ισότητα στη (2) ισχύει, αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta$.

Άρα έχουμε

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma\le\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<(\alpha+\beta)\gamma. \quad (3)$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\alpha\le\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}<(\beta+\gamma)\alpha, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\beta\le\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<(\gamma+\alpha)\beta. \quad (5)$$

Οι ισότητα στις (4) και (5) ισχύει αν, και μόνον αν, $\beta=\gamma$ και $\gamma=\alpha$, αντίστοιχα.

Από τις (3), (4) και (5) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε :.

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \le \frac{\left(\alpha^3+\beta^3\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\left(\beta^3+\gamma^3\right)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\left(\gamma^3+\alpha^3\right)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} < 2\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right) \qquad (6)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \qquad (7)$$

οπότε από τις (6) και (7) προκύπτουν οι ζητούμενες ανισότητες.

Η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta=\gamma$, οπότε από τη σχέση $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Παρατήρηση. *Η δεύτερη ανισότητα είναι γνήσια από την κατασκευή της άσκησης με τους* α,β,γ *θετικούς πραγματικούς αριθμούς, λόγω της ισότητας* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$. *Στην περίπτωση που επιτρέψουμε οι* α,β,γ *να είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, δίνοντας στην παραπάνω ισότητα τη μορφή* $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, *τότε η δεύτερη ανισότητα γίνεται*

$$\frac{\left(\alpha^3+\beta^3\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\left(\beta^3+\gamma^3\right)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\left(\gamma^3+\alpha^3\right)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} \le 2,$$

όπου η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, ένας μόνον από τους α,β,γ *είναι μηδέν και οι άλλοι δύο αντίστροφοι.*

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο O και ακτίνα R. Από το σημείο A φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r=\mathrm{OM}$ (M είναι το μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο T, τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N και το κύκλο (c) στο σημείο N_1 (θεωρούμε $\mathrm{BN}<\mathrm{BM}$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ, τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K και το κύκλο (c) στο σημείο K_1 (θεωρούμε $\Gamma\mathrm{K}<\Gamma\mathrm{M}$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{BN}_1, \Gamma\mathrm{K}_1$ και AM περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Οι χορδές $\mathrm{AN}_1, \mathrm{AK}_1$ και $\mathrm{B\Gamma}$ του κύκλου *(c)*, είναι εφαπτόμενες του κύκλου *(c_1)* στα σημεία T,Σ και M αντίστοιχα. Άρα οι ακτίνες $\mathrm{OT},\mathrm{O\Sigma}$ και OM του κύκλου *(c_1)*, είναι κάθετες προς τις χορδές $\mathrm{AN}_1, \mathrm{AK}_1$ και $\mathrm{B\Gamma}$ του κύκλου *(c)* αντίστοιχα. Δηλαδή οι ακτίνες $\mathrm{OT},\mathrm{O\Sigma}$ και OM του κύκλου *(c_1)*, είναι τα αποστήματα που αντιστοιχούν στις χορδές $\mathrm{AN}_1, \mathrm{AK}_1$ και $\mathrm{B\Gamma}$ του κύκλου *(c)*. Τα αποστήματα $\mathrm{OT},\mathrm{O\Sigma}$ και OM είναι ίσα μεταξύ τους , αφού είναι ακτίνες του κύκλου *(c_1)*.

Άρα $\mathrm{AN}_1=\mathrm{AK}_1=\mathrm{B\Gamma}$ (*) και τα σημεία $\mathrm{T},\Sigma,\mathrm{M}$ είναι τα μέσα των χορδών $\mathrm{AN}_1, \mathrm{AK}_1$ και $\mathrm{B\Gamma}$, αντίστοιχα. Από τους προηγούμενους συλλογισμούς, προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων:

$$\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{TA}=\mathrm{TN}_1=\Sigma\mathrm{A}=\Sigma\mathrm{K}_1 \qquad (1)$$

Το σημείο N βρίσκεται εκτός του κύκλου *(c_1)* και NM,NT είναι τα εφαπτόμενα τμήματα, οπότε

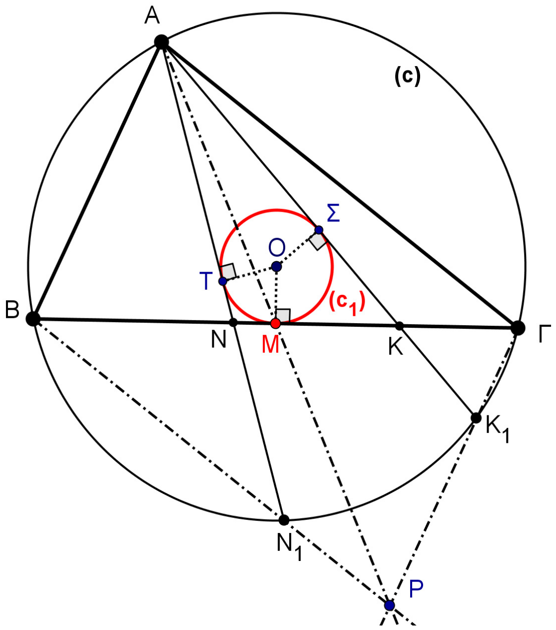
$$\mathrm{NM}=\mathrm{NT} \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(1):\quad MB = TN_1 \\ (2):\quad NM = NT\end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{MB}{MN} = \frac{TN_1}{NT} \Rightarrow TM\, P BN_1 \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας και πάλι τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(1):\quad M\Gamma = TA \\ (2):\quad NM = NT\end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{M\Gamma}{NM} = \frac{TA}{NT} \Rightarrow TM\,//\,A\Gamma \qquad (4)$$



Σχήμα 4

Από τις (3) και (4) έχουμε $BN_1\, P A\Gamma$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\Gamma K_1\, P AB$. Αν λοιπόν P είναι η τομή των ευθειών BN_1 και ΓK_1, τότε το τετράπλευρο $AB P\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα οι ευθείες $BN_1, \Gamma K_1$ και AM θα συντρέχουν στο P.

(*) "Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα."

(Θεώρημα ΙΙΙ, Σελ.46, του Σχολικού βιβλίου της ΕΜΕ)

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν οι α, β, γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12$$

Λύση

Από τις γνωστές ανισότητες

$$\alpha^2+4\beta^2 \geq 4\alpha\beta,\ \beta^2+4\gamma^2 \geq 4\beta\gamma,\ \gamma^2+4\alpha^2 \geq 4\gamma\alpha, \tag{1}$$

λαμβάνουμε τις ανισότητες:

$$\frac{\alpha^2+4\beta^2}{4\alpha\beta} \geq \frac{4\alpha\beta}{4\alpha\beta}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \alpha=2\beta) \Rightarrow \frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta} \geq \gamma \tag{2}$$

$$\frac{\beta^2+4\gamma^2}{4\beta\gamma} \geq \frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \beta=2\gamma) \Rightarrow \frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma} \geq \alpha \tag{3}$$

$$\frac{\gamma^2+4\alpha^2}{4\gamma\alpha} \geq \frac{4\gamma\alpha}{4\gamma\alpha}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \gamma=2\alpha) \Rightarrow \frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha} \geq \beta \tag{4}$$

Από τις (2), (3) και (4) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha} \geq \alpha+\beta+\gamma=12\,. \tag{5}$$

Η ισότητα στη σχέση (5) ισχύει, αν, και μόνον αν, ισχύουν οι ισότητες και στις τρεις σχέσεις (2), (3) και (4) ή ισοδύναμα:

$$\alpha=2\beta,\ \beta=2\gamma,\ \gamma=2\alpha\,,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma=0$, που είναι άτοπο, αφού οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί. Επομένως έχουμε αποδείξει ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12\,.$$

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left.\begin{cases} x^2+2xy=\ \ 5 \\ y^2-3xy=-2 \end{cases}\right\}. \tag{Σ}$$

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει λύση (x, y) του συστήματος (Σ), με $x=0$ ή $y=0$, τότε λαμβάνουμε 0 = 5 ή 0 = -2, άτοπο.

Για $xy \neq 0$, η μία εξίσωση του συστήματος μπορεί να αντικατασταθεί με αυτήν που προκύπτει από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, με διαίρεση κατά μέλη:

$$\frac{x^2+2xy}{y^2-3xy}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{1+2\cdot\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-3\cdot\frac{y}{x}}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\frac{1+2m}{m^2-3m}=-\frac{5}{2}\\ \frac{y}{x}=m\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}5m^2-11m+2=0\\ \frac{y}{x}=m\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}m=2 \text{ ή } m=\frac{1}{5}\\ \frac{y}{x}=m\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}m=2\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}m=\frac{1}{5}\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\}.$$

Επομένως έχουμε:

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2+2xy=5\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}x^2+2xy=5\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}5x^2=5\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}\frac{7x^2}{5}=5\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=\pm1\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}x=\pm\frac{5\sqrt{7}}{7}\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\}$$

$$(x,y)=(1,2) \text{ ή } (x,y)=(-1,-2) \text{ ή } (x,y)=\left(\frac{5\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{7}}{7}\right) \text{ ή } (x,y)=\left(-\frac{5\sqrt{7}}{7},-\frac{\sqrt{7}}{7}\right).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΟΒ (έστω (c_1)), τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΒΓ στο σημείο Ν. Έστω (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΚΝ και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΓΚ. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

Έστω R_1, R_2, R_3 οι ακτίνες των κύκλων (c_1), (c_2) και (c_3) αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι $R_1 = R_2 = R_3$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΚΟΒ έχουμε: $\hat{A}_1=\hat{B}_1$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΟΝΒ έχουμε: $\hat{A}_2=\hat{B}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ, έχουμε: $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΓ, έχουμε: $\hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1$.

Από τις παραπάνω ισότητες των γωνιών, προκύπτει $N\hat{A}\Gamma=K\hat{B}\Gamma=\hat{\Gamma}$, δηλαδή τα τρίγωνα ΝΑΓ και ΚΒΓ είναι ισοσκελή, οπότε $NA=N\Gamma$ και $KB=K\Gamma$.

Τα τρίγωνα τώρα ΟΚΒ και ΟΚΓ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $OB=O\Gamma$ (ακτίνες του κύκλου (c))

2. ΟΚ (κοινή)

3. $KB=K\Gamma$ (από το ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΓ).

Εφόσον λοιπόν τα τρίγωνα ΟΚΒ και ΟΚΓ είναι ίσα, θα έχουν ίσους τους περιγεγραμμένους κύκλους τους (c_1) και (c_3).

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων (c_1) και (c_2) (1ος τρόπος)

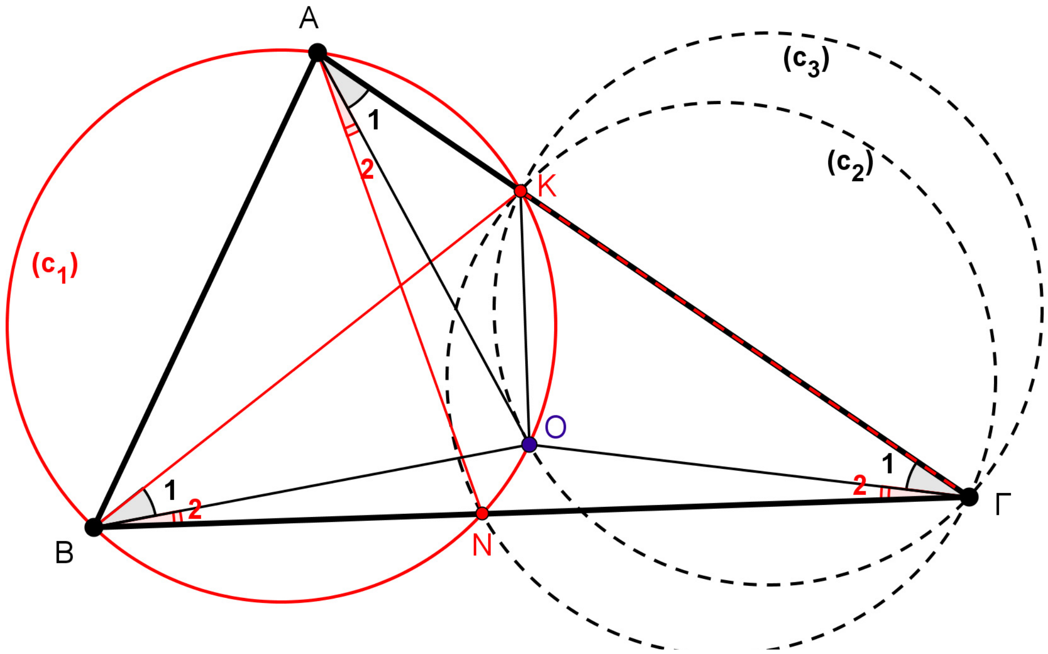
Θεωρούμε τώρα τα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ που έχουν περιγεγραμμένους κύκλους (c_1) και (c_2) αντίστοιχα.

Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια τον τύπο $E=(\text{ΑΒΓ})=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ που εκφράζει το εμβαδό τριγώνου συναρτήσει του μήκους των πλευρών και της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

Έστω λοιπόν $E_1=(\text{ΚΝΒ})$ το εμβαδό του τριγώνου ΚΝΒ και $E_2=(\text{ΚΝΓ})$ το εμβαδό του τριγώνου ΚΝΓ. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} E_1=(\text{ΚΝΒ})&=\frac{\text{ΝΒ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΒΚ}}{4R_1}\\ E_2=(\text{ΚΝΓ})&=\frac{\text{ΝΓ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΓΚ}}{4R_2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\text{E}_1}{\text{E}_2}=\frac{4R_2\cdot\text{ΝΒ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΒΚ}}{4R_1\cdot\text{ΝΓ}\cdot\text{ΝΚ}\cdot\text{ΓΚ}}\Rightarrow\frac{\text{E}_1}{\text{E}_2}=\frac{R_2\cdot\text{ΝΒ}}{R_1\cdot\text{ΝΓ}},\qquad(1)$$

(για τη τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $\text{ΚΒ}=\text{ΚΓ}$, που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΓ).



Σχήμα 5

Τα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ έχουν τις γωνίες τους $\text{Κ}\hat{\text{Ν}}\text{Β}$ και $\text{Κ}\hat{\text{Ν}}\text{Γ}$ παραπληρωματικές. Άρα:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\text{ΝΒ}\cdot\text{ΝΚ}}{\text{ΝΓ}\cdot\text{ΝΚ}}\Rightarrow\frac{\text{E}_1}{\text{E}_2}=\frac{\text{ΝΒ}}{\text{ΝΓ}}\ .\qquad(2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $R_1=R_2$.

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων (c_1) και (c_2) (2ος τρόπος)

Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{a}{\text{ημΑ}}=\frac{\beta}{\text{ημΒ}}=\frac{\gamma}{\text{ημΓ}}=2R.$$

Εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ έχουμε:

$$\frac{\text{ΚΝ}}{\text{ημ}(\text{Κ}\hat{\text{Β}}\text{Ν})}=2R_1\ \text{και}\ \frac{\text{ΚΝ}}{\text{ημ}(\hat{\Gamma})}=2R_2.$$

Από την ισότητα τώρα των γωνιών $\text{Κ}\hat{\text{Β}}\text{Ν}=\hat{\Gamma}$, καταλήγουμε: $R_1=R_2$.

Πρόβλημα 4

Η ακολουθία $a_n, n\in ¥^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1} = a_n - \frac{k}{2^n},\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ a_1 = 1,$$

όπου k θετικός ακέραιος.

(i) Να προσδιορίσετε το γενικό όρο a_n της ακολουθίας ως συνάρτηση των n και k.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι $k,\ n$ τέτοιοι ώστε : $a_n = \dfrac{1}{2^{1000}}$.

Λύση

(i) Από τις υποθέσεις έχουμε

$$a_2 = a_1 - \frac{k}{2},\ a_3 = a_2 - \frac{k}{2^2},\ \dots,\ a_n = a_{n-1} - \frac{k}{2^{n-1}},\ \ n = 1,2,3,\dots$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$a_n = a_1 - k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 - k\left(-1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$a_n = 1 + k - 2k\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = (1-k) + \frac{k}{2^{n-1}},\ n = 1,2,3,\dots$$

(ii) Έστω ότι:

$$a_n = \frac{1}{2^{1000}} \Leftrightarrow (1-k) + \frac{k}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{1000}} \Leftrightarrow (1-k)\cdot 2^{n-1+1000} + k \cdot 2^{1000} = 2^{n-1},$$

όπου k θετικός ακέραιος και $n \in \mathbb{N}^*,\ n > 1$. Τότε έχουμε

$$2^{n-1+1000} - 2^{n-1} = k\left(2^{n-1+1000} - 2^{1000}\right).$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2^{n-1+1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} > 0,\ k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

- Αν υποθέσουμε ότι $n - 1 > 1000 \Leftrightarrow n > 1001$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει, ότι $k \in (0,1)$, άτοπο.
- Αν υποθέσουμε ότι $n - 1 < 1000 \Leftrightarrow n < 1001$, τότε έχουμε:

$$k - 1 = \frac{2^{n-1+1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} - 1 = \frac{2^{1000} - 2^{n-1}}{2^{n-1+1000} - 2^{1000}} = \frac{1 - 2^{n-1001}}{2^{n-1} - 1},$$

οπότε θα είναι $0 < k - 1 < 1$, που είναι άτοπο.

Άρα είναι $n - 1 = 1000 \Leftrightarrow n = 1001$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $k = 1$.

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x)=(\alpha x^2+\beta x)(\gamma x^2+\delta)+4,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Έχουμε $P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=(x^2-1)(x^2-4)=x^4-5x^2+4$ και

$$Q(x)=(\alpha x^2+\beta x)(\gamma x^2+\delta)+4=\alpha\gamma x^4+\beta\gamma x^3+\alpha\delta x^2+\beta\delta x+4.$$

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα, αν, και μόνον αν, ισχύουν

$$\alpha\gamma=1,\ \beta\gamma=0,\ \alpha\delta=-5,\ \beta\delta=0$$

$$\Leftrightarrow \{\beta=0 \text{ ή } \gamma=0\},\ \{\beta=0 \text{ ή } \delta=0\}, \alpha\gamma=1, \alpha\delta=-5.$$

Οι τιμές $\gamma=0$ και $\delta=0$ αποκλείονται γιατί δεν επαληθεύουν τις δύο τελευταίες εξισώσεις, οπότε λαμβάνουμε $\beta=0,\ \gamma=\frac{1}{\alpha},\ \delta=-\frac{5}{\alpha},\ \alpha\neq 0.$ Από την εξίσωση $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$, με αντικατάσταση των τιμών των β,γ και δ προκύπτει η εξίσωση

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}-\frac{5}{\alpha}=-3\Leftrightarrow \alpha-\frac{4}{\alpha}=-3\Leftrightarrow \alpha^2+3\alpha-4=0\Leftrightarrow \alpha^2-1+3\alpha-3=0$$

$$(\alpha-1)(\alpha+1)+3(\alpha-1)=0\Leftrightarrow(\alpha-1)(\alpha+4)=0\Leftrightarrow \alpha-1=0 \text{ ή } \alpha+4=0\Leftrightarrow \alpha=1 \text{ ή } \alpha=-4$$

Επομένως οι τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι

$$\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \delta=-5 \text{ ή } \alpha=-4,\ \beta=0,\ \gamma=-\frac{1}{4},\ \delta=\frac{5}{4}.$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\leq\frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\leq\frac{|x|+x^2}{4}\Leftrightarrow 3x^2+4(|x|-1)\leq 3|x|+3x^2 \Leftrightarrow |x|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq x\leq 4.$$

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}\Leftrightarrow 2x+2+x(x+1)>(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+2+x^2+x>x^2+4x+4\Leftrightarrow -x>2\Leftrightarrow x<-2.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στο διάστημα $[-4,-2)=\{x\in\mathbb{R}:-4\leq x<-2\}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{\left[(1+ax)^2-(a+x)^2\right]}{1-a^2}=\frac{ab}{(a-b)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a,b με $ab(a-b)(1-a^2)\neq 0$.

Λύση

Για να ορίζονται οι δεδομένες παραστάσεις πρέπει να ισχύουν:

$$1-x^2\neq 0, 1-a^2\neq 0 \text{(υπόθεση) και } a\neq b \text{(υπόθεση)} \Leftrightarrow x\neq \pm 1.$$

Για $x\neq\pm1$, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\left(1+a^2x^2-a^2-x^2\right)}{\left(1-a^2\right)}=\frac{ab}{(a-b)^2}\Leftrightarrow\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\left(1-a^2\right)\left(1-x^2\right)}{\left(1-a^2\right)}=\frac{ab}{(a-b)^2}$$

$$\Leftrightarrow x(1+x)=\frac{ab}{(a-b)^2}\Leftrightarrow (a-b)^2x^2+(a-b)^2x-ab=0$$

Επειδή είναι $a\neq b$ η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=(a-b)^4+4ab(a-b)^2=(a-b)^2\left[(a-b)^2+4ab\right]=(a-b)^2(a+b)^2=\left(a^2-b^2\right)^2\geq 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει τις ρίζες (ίσες, αν $a=-b$):

$$x_1=\frac{-(a-b)^2+\left(a^2-b^2\right)}{2(a-b)^2}=\frac{2ab-2b^2}{2(a-b)^2}=\frac{2b(a-b)}{2(a-b)^2}=\frac{b}{a-b} \text{ και}$$

$$x_2=\frac{-(a-b)^2-\left(a^2-b^2\right)}{2(a-b)^2}=\frac{2ab-2a^2}{2(a-b)^2}=\frac{-2a(a-b)}{2(a-b)^2}=\frac{-a}{a-b}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{b}{b-a}=1\Leftrightarrow b=b-a\Leftrightarrow a=0 \text{ και } \frac{b}{b-a}=-1\Leftrightarrow b=-b+a\Leftrightarrow a=2b,$$

$$\frac{-a}{a-b}=1\Leftrightarrow -a=a-b\Leftrightarrow 2a=b \text{ και } \frac{-a}{a-b}=-1\Leftrightarrow -a=b-a\Leftrightarrow b=0.$$

Επομένως, για τιμές των παραμέτρων a,b που ικανοποιούν τις υποθέσεις $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$ και $a\neq\pm1$, έχουμε:

- Αν $(a-2b)(2a-b)\neq 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες (ίσες με $\frac{1}{2}$, αν $a=-b$):

$$x_1=\frac{b}{a-b} \text{ και } x_2=\frac{-a}{a-b}.$$

- Αν $a=2b$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2=-2$.
- Αν $a=\frac{b}{2}$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2=-2$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και $\hat{\mathrm{A}}<45^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΒΓ και ΑΓ, αντίστοιχα, και σημείο $\mathrm{M}\neq\mathrm{A}$ στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΒΜ τέμνει την ευθεία ΔΕ στο Ζ και την ευθεία ΑΓ στο Θ, να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{B\hat{M}Z}=\hat{\mathrm{A}}$.

(β) Η ευθεία ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

Λύση

(α) Επειδή το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ θα είναι ΖΒ = ΖΜ και

$$\mathrm{B\hat{M}Z} = \mathrm{M\hat{B}Z} = \omega .$$

Επειδή είναι $\Delta\mathrm{E} \parallel \mathrm{AB}$ και $\mathrm{AB} \perp \mathrm{B\Gamma}$ έπεται ότι $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{B\Gamma}$, δηλαδή η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Αφού $\mathrm{Z} \in \mathrm{B\Gamma}$ θα είναι $\mathrm{ZB} = \mathrm{Z\Gamma}$ και

$$\mathrm{Z\hat{B}\Gamma} = \mathrm{Z\hat{\Gamma}B} = \varphi .$$

Επειδή $\mathrm{MZ} = \mathrm{BZ} = \mathrm{\Gamma Z}$ θα είναι και

$$\mathrm{Z\hat{M}\Gamma} = \mathrm{Z\hat{\Gamma}M} = \theta .$$

Από το τρίγωνο $\mathrm{BM\Gamma}$, λόγω των προηγούμενων ισοτήτων, έχουμε

$$\mathrm{M\hat{B}\Gamma} + \mathrm{B\hat{\Gamma}M} + \mathrm{\Gamma\hat{M}B} = 180^\circ \Rightarrow 2\omega + 2\varphi + 2\theta = 180^\circ$$

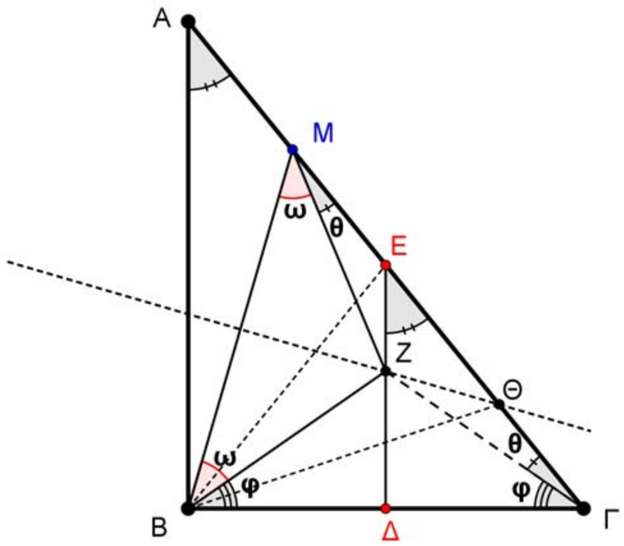
$$\omega + \varphi + \theta = 90^\circ . \qquad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ λαμβάνουμε

$$\varphi + \theta = \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\mathrm{B\hat{M}Z} = \omega = \hat{\mathrm{A}} .$$



Σχήμα 3

(β) Επειδή το σημείο Θ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ η ΘΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{\Theta}E}$. Επίσης, επειδή η ΒΕ είναι διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ προς την υποτείνουσα, θα είναι $\mathrm{BE} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2} = \mathrm{E\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $\mathrm{BE\Gamma}$ είναι ισοσκελές με την ΕΔ ύψος και διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{B\hat{E}\Gamma}$, άρα και της γωνίας $\mathrm{B\hat{E}\Theta}$. Επομένως στο τρίγωνο ΒΘΕ το Ζ είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του, οπότε και η ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{\Theta\hat{B}E}$.

Πρόβλημα 4

Αν υπάρχουν ακέραιοι x, y, a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2 + \left(y^2 - a^2\right)x + y\left(y - a\right)^2 = 0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έστω ότι οι ακέραιοι x, y, a επαληθεύουν την εξίσωση: $yx^2 + \left(y^2 - a^2\right)x + y\left(y - a\right)^2 = 0$.

Μετά τις πράξεις και αναδιάταξη των όρων η εξίσωση, ως προς άγνωστο το a, γράφεται:

$$(y-x)a^2-2y^2a+y\left(x^2+xy+y^2\right)=0.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση, η εξίσωση αυτή με άγνωστο το a έχει ακέραια λύση, αλλά και ακέραιους συντελεστές. Επομένως, η διακρίνουσα της είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, δηλαδή υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε

$$\Delta = 4y^4-4y(y-x)\left(x^2+xy+y^2\right)=4y\left[y^3-\left(y^3-x^3\right)\right]=4yx^3=xy(2x)^2=\kappa^2.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι: $xy=\left(\dfrac{\kappa}{2x}\right)^2$, όπου ο αριθμός $\dfrac{\kappa}{2x}$ είναι ρητός.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a \neq 0$ για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{2a+ax}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2a+6}{x^3-4x},$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες με διαφορά 4.

Λύση

Μετά τις παραγοντοποιήσεις των όρων των κλασμάτων η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{a(x+2)}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{2(a+3)}{x(x-2)(x+2)}. \qquad (1)$$

Πρέπει να ισχύουν $x \neq 0, \pm 2$, δηλαδή η εξίσωση θα λυθεί στο σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$.

Η εξίσωση (1) στο σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$ είναι ισοδύναμη τελικά με την εξίσωση

$$x^2+(a-2)x-\left(2a^2+4a\right)=0,$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=(3a+2)^2$ και ρίζες $x_1=a+2$ και $x_2=-2a$. Επειδή

$$a+2\in\{-2,0,2\} \Leftrightarrow a\in\{-4,-2,0\} \text{ και } -2a\in\{-2,0,2\} \Leftrightarrow a\in\{1,0,-1\}$$

και αφού από την υπόθεση είναι $a \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες δεκτές, τις $x_1=a-2$ και $x_2=-2a$, όταν είναι $a\neq -1, +1, -2, -4$.

Επειδή είναι

$$|a+2-(-2a)|=4 \Leftrightarrow |3a+2|=4 \Leftrightarrow 3a+2=4 \text{ ή } 3a+2=-4 \Leftrightarrow a=\frac{2}{3} \text{ ή } a=-2,$$

η τιμή του a που ζητάμε είναι η $a=\dfrac{2}{3}$.

Πρόβλημα 2

Αν y ακέραιος και $x\in\mathbb{R}$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (x,y) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c} 1+y-\left|x^2-3x+1\right|>0 \\ y-2+|x-2|<0 \end{array}\right\}. \qquad (\Sigma)$$

Να παραστήσετε γραφικά στο Καρτεσιανό επίπεδο Oxy, το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x,y)$, όπου (x,y) λύση του συστήματος (Σ).

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c} 1+y-\left|x^2-3x+1\right|>0 \\ y-2+|x-2|<0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1+y>\left|x^2-3x+1\right|\geq 0 \\ y-2<-|x-2|\leq 0 \end{array}\right\},$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$1+y>0 \text{ και } y-2<0 \Leftrightarrow -1<y<2.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές του y είναι $y=0$ ή $y=1$.

- Για $y=0$, το σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{c} \left|x^2-3x+1\right|<1 \\ |x-2|<2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -1<x^2-3x+1<1 \\ -2<x-2<2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2-3x+2>0 \text{ και } x^2-3x<0 \\ -2<x-2<2 \end{array}\right\}$$

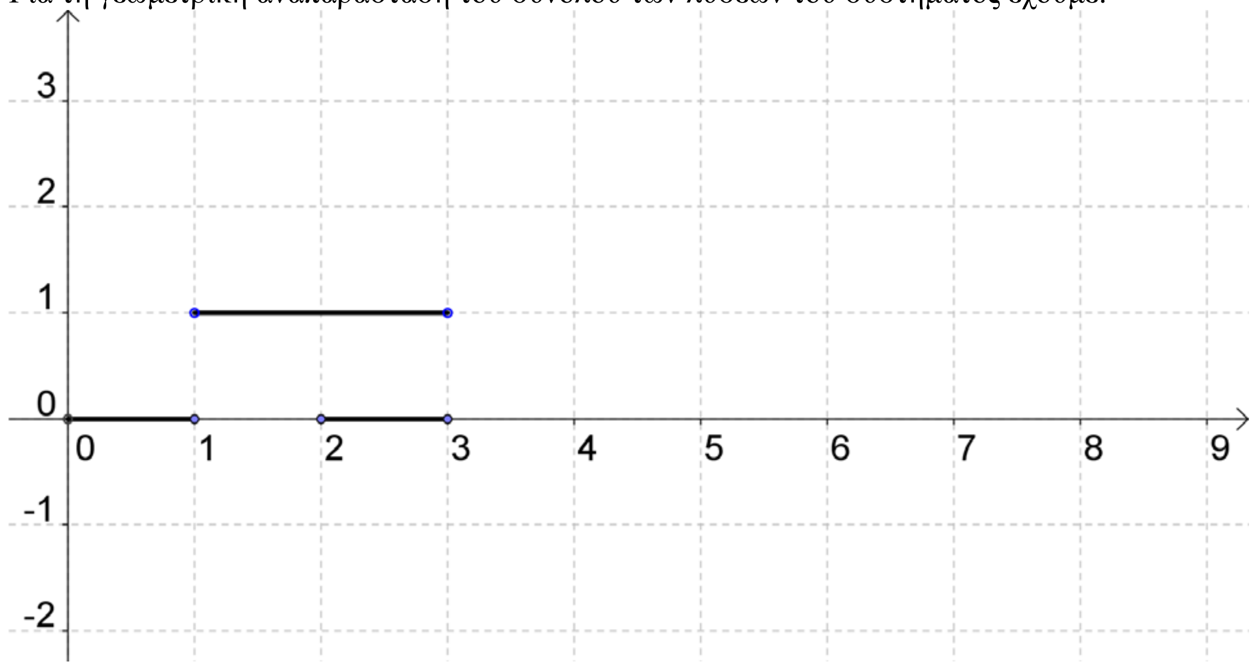
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (x<1 \text{ ή } x>2) \text{ και } \ 0<x<3 \\ 0<x<4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0<x<1 \text{ ή } \ 2<x<3.$$

- Για $y=1$, το σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{c} \left|x^2-3x+1\right|<2 \\ |x-2|<1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -2<x^2-3x+1<2 \\ -1<x-2<1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2-3x+3>0 \text{ και } x^2-3x-1<0 \\ 1<x<3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \\ 1<x<3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 1<x<3.$$

Για τη γεωμετρική αναπαράσταση του συνόλου των λύσεων του συστήματος έχουμε:



Σχήμα 4

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ<ΑΓ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο $Μ$. Ο κύκλος $c_1(Μ,ΑΜ)$ τέμνει την προέκταση της $ΑΓ$ στο σημείο $Δ$. Να αποδείξετε ότι $ΓΔ=ΑΒ$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

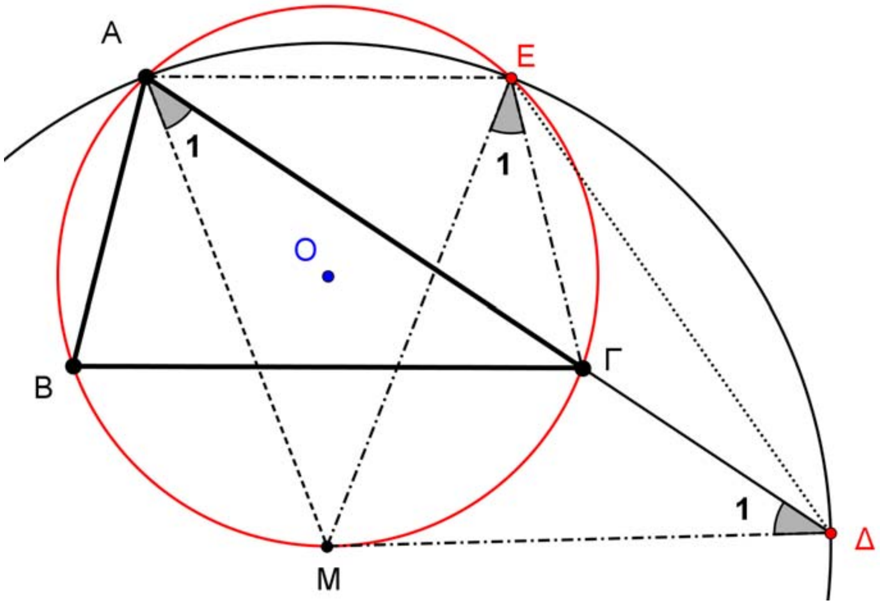
Έστω $Ε$ το δεύτερο κοινό σημείο των περιφερειών (c) και (c_1). Τότε η $ΑΕ$ είναι η κοινή χορδή των δύο κύκλων, άρα η $ΟΜ$ είναι μεσοκάθετη της $ΑΕ$.

Το $Μ$ είναι το μέσο του τόξου $ΒΓ$ (διότι η $ΑΜ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$). Άρα η $ΟΜ$ είναι μεσοκάθετη και της $ΒΓ$.

Επειδή οι χορδές $ΒΓ$ και $ΑΕ$ έχουν την $ΟΜ$ κοινή μεσοκάθετη, συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΕ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε:

$$ΑΒ = ΕΓ. \qquad (1)$$

Το τρίγωνο $ΜΑΔ$ είναι ισοσκελές, αφού $ΜΑ = ΜΔ$ ως ακτίνες του κύκλου (c_1). Άρα είναι $\hat{Α}_1 = \hat{Δ}_1 = \frac{\hat{Α}}{2}$. Ισχύει επίσης $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}_1 = \frac{\hat{Α}}{2}$ (εγγεγραμμένες στον κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{ΜΓ}$).



Σχήμα 5

Από τις τελευταίες ισότητες γωνιών συμπεραίνουμε ότι $\hat{Ε}_1 = \hat{Δ}_1 = \frac{\hat{Α}}{2}$ και σε συνδυασμό με την ισότητα $Μ\hat{Δ}Ε = Μ\hat{Ε}Δ$ (που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο $ΜΔΕ$), καταλήγουμε στην ισότητα των γωνιών $Γ\hat{Δ}Ε = Γ\hat{Ε}Δ$ και στην ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων:

$$ΕΓ = ΔΓ. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.

2ος Τρόπος

Το τρίγωνο $ΑΜΔ$ είναι ισοσκελές ($ΜΑ = ΜΔ$ ακτίνες του κύκλου (c_1)). Η $ΑΜ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$, οπότε έχουμε:

$$\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2 = \hat{Δ}_1 = \frac{\hat{Α}}{2}. \qquad (3)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΜΔ$, έχουμε:

$$\hat{Μ}_1 + \hat{\omega} = Α\hat{Μ}Δ = 180^o - \hat{Α}_1 - \hat{Δ}_1 = 180^o - \hat{Α}$$

$$\Rightarrow \hat{Μ}_1 + \hat{\omega} = 180^o - \hat{Α} \Leftrightarrow \hat{Μ}_1 = 180^o - \hat{Α} - \hat{\omega}. \qquad (4)$$

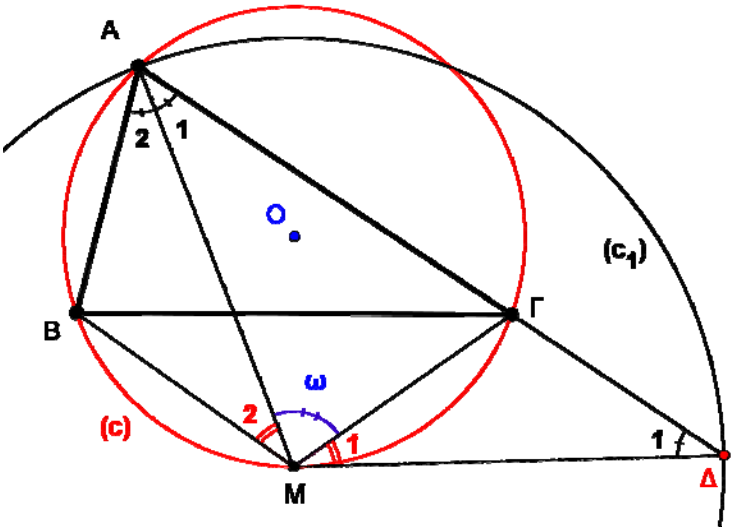
Επίσης, ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$\hat{Β} = \hat{\omega}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\hat{\mathrm{M}}_2 = \hat{\Gamma}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο).

Άρα έχουμε

$$\hat{\mathrm{M}}_1 = 180^o - \hat{\mathrm{A}} - \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{M}}_2 . \qquad (5)$$



Σχήμα 6

Από τις ισότητες: $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_2$, $\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma}$ (διότι το M είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$) και $\mathrm{MA} = \mathrm{M\Delta}$ (διότι $\mathrm{MA}, \mathrm{M\Delta}$ ακτίνες του κύκλου (c_1)), συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα MAB και $\mathrm{M\Delta\Gamma}$ (*) είναι ίσα, οπότε $\Gamma\Delta = \mathrm{AB}$.

(*) *Η ισότητα των τριγώνων, μπορεί να αποδειχθεί και με άλλους τρόπους.*

Παρατηρήσεις

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι τα σημεία M, Γ και το μέσο της $\Delta\mathrm{E}$ είναι συνευθειακά.

Ο κύκλος (c_1) τέμνει και τη προέκταση της AB. Αν ονομάσουμε Λ το σημείο τομής, τότε θα ισχύει $\mathrm{B\Lambda} = \mathrm{A\Gamma}$. Έτσι δημιουργείτε το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{A\Delta\Lambda}$ με $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A\Lambda} = \mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}$ και στη συνέχεια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\mathrm{AM} \perp \Delta\Lambda$.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{x^2+ax+b}$, όπου a,b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 4b$.

Λύση

Επειδή από υπόθεση $a^2 - 4b < 0$, έπεται ότι $x^2+ax+b > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί x, $\sqrt{x^2+ax+b} = y$ είναι και οι δύο ρητοί, τότε και η διαφορά τους $y - x = r$ θα είναι ρητός. Έτσι έχουμε

$$\sqrt{x^2+ax+b} - x = r \Leftrightarrow \sqrt{x^2+ax+b} = x + r \Rightarrow x^2+ax+b = x^2+2rx+r^2 \Rightarrow x = \frac{r^2-b}{a-2r},$$

εφόσον $r \neq \frac{a}{2}$ και $x + r \geq 0$ ή ισοδύναμα, εφόσον $r > \frac{a}{2}$.

Αντίστροφα, αν είναι $x = \frac{r^2-b}{a-2r}$, όπου r ρητός με $r > \frac{a}{2}$, τότε έχουμε

$$x^2+ax+b=\left(\frac{r^2-b}{a-2r}\right)^2+a\frac{r^2-b}{a-2r}+b=\frac{r^4-2ar^3+a^2r^2+2br^2-2abr+b^2}{(a-2r)^2}=\frac{\left(r^2-ar+b\right)^2}{(a-2r)^2},$$

οπότε, αφού από υπόθεση $a^2-4b<0$, θα είναι

$$y=\sqrt{x^2+ax+b}=\frac{r^2-ar+b}{|a-2r|}=\frac{r^2-ar+b}{2r-a},\ r>\frac{a}{2},$$

δηλαδή ο y είναι ρητός.

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος α_ν, $\nu=1,2,3,...$ που έχει πρώτο όρο $\alpha_1=\alpha\neq 0$, διαφορά $\omega\neq 0$ και είναι τέτοια ώστε ο λόγος του αθροίσματος $\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της προς το άθροισμα $\alpha_{\nu+1}+\cdots+\alpha_{3\nu}$ των επόμενων 2ν το πλήθος όρων της είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος του ν.

Λύση

Από την υπόθεση δίνεται ότι:

$$\frac{\Sigma_\nu}{\Sigma_{3\nu}-\Sigma_\nu}=\frac{\alpha_1+\cdots\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}+\cdots\alpha_{3\nu}}=c\,(\text{ανεξάρτητο του }\nu). \qquad (1)$$

Επειδή είναι

$$\Sigma_\nu=\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu=\frac{\left[2\alpha+(\nu-1)\omega\right]\cdot\nu}{2} \text{ και}$$

$$\Sigma_{3\nu}-\Sigma_\nu=\frac{\left[2\alpha+(3\nu-1)\omega\right]\cdot 3\nu}{2}-\frac{\left[2\alpha+(\nu-1)\omega\right]\cdot\nu}{2}=\frac{\left[4\alpha+(8\nu-2)\omega\right]\cdot\nu}{2},$$

η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{4\alpha+(8\nu-2)\omega}=c\Leftrightarrow(8c\omega-\omega)\nu+4\alpha c-2\alpha-2c\omega+\omega=0$$

$$\Leftrightarrow(8c-1)\omega\nu+(2c-1)(2\alpha-\omega)=0,\text{για κάθε }\nu=1,2,3,...$$

$$\Leftrightarrow(8c-1)\omega=0\text{ και }(2c-1)(2\alpha-\omega)=0$$

$$\Leftrightarrow 8c-1=0\ \text{ και }\ 2c-1\text{ ή }2\alpha-\omega=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{8},\omega=2\alpha,$$

αφού $\omega\neq 0$. Επομένως η αριθμητική πρόοδος που ζητάμε είναι η: $\alpha,3\alpha,5\alpha,....,(2\nu-1)\alpha,....$

Διαφορετικά, στην ισότητα $(8c-1)\omega\nu+(2c-1)(2\alpha-\omega)=0$, που ισχύει για κάθε $\nu=1,2,3,...$ μπορούμε να θεωρήσουμε $\nu=1$ και $\nu=2$ και να αφαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες που προκύπτουν, οπότε λαμβάνουμε $(8c-1)\omega=0$ και από αυτή $(2c-1)(2\alpha-\omega)=0$, οπότε έχουμε πάλι το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix}(8c-1)\omega=0\\(2c-1)(2a-\omega)=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}c=\dfrac{1}{8}\\\omega=2\alpha\end{matrix}\right\},\text{ αφού }\omega\neq 0.$$

Επομένως η αριθμητική πρόοδος που ζητάμε είναι η: $\alpha,3\alpha,5\alpha,....,(2\nu-1)\alpha,....$

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4}, \quad y^2 = \frac{8x^4}{16+x^4}, \quad z^2 = \frac{8y^4}{16+y^4}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4} = z^2 \cdot \frac{8z^2}{4^2+\left(z^2\right)^2} \leq z^2, \text{αφού ισχύει}: \frac{8z^2}{4^2+\left(z^2\right)^2} \leq 1,$$

και ομοίως λαμβάνουμε ότι: $z^2 \leq y^2$ και $y^2 \leq x^2$. Επομένως, έχουμε: $x^2 = y^2 = z^2$.

Τότε από την πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$x^2 = \frac{8x^4}{16+x^4} \Leftrightarrow x^2\left(x^4 - 8x^2 + 16\right) = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-4\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = 2 \text{ (όλες με πολλαπλότητα 2).}$$

- Για $x = 0$, προκύπτει η λύση $(0,0,0)$.
- Για $x = 2$, προκύπτουν οι λύσεις: $(2,2,2)$, $(2,-2,2)$,$(2,2,-2)$ και $(2,-2,-2)$.
- Για $x = -2$, προκύπτουν οι λύσεις: $(-2,2,2)$, $(-2,-2,2)$,$(-2,2,-2)$ και $(-2,-2,-2)$.

Πρόβλημα 3

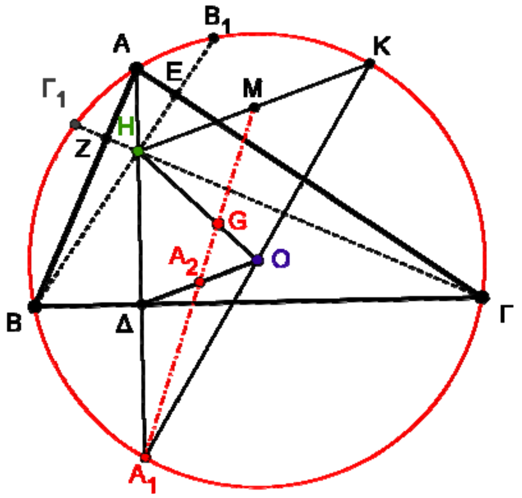
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2, \Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

(1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι το σημείο A_1 είναι συμμετρικό του ορθοκέντρου Η ως προς την πλευρά ΒΓ. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το σημείο H_1 συμμετρικό του Η ως προς την πλευρά ΒΓ, τότε έχουμε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}_1\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\Gamma = 180^\circ - \hat{\mathrm{A}}$. Άρα το τετράπλευρο $\mathrm{ABH}_1\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το σημείο H_1 συμπίπτει με το σημείο A_1.

Έστω Κ το αντιδιαμετρικό του σημείου A_1 και Μ το σημείο τομής της $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ με την ΗΚ. Τότε στο τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{HK}$ έχουμε ότι το σημείο Ο είναι μέσο της πλευράς $\mathrm{A}_1\mathrm{K}$ και ότι το σημείο Δ είναι μέσο της πλευράς $\mathrm{A}_1\mathrm{H}$.**(*)** Άρα το τμήμα ΟΔ είναι ίσο και παράλληλο με το τμήμα $\frac{\mathrm{HK}}{2}$.

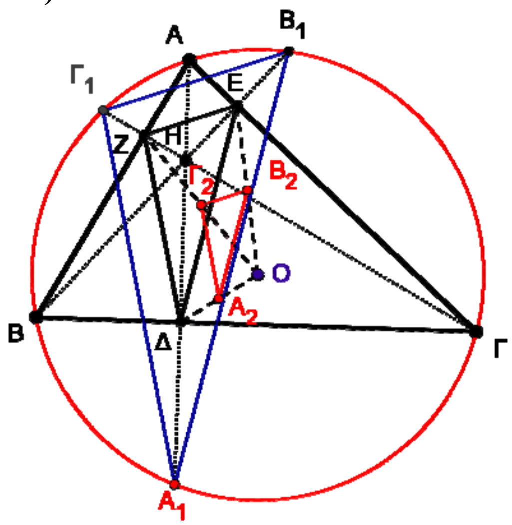


Σχήμα 7

Επειδή τώρα $O\Delta = \frac{HK}{2}$ και η A_1A_2 είναι διάμεσος στο τρίγωνο $A_1O\Delta$, συμπεραίνουμε ότι η A_1M είναι διάμεσος του τριγώνου A_1HK. Έστω ότι οι διάμεσες A_1M και HO (του τριγώνου A_1HK) τέμνονται στο σημείο G. Τότε θα ισχύει $GH = 2GO$, δηλαδή το σημείο G χωρίζει το τμήμα HO σε δύο τμήματα με λόγο $2:1$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$ διέρχονται από το σημείο G.

2ος τρόπος (με ομοιοθεσία)



Σχήμα 8

Χρησιμοποιώντας τη πρόταση: "Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου, ως προς τις πλευρές του, βρίσκονται στο περιγεγραμμένο κύκλο του", που αποδείξαμε στην αρχή της προηγούμενης λύσης, συμπεραίνουμε ότι το Δ είναι μέσο του A_1H, το E είναι μέσο του B_1H και το Δ είναι μέσο του Γ_1H.

Άρα το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι ομοιόθετο του (ορθικού) τριγώνου ΔEZ στην ομοιοθεσία με κέντρο το ορθόκεντρο H και λόγο 2, ($HA_1 = 2H\Delta$).

Το A_2 είναι μέσο του $O\Delta$, το B_2 είναι μέσο του OE και το Γ_2 είναι μέσο του OZ.

Άρα το ορθικό τρίγωνο ΔEZ, είναι ομοιόθετο του τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το O και λόγο 2, ($O\Delta = 2OA_2$)., δηλαδή το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ είναι ομοιόθετο του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$.

Άρα οι ευθείες $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ (που συνδέουν τις ομόλογες κορυφές) θα συντρέχουν στο κέντρο της ομοιοθεσίας (έστω K) το οποίο θα βρίσκεται επάνω στην OH.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{4x^2 - ax + b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 16b$.

Λύση

Επειδή από υπόθεση $a^2 - 16b < 0$, έπεται ότι $4x^2 - ax + b > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί x, $\sqrt{4x^2 - ax + b} = y$ είναι και οι δύο ρητοί, τότε και η διαφορά $y - 2x = r$ θα είναι ρητός. Έτσι έχουμε

$$\sqrt{4x^2 - ax + b} - 2x = r \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - ax + b} = 2x + r \Rightarrow 4x^2 - ax + b = 4x^2 + 4rx + r^2 \Rightarrow x = \frac{b - r^2}{a + 4r},$$

εφόσον $r \neq -\frac{a}{4}$ και $2x + r \geq 0$, ή ισοδύναμα εφόσον $r > -\frac{a}{4}$.

Αντίστροφα, αν είναι $x = \frac{b - r^2}{a + 4r}$, όπου r ρητός με $r > -\frac{a}{4}$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} 4x^2 - ax + b &= 4\left(\frac{b - r^2}{a + 4r}\right)^2 - \frac{a\left(b - r^2\right)}{a + 4r} + b \\ &= \frac{4r^4 + a^2r^2 + 4b^2 + 8br^2 + 4abr + 4ar^3}{\left(a + 4r\right)^2} = \frac{\left(2r^2 + ar + 2b\right)^2}{\left(a + 4r\right)^2}, \end{aligned}$$

οπότε, αφού από υπόθεση $a^2 - 16b < 0$, θα είναι

$$y = \sqrt{4x^2 - ax + b} = \frac{2r^2 + ar + 2b}{|a + 4r|} = \frac{2r^2 + ar + 2b}{4r + a}, \quad r > -\frac{a}{4},$$

δηλαδή ο y είναι ρητός.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\leq\frac{|x|+3+x^2}{4},\quad x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0 .$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\leq\frac{|x|+3+x^2}{4}\Leftrightarrow (x-1)^2+2\left(|x|+x\right)\leq|x|+3+x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+2|x|+2x\leq|x|+3+x^2\Leftrightarrow|x|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq x\leq 2.$$

Επομένως η ανίσωση του συστήματος αληθεύει για $x\in[-2,2]$.

Επιπλέον, έχουμε

$$x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\Leftrightarrow x=0\ \text{ ή }\ x^2+4=0\ \text{ ή }\ x^2-5x+4=0.$$

Η εξίσωση $x^2+4=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, αφού $x^2+4>0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ η εξίσωση $x^2-5x+4=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=9>0$ και ρίζες $x=1$ ή $x=4$.

Επομένως η εξίσωση του συστήματος έχει τις ρίζες $x=0$ ή $x=1$ ή $x=4$

Επειδή $4\notin[-2,2]$, το σύστημα αληθεύει για $x=0$ ή $x=1$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}\quad\text{και}\quad\mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5},$$

αν $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, και να λύσετε την εξίσωση

$$\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y).$$

Λύση

Λόγω των υποθέσεων $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, δεν μηδενίζονται οι παρανομαστές των δύο παραστάσεων, οπότε αυτές ορίζονται. Με πράξεις στον παρανομαστή και στον αριθμητή της παράστασης $\mathrm{A}(x,y)$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^6-y^6\right)}{x^6-y^6}=x^2+y^2.$$

Η απλοποίηση μπορεί επίσης να γίνει με χρήση της παραγοντοποίησης

$$x^6-y^6=\left(x^2\right)^3-\left(y^2\right)^3=\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)$$

ή των παραγοντοποιήσεων

$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right),\qquad x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$$
$$x^4+y^4+x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right).$$

Έχουμε επίσης

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5}=\frac{(2x+4y)^2-5^2}{2x+4y+5}$$
$$=\frac{(2x+4y+5)(2x+4y-5)}{2x+4y+5}=2x+4y-5.$$

Επομένως η εξίσωση $\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y)$ γίνεται:

$$x^2+y^2=2x+4y-5 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=0$$

$\Leftrightarrow x-1=0$ και $y-2=0$ (διαφορετικά θα είχαμε $(x-1)^2+(y-2)^2>0$)

$\Leftrightarrow x=1,\ y=2.$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε των πλευρών του ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΕ. Οι κύκλοι c_1(Β, ΒΕ) και c_2(Γ, ΓΔ) τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ και Γ_1, Γ_2, αντίστοιχα. Το σημείο B_1 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Β και το σημείο Γ_2 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Γ.

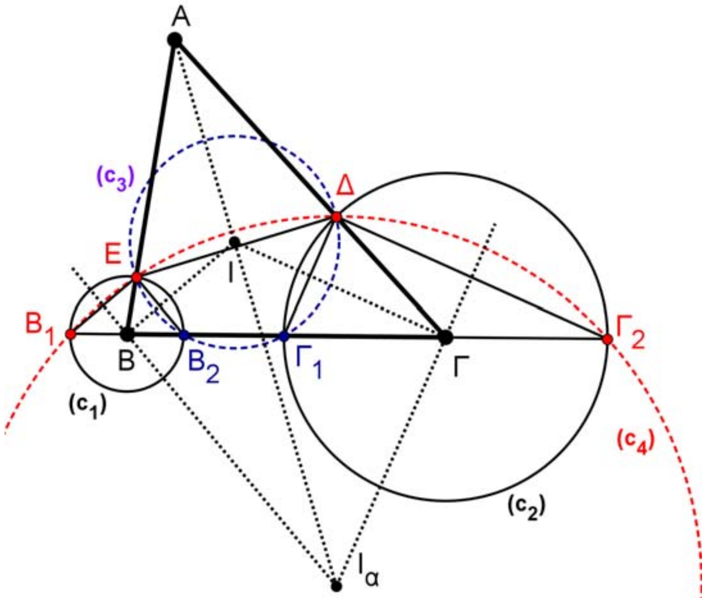
Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_2, \Gamma_1, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_3.

(β) Τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_1, \Gamma_2, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_4.

(γ) Το σημείο Α και τα κέντρα των κύκλων c_3 και c_4, βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο BEB_2 είναι ισοσκελές (οι πλευρές ΒΕ και BB_2 είναι ακτίνες του κύκλου c_1), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς EB_2 είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο Ι του τριγώνου ΑΒΓ. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{IE}=\mathrm{IB}_2 \qquad (1).$$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta\Gamma_1$ είναι ισοσκελές (οι πλευρές $\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Gamma_1$ είναι ακτίνες του κύκλου c_2), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς $\Delta\Gamma_1$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{I}\Gamma_1 \qquad (2).$$

Το τρίγωνο $\mathrm{AE}\Delta$ είναι ισοσκελές (διότι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$), άρα η μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{E}\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} \qquad (3).$$

Επομένως, οι μεσοκάθετες των τμημάτων $\mathrm{B}_2\mathrm{E}$, $\mathrm{E}\Delta$, $\Delta\Gamma_1$ περνάνε από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, οπότε (σε συνδυασμό με τις ισότητες (1), (2), (3)) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} = \mathrm{IB}_2 = \mathrm{I}\Gamma_1 := r,$$

δηλαδή τα σημεία E, B_2, Γ_1, Δ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_3 με κέντρο το I και ακτίνα r.

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_1, \Gamma_2, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_4 με κέντρο το παράκεντρο I_α του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ και ακτίνα $r_\alpha := \mathrm{I}_\alpha\Delta = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{E} = \mathrm{I}_\alpha\Gamma_2 = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{B}_1$.

(γ) Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων (c_3 και c_4) βρίσκονται επάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, οπότε θα είναι συνευθειακά με τη κορυφή A.

Πρόβλημα 4

Δίνεται η εξίσωση

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + \sqrt{x-2} + 3 - 2\sqrt{2} = 0,$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ άγνωστος και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a.

Λύση

Για να ορίζεται η $\sqrt{x-2}$ πρέπει να είναι $x \geq 2$.

Η εξίσωση γράφεται στην ισοδύναμη μορφή

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + 3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (1)$$

Για $a = 0$ έχουμε την εξίσωση

$$3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2, \text{ (αδύνατη, αφού } 3-2\sqrt{2} > 0\text{).}$$

Για $a \neq 0$, το πρώτο μέλος της (1) είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (2)$$

Επειδή είναι $\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 \geq 0$ και $-\sqrt{x-2} \leq 0,\ x \geq 2,$ έπεται ότι η εξίσωση (2) έχει λύση, αν, και μόνον αν, $ax + \sqrt{2} - 1 = 0$ και $x - 2 = 0,\ x \geq 2 \Leftrightarrow x = 2,$ εφόσον $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως, η δεδομένη εξίσωση έχει μόνο για $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ τη λύση $x = 2.$

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq 5 .$$

Να βρείτε τα ζεύγη (x, y) ακέραιων αριθμών με $x<0$ για τα οποία ισχύει ή ισότητα

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| = 5 .$$

Λύση

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|a| \geq a, \quad (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \geq 0) \text{ και}$$

$$|a| \geq -a, \; (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \leq 0).$$

Άρα έχουμε

$$|x+y-1| \geq -(x+y-1), \quad |x+2| \geq x+2 \quad \text{και} \quad |y+2| \geq y+2,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq -(x+y-1)+x+2+y+2=5 .$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, και οι τρεις σχέσεις αληθεύουν ως ισότητες, δηλαδή, αν, και μόνον αν,

$$x+y-1 \leq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \geq 0 \quad \text{και} \quad y+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+y \leq 1 \quad \text{και} \quad x \geq -2 \quad \text{και} \quad y \geq -2 .$$

Επειδή ζητάμε όλα τα ζεύγη των ακέραιων αριθμών (x, y) με $x<0$, για τα οποία ισχύει η ισότητα, έχουμε $x \in\{-2,-1\}$, $y \in\{-2,-1,0,1,2, \ldots .\}$, οπότε για να ισχύει η συνθήκη $x+y \leq 1$, πρέπει και αρκεί:

$$(x, y) \in\{(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-1,-2),(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,2)\}.$$

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right)<4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right),$$

να αποδείξετε ότι: $|2y-3|<1$.

Λύση

Έχουμε ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right)<4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right)$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right)<0$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y(y-1)(y-2)x-4y(y-1)\left(2y-y^2\right)<0$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y\left(y^2-3y+2\right)x+4y^2\left(y^2-3y+2\right)<0$$

$$\Rightarrow\left(y^2-3y+2\right)\left(x^2-4xy+4y^2\right) \leq 0 \Leftrightarrow\left(y^2-3y+2\right)(x-2y)^2<0$$

$$\Rightarrow y^2-3y+2<0, \text{ αφού ισχύει} (x-2y)^2 \geq 0,$$

$$\Rightarrow(y-1)(y-2)<0 \Rightarrow 1<y<2.$$

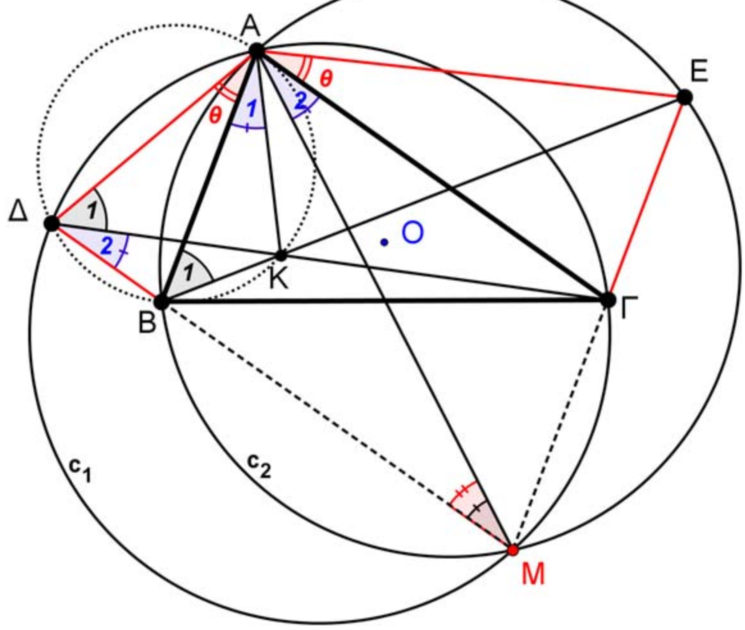
Από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

$$1<y<2 \Rightarrow 1-\frac{3}{2}<y-\frac{3}{2}<2-\frac{3}{2} \Rightarrow-\frac{1}{2}<\frac{2y-3}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow-1<2y-3<1 \Rightarrow|2y-3|<1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $ΑΒΔ$ ($ΑΒ = ΑΔ$) και $ΑΓΕ$ ($ΑΓ = ΑΕ$) με $Β\hat{Α}Δ = Γ\hat{Α}Ε = \hat{\theta} < 90^\circ$. Οι $ΒΕ$ και $ΓΔ$ τέμνονται στο σημείο $Κ$. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$ τέμνονται στο σημείο $Μ$. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Α}Κ = Γ\hat{Α}Μ$.

Λύση



Σχήμα 4

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$:

1. $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές).

2. $ΑΓ = ΑΕ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές).

3. $Δ\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Ε = \hat{Α} + \hat{\theta}$

Άρα τα τρίγωνα $ΑΔΓ$, $ΑΒΕ$ είναι ίσα και κατά συνέπεια θα είναι ίσοι και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι τους c_1 και c_2.

Η γωνία $Α\hat{Μ}Δ$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΑΔ$. Η γωνία $Α\hat{Μ}Β$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_2 και βαίνει στο τόξο $ΑΒ$. Επειδή όμως $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές) και οι κύκλοι c_1, c_2 είναι ίσοι, συμπεραίνουμε ότι: $Α\hat{Μ}Δ = Α\hat{Μ}Β$. Άρα τα σημεία $Δ, Β, Μ$ είναι συνευθειακά.

Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$.

Άρα το τετράπλευρο $ΑΚΒΔ$ είναι εγγράψιμο, επομένως : (1)

$$\hat{Α}_1 = \hat{Δ}_2.$$

Η γωνία $\hat{Δ}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Η γωνία $\hat{Α}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Άρα έχουμε:

$$\hat{Α}_2 = \hat{Δ}_2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε: $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι ακέραιος ο αριθμός
$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x}.$$

Λύση
Ο αριθμός Α ορίζεται όταν $13-2x \geq 0$ και $13+2x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{13}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}$.
Αν υποθέσουμε ότι $\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z}$, τότε θα είναι $\mathrm{A} = n > 0$ και ισχύει:
$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathrm{A}^2 == 26 + 2\sqrt{13^2 - 4x^2} = n^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{13^2 - 4x^2} = \frac{n^2}{2} - 13 \qquad (1)$$
Επειδή $0 \leq \sqrt{13^2 - 4x^2} \leq 13$, λόγω της (1) και της υπόθεσης ότι $n \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι:
$$0 \leq \frac{n^2}{2} - 13 \leq 13 \Leftrightarrow 13 \leq \frac{n^2}{2} \leq 13 + 13 \Leftrightarrow 26 \leq n^2 \leq 52 \Leftrightarrow n \in \{6, 7\}.$$

- Για $n = 6$ η εξίσωση (1) γίνεται
$$\sqrt{13^2 - 4x^2} = 5 \Leftrightarrow 169 - 4x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$
- Για $n = 7$ η εξίσωση (1) γίνεται
$$\sqrt{13^2 - 4x^2} = \frac{23}{2} \Leftrightarrow 169 - 4x^2 = \frac{23^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{147}{16} \Leftrightarrow x = \pm \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Στο σύνολο των ακεραίων, να λυθεί το σύστημα:
$$xy = z^2 + 2, \quad y^3 = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Λύση
Επειδή είναι $2x^2 + 1 > 0$, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι
$$y^3 > x^3 \Rightarrow (y - x)(y^2 + xy + x^2) > 0 \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y > x,$$
αφού $y^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$ (η περίπτωση $x = y = 0$ δεν επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος).
Επειδή οι x, y είναι ακέραιοι, από τη σχέση $y > x$, έπεται ότι
$$y \geq x + 1 \Leftrightarrow y^3 \geq (x+1)^3 \Leftrightarrow y^3 \geq x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \qquad (1)$$
Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος και την (1) λαμβάνουμε
$$x^3 + 2x^2 + 1 \geq x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -2, -1, 0\}. \qquad (2)$$

- Για $x = -3$, λαμβάνουμε $y^3 = -8 \Leftrightarrow y = -2$.
- Για $x = -2$, λαμβάνουμε $y^3 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (απορρίπτεται, αφού $xy = z^2 + 2 > 0$).
- Για $x = -1$, λαμβάνουμε $y^3 = 2$ (αδύνατη στο $\mathbb{Z}$).
- Η τιμή $x = 0$, απορρίπτεται, αφού πρέπει $xy = z^2 + 2 > 0$.

Άρα η μοναδική αποδεκτή περίπτωση είναι $x = -3,\ y = -2$, οπότε προκύπτει $z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm 2$, οπότε έχουμε τις λύσεις
$$(x, y, z) = (-3, -2, 2) \text{ ή } (x, y, z) = (-3, -2, -2).$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f\left(x^2\right)-y^2=f\left(x+y\right)\cdot f\left(x-y\right),\ \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη δεδομένη σχέση για ειδικές τιμές των μεταβλητών.

Για $x=y=0$ λαμβάνουμε $f\left(0\right)=f\left(0\right)^2\Leftrightarrow f\left(0\right)=0$ ή $f\left(0\right)=1$.

Για $x=y=2$ λαμβάνουμε $f\left(4\right)-4=f\left(4\right)f\left(0\right)$, οπότε, αν $f\left(0\right)=1$, τότε $-4=0$ (άτοπο), ενώ, αν $f\left(0\right)=0$, τότε $f\left(4\right)=4$. Άρα έχουμε $f\left(0\right)=0$ και $f\left(4\right)=4$.

Για $x=y=t\in\mathbb{R}$ έχουμε $f\left(t^2\right)-t^2=f\left(2t\right)f\left(0\right)=0\Rightarrow f\left(t^2\right)=t^2$, $t\in\mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $x\geq 0$, υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $t^2=x$, έπεται ότι $f\left(x\right)=x$, για κάθε $x\geq 0$.

Για $x=0$, $y>0$, λαμβάνουμε $f\left(0\right)-y^2=f\left(y\right)f\left(-y\right)\Rightarrow yf\left(-y\right)=-y^2\Rightarrow f\left(-y\right)=-y$, για κάθε $y>0$, δηλαδή $f\left(x\right)=x$, για κάθε $x<0$.

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι $f\left(x\right)=x,\ x\in\mathbb{R},$ η οποία εύκολα επαληθεύουμε ότι ικανοποιεί τη δεδομένη σχέση.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x},$$

όπου $a>1$ πραγματική παράμετρος, παίρνει ακέραιες τιμές.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε ο αριθμός $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$ να είναι ακέραιος περισσότερες ή ίσες από K φορές, όπου K τυχόν θετικός ακέραιος.

Λύση

Η συνάρτηση $f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}, a>1,$ ορίζεται για $x\in\left[-a,a\right]$ και παίρνει τιμές θετικές. Αν υποθέσουμε ότι $f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=n\in\mathbb{Z},$ τότε θα έχουμε

$$f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2a+2\sqrt{a^2-x^2}=n^2\Leftrightarrow\sqrt{a^2-x^2}=\frac{n^2}{2}-a \qquad (1)$$

Επειδή $0\leq\sqrt{a^2-x^2}\leq a$, έχουμε $0\leq\frac{n^2}{2}-a\leq a\Leftrightarrow 2a\leq n^2\leq 4a\Leftrightarrow\sqrt{2a}\leq n\leq 2\sqrt{a}$.

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι για κάθε ακέραιο n του διαστήματος $\left[\sqrt{2a},2\sqrt{a}\right]$ η εξίσωση (1) έχει λύση ως προς x. Πράγματι, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$a^2-x^2=\left(\frac{n^2}{2}-a\right)^2,\ x\in\left[-a,a\right]\Leftrightarrow x^2=a^2-\left(\frac{n^2}{2}-a\right)^2,\ x\in\left[-a,a\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{n^2}{2}\left(2a-\frac{n^2}{2}\right),\ x\in\left[-a,a\right]\Leftrightarrow x^2=\frac{n^2\left(4a-n^2\right)}{4},\ x\in\left[-a,a\right]$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{n\sqrt{4a-n^2}}{2}.$$

Οι τιμές του x που βρήκαμε ανήκουν στο διάστημα $[-a,\, a]$, οπότε είναι αποδεκτές, λόγω της σχέσης $x^2 = a^2 - \left(\dfrac{n^2}{2} - a\right)^2 \le a^2$.

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή n του διαστήματος $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$, για $x = \pm\dfrac{n\sqrt{4a-n^2}}{2}$.

Επομένως, μπορούμε να βρούμε όσες θέλουμε δυνατές ακέραιες τιμές για το $n=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$, εφόσον επιτύχουμε να κάνουμε το μήκος του διαστήματος $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$ οσοδήποτε μεγάλο θέλουμε, δίνοντας κατάλληλη τιμή στην παράμετρο a. Για παράδειγμα, για να περιέχει το διάστημα $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$ K ή περισσότερους ακέραιους, αρκεί να ισχύει ότι

$$\left|2\sqrt{a}-\sqrt{2a}\right| \ge K \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{a} \ge K \Leftrightarrow a \ge \left(\frac{K}{2-\sqrt{2}}\right)^2.$$

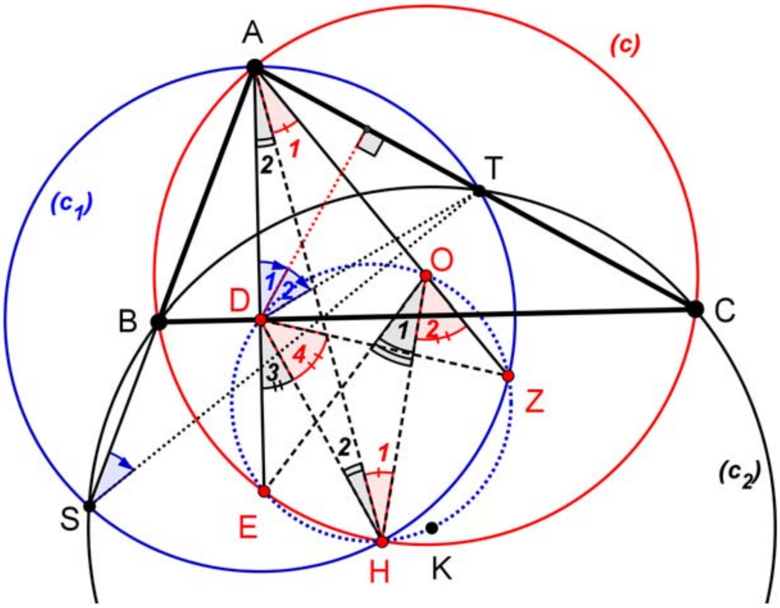
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ABC ($AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η προέκταση του ύψους του AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E. Ο κύκλος $c_1(D,DA)$ τέμνει την πλευρά AC στο σημείο T, την ευθεία AB στο σημείο S, τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο H και την ευθεία OA στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, έστω c_2.

(β) Τα σημεία O, D, E, Z, H και το κέντρο του κύκλου c_2, βρίσκονται επάνω στο ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 5

(α) Η γωνία $A\hat{S}T = \hat{S}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο AT. Η γωνία $A\hat{D}T$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της γωνίας $\hat{S}$, οπότε $A\hat{D}T = 2\hat{S}$.

Η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{D}T$ είναι κάθετος στην πλευρά AC, οπότε

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{C} = 90^o - D\hat{A}C .$$

Άρα $\hat{S} = \hat{C}$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο.

(β) Η γωνία $E\hat{D}H = \hat{D}_3$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου DAH ($DA = DH$ και $\hat{A}_2 = \hat{H}_2$). Άρα έχουμε

$$\hat{D}_3 = 2\hat{A}_2 . \quad (1)$$

Η γωνία $E\hat{A}H = \hat{A}_2$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο c και η γωνία $E\hat{O}H = \hat{O}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη, οπότε:

$$\hat{O}_1 = 2\hat{A}_2 . \quad (2)$$

Από τις ισότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{D}_3$, οπότε τα σημεία O,D,E,H είναι ομοκυκλικά (ανήκουν στον ίδιο κύκλο).

Η γωνία $H\hat{O}Z = \hat{O}_2$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου OAH ($OA = OH$ και $\hat{A}_2 = \hat{H}_2$). Άρα έχουμε:

$$\hat{O}_2 = 2\hat{A}_1 . \quad (3)$$

Η γωνία $Z\hat{A}H = \hat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο c_1 και η γωνία $H\hat{D}Z = \hat{D}_4$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη, οπότε:

$$\hat{D}_4 = 2\hat{A}_1 . \quad (4)$$

Από τις ισότητες (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $\hat{O}_2 = \hat{D}_4$, οπότε τα σημεία O,D,Z,H είναι ομοκυκλικά (ανήκουν στον ίδιο κύκλο).

Η μεσοκάθετη του τμήματος ST περνάει από το κέντρο D του κύκλου c_1. Η μεσοκάθετη του τμήματος BC περνάει από το κέντρο O του κύκλου c. Το σημείο τομής K των δύο μεσοκαθέτων, είναι το κέντρο του κύκλου c_2.

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο K ανήκει στο κύκλο που ορίζουν τα σημεία O,D,Z,E,H, δηλαδή ότι: $D\hat{K}O = D\hat{H}O$.

Πράγματι, η γωνία $D\hat{K}O$ ισούται με τη γωνία που σχηματίζουν οι ST και BC (διότι έχουν τις πλευρές κάθετες), δηλαδή είναι:

$$D\hat{K}O = 180^o - \hat{S} - \hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} - \hat{C} ,$$

ενώ ακόμη ισχύει ότι:

$$D\hat{H}O = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = E\hat{A}O = 90^o - \frac{A\hat{O}E}{2} = 90^o - A\hat{C}E = 90^o - (\hat{C} + 90^o - \hat{B}) = \hat{B} - \hat{C}.$$

.