ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.
Αν ισχύει ότι $4x-5y=10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^2.$$

Λύση
Η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^2\\&=4x+5y-36x+35y+\left(2-2\right)^2\\&=-32x+40y+0^2=-8\left(4x-5y\right)+0=-8\cdot 10=-80.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\mathrm{AB}=3x-2,\ \mathrm{B\Gamma}=x+12$ και $\Gamma\mathrm{A}=2x+8,\ x\geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο;

Λύση
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αν ισχύει:

$$\begin{aligned}&\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}\text{ ή }\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}\text{ ή }\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}\\&\Leftrightarrow 3x-2=x+12\text{ ή }3x-2=2x+8\text{ ή }2x+8=x+12\\&\Leftrightarrow 2x=14\text{ ή }x=10\text{ ή }x=4\Leftrightarrow x=7\text{ ή }x=10\text{ ή }x=4.\end{aligned}$$

Από τη λύση των παραπάνω εξισώσεων διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει τιμή του x που να επαληθεύει την ισότητα $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ δεν μπορεί να είναι ισόπλευρο.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{B\Gamma}$ μήκους α και β, αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Λύση
Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{E}=\alpha\beta$. Μετά την αύξηση του μήκους των πλευρών του τα μήκη των πλευρών του νέου ορθογωνίου είναι:

$$\alpha' = \alpha + \frac{20\alpha}{100} = \alpha + \frac{2\alpha}{10} = \frac{12\alpha}{10} \text{ και } \beta' = \beta + \frac{30\beta}{100} = \beta + \frac{3\beta}{10} = \frac{13\beta}{10}.$$

Έτσι το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου θα είναι:

$$\mathrm{E}' = \frac{12\alpha}{10} \cdot \frac{13\beta}{10} = \frac{156\alpha\beta}{100} = \alpha\beta + \frac{56\alpha\beta}{100} = \mathrm{E} + \frac{56\alpha\beta}{100}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}' - \mathrm{E} = \frac{56\mathrm{E}}{100} \Rightarrow \frac{\mathrm{E}' - \mathrm{E}}{\mathrm{E}} = \frac{56}{100}.$$

Άρα η αύξηση της τιμής του εμβαδού είναι 56% πάνω στην αρχική τιμή του.

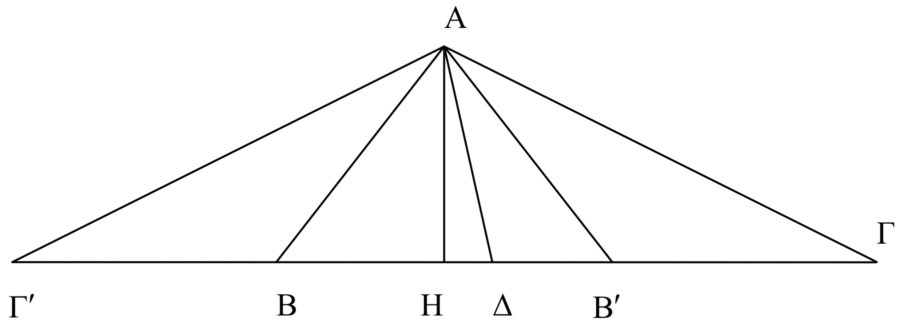
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{AB}$) με τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του ΑΗ και η διχοτόμος του ΑΔ.

(α) Αν $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \Gamma'$ είναι τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους ΑΗ, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΑΔ.

Λύση



(α) Από την υπόθεση έχουμε $\hat{\mathrm{A}} = 2\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}} - 20^0$, οπότε από τη γνωστή ισότητα $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^0$ λαμβάνουμε $2\hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} - 20^0 = 180^0 \Leftrightarrow 4\hat{\mathrm{B}} = 200^0 \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}} = 50^0$.

Άρα έχουμε και $\hat{\mathrm{A}} = 100^0$ και $\hat{\Gamma} = 30^0$.

Λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα ΑΗ, τα τρίγωνα ΑΒΓ και $\mathrm{AB}'\Gamma'$ είναι ίσα ($\mathrm{A}' \equiv \mathrm{A}$, αφού το σημείο Α ανήκει στον άξονα συμμετρίας), οπότε θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $\mathrm{AB} = \mathrm{AB}'$ και $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Gamma}'$. Άρα τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή.

Επιπλέον έχουμε

$$\hat{\mathrm{B}}' = \mathrm{B} = 50^0, \ \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma} = 30^0,$$

$$\mathrm{B\hat{A}B}' = 180^0 - 2 \cdot 50^0 = 80^0 \text{ και } \Gamma'\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - 2 \cdot 30^0 = 120^0.$$

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ έχουμε την ισότητα:

$$\mathrm{H\hat{A}\Delta} = 90^\circ - \mathrm{A\hat{\Delta}H} \qquad (1)$$

Όμως από το τρίγωνο ΑΒΔ λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\mathrm{A\hat{\Delta}H} = \mathrm{A\hat{\Delta}B} = 180^0 - \hat{\mathrm{B}} - \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 180^0 - 50^0 - 50^0 = 80^0. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\mathrm{H\hat{A}\Delta} = 90^\circ - 80^0 = 10^0.$$

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a+2b=\frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^4\right]^3.$$

Λύση

Η παράσταση γίνεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^4\right]^3\\&=\frac{1}{16^2\left(a+2b\right)^2}-\frac{1}{32^3\left(a+2b\right)^3}+\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{3^4}\right]^3\\&=\frac{1}{\left(2^4\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(2^5\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3}+\left[\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{1}{3^4}\right]^3\\&=\frac{1}{2^{8-2}}-\frac{1}{2^{15-3}}+\frac{1}{2^{4\cdot 3}}=\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{12}}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x,y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x+2y}{x-2y}.$$

Λύση

Από τη σχέση $x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy$ λαμβάνουμε:

$$x^2+4y^2+2x\cdot 2y=\frac{20}{3}xy+4xy\Rightarrow\left(x+2y\right)^2=\frac{32}{3}xy,$$

$$x^2+4y^2-2x\cdot 2y=\frac{20}{3}xy-4xy\Rightarrow\left(x-2y\right)^2=\frac{8}{3}xy>0,$$

οπότε έχουμε:

$$\mathrm{A}^2=\frac{\left(x+2y\right)^2}{\left(x-2y\right)^2}=\frac{\frac{32}{3}xy}{\frac{8}{3}xy}=4\Leftrightarrow\mathrm{A}=2\ \text{ή}\ \mathrm{A}=-2.$$

Δεύτερος τρόπος

Από τη σχέση $x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy$ με διαίρεση των δύο μελών με y^2 και την αντικατάσταση $u=\frac{x}{y}$ λαμβάνουμε:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+4-\frac{20}{3}\left(\frac{x}{y}\right)=0 \Leftrightarrow u^2-\frac{20}{3}u+4=0 \Leftrightarrow \left(u-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{64}{9}=0$$

$$u-\frac{10}{3}=\frac{8}{3} \text{ ή } u-\frac{10}{3}=-\frac{8}{3} \Leftrightarrow u=6 \text{ ή } u=\frac{2}{3}.$$

Για $u=\frac{x}{y}=6$ λαμβάνουμε $x=6y$, οπότε : $\mathrm{A}=\frac{6y+2y}{6y-2y}=2.$

Για $u=\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ λαμβάνουμε $3x=2y$, οπότε : $\mathrm{A}=\frac{x+3x}{x-3x}=-2.$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία, $a\neq 0$,που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$ab+4(a+b)=10a+b,$$

όπου a,b ψηφία, $a\neq 0$. Ισοδύναμα έχουμε:

$$ab+4a+4b=10a+b \Leftrightarrow ab-6a+3b=0$$

$$\Leftrightarrow a(b-6)+3(b-6)=-18 \Leftrightarrow (a+3)(b-6)=-18$$

$$\Leftrightarrow (a+3)(6-b)=18.$$

Από την τελευταία εξίσωση, δεδομένου ότι $4\leq a+3\leq 12$, προκύπτει ότι:

$$(a+3,6-b)=(6,3) \text{ ή } (9,2)$$

$$\Leftrightarrow (a,b)=(3,3) \text{ ή } (6,4),$$

δηλαδή οι αριθμοί που ζητάμε είναι οι 33 και 64.

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο Κ, έτσι ώστε να είναι $\mathrm{AK}>\mathrm{KB}$. Έστω Μ το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Λύση

Έστω ότι η ευθεία ΓΜ τέμνει την πλευρά ΑΔ στο σημείο Ε. Η ΓΕ είναι ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, αν είναι $\Gamma\mathrm{E}\perp\mathrm{A}\Delta$ ή $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta=90^\circ$. Αρκεί να ισχύει: $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta+\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$.

Όμως είναι

$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}, \tag{1}$$

λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία ΓΔ.

Επίσης έχουμε

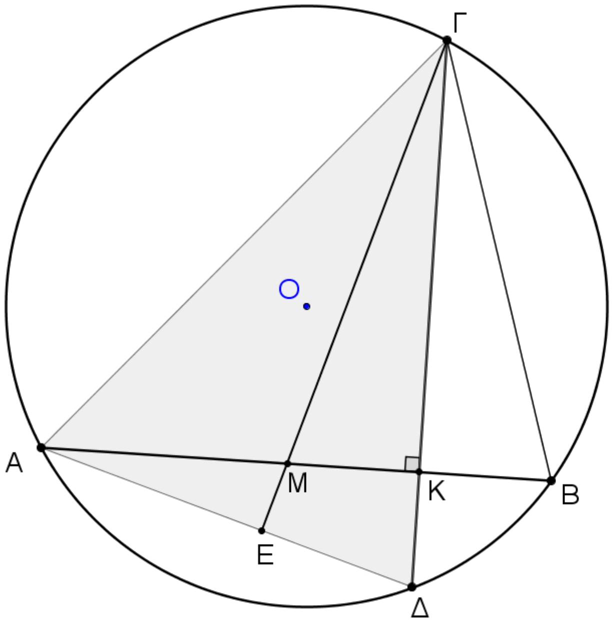
$$\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K},$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}$, $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου. Άρα είναι

$$\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}, \tag{2}$$

ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:



$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B} + \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = 180^0 - \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = 180^0 - 90^\circ = 90^\circ,$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$ και $\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ είναι οι δύο οξείες γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου ΓΚΒ. Επειδή οι δύο χορδές είναι κάθετες θα είναι και $\mathrm{AK} \perp \Gamma\Delta$, δηλαδή ΑΚ είναι επίσης ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$\mathrm{A} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}},$$

όπου m, n ακέραιοι και x, y πραγματικοί αριθμοί με $xy \neq 0$, $xy \neq 1$ και $xy \neq -1$.

Λύση

$$\mathrm{A} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}} = \frac{\left(\frac{x^2y^2 - 1}{y^2}\right)^m \left(\frac{xy+1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(\frac{x^2y^2 - 1}{x^2}\right)^n \left(\frac{xy-1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}}$$

$$= \frac{\left(x^2y^2 - 1\right)^{m-n} \cdot x^{2n}}{y^{2m}} \cdot \frac{(xy+1)^{n-m} \cdot y^{m-n}}{(xy-1)^{m-n} \cdot x^{n-m}} \cdot \frac{y^{m+n}}{x^{m+n}}$$

$$= \frac{(xy+1)^{m-n}(xy-1)^{m-n} \cdot (xy+1)^{n-m}}{(xy-1)^{m-n}} \cdot x^{2n-2n} \cdot y^{2m-2m} = 1.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α , β αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 .$$

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{B} = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \quad \text{και} \quad \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right)$$

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A} = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 = 2010 + 2008 \cdot (2010 - 2009)$$
$$= 2010 + 2008 \cdot 1 = 2010 + 2008 = 4018.$$

(β) Έχουμε

$$\mathrm{B} = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{48 - 9 - 8}{12} \right) = \frac{3 \cdot 31}{8 \cdot 12} = \frac{31}{32}$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \frac{21}{9} = \frac{21}{22} .$$

Επειδή ισχύει ότι:

$$\mathrm{B} - \Gamma = \frac{31}{32} - \frac{21}{22} = \frac{31 \cdot 22 - 32 \cdot 21}{32 \cdot 22} = \frac{682 - 672}{32 \cdot 22} = \frac{10}{32 \cdot 22} > 0 ,$$

έπεται ότι είναι $\mathrm{B} > \Gamma$.

Πρόβλημα 2

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $x = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma,\ \alpha \neq 0,$ έχει άθροισμα ψηφίων 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος μικρότερος από τον x κατά 297. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

Λύση

Ο ακέραιος που προκύπτει μετά την εναλλαγή των ψηφίων των εκατοντάδων και μονάδων είναι ο $y = 100\gamma + 10\beta + \alpha$ και, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, ισχύει ότι:

$$x - y = 297 \Leftrightarrow (100\alpha + 10\beta + \gamma) - (100\gamma + 10\beta + \alpha) = 297$$
$$\Leftrightarrow 99(\alpha - \gamma) = 297 \Leftrightarrow \alpha - \gamma = 3.$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τα ψηφία α και γ είναι:

$\alpha=3,\gamma=0$ ή $\alpha=4,\gamma=1$ ή $\alpha=5,\gamma=2$ ή $\alpha=6,\gamma=3$ ή $\alpha=7,\gamma=4$ ή $\alpha=8,\gamma=5$ ή $\alpha=9,\gamma=6$.

Επειδή από την υπόθεση δίνεται ότι $\alpha+\beta+\gamma=10$, οι ζητούμενοι ακέραιοι $x=\overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι οι:

370, 451, 532, 613.

Πρόβλημα 3

Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος $\mathrm{AB}=x$ μέτρα και μήκος $\mathrm{B\Gamma}=y$ μέτρα, το οποίο είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 25%, να βρείτε πόσο επί τα εκατό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο.

Λύση

Μετά την αύξηση κατά 25% το πλάτος του ορθογωνίου γίνεται $x_1=x+\dfrac{25x}{100}=\dfrac{125x}{100}=\dfrac{5x}{4}$.

Έστω ότι πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά $\alpha\%$, έτσι ώστε να μείνει το εμβαδό του αμετάβλητο. Τότε το μήκος του θα γίνει:

$$y_1=y-\frac{\alpha y}{100}=\frac{(100-\alpha)y}{100}=\frac{(100-\alpha)\cdot 2x}{100},$$

ενώ θα ισχύει η ισότητα

$$xy=x_1y_1 \Leftrightarrow x\cdot 2x=\frac{5x}{4}\cdot\frac{(100-\alpha)\cdot 2x}{100} \Leftrightarrow 2x^2=\frac{100-\alpha}{80}\cdot 2x^2$$

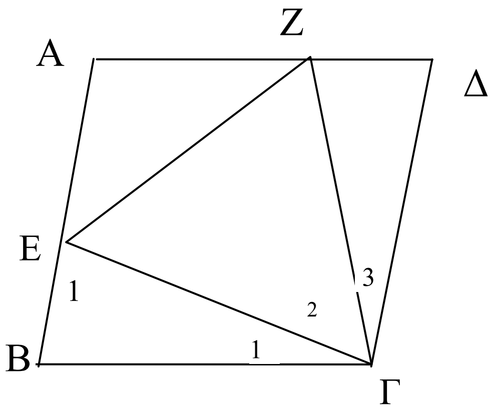
$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{100-\alpha}{80}\right)\cdot 2x^2=0 \Leftrightarrow 1-\frac{100-\alpha}{80}=0 \;\; (\text{αφού } x\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 80-100+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=20.$$

Άρα πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά 20%.

Πρόβλημα 4.

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος πλευράς α και το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Τα σημεία Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ, αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.



Σχήμα 1

Λύση

Επειδή είναι ΒΓ = ΓΕ = α, το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές και έχει:

$$\hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{E}}_1 \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\mathrm{AB}\parallel\Gamma\Delta$ και η ΕΓ είναι τέμνουσα των ΑΒ και ΓΔ έχουμε ότι:

$$\hat{\mathrm{E}}_1=\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta=\hat{\Gamma}_2+\hat{\Gamma}_3=60^\circ+\hat{\Gamma}_3, \qquad (2)$$

αφού κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°.
Επίσης από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΕ και ΓΖΔ με ίσες πλευρές ΒΓ = ΓΖ=α, ΓΕ = ΓΔ = α , προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^0 - 2\hat{B} = 180^0 - 2\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_3, \qquad (3)$$

αφού οι απέναντι γωνίες ρόμβου είναι ίσες,
Από την παραλληλία των πλευρών ΑΒ και ΓΔ έχουμε

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{E}_1 + \hat{\Gamma}_1 + E\hat{\Gamma}\Delta = 180^0 \quad (\text{λόγω της } (1))$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + 2\cdot\left(60^\circ + \hat{\Gamma}_1\right) = 180^0 \quad (\text{λόγω της } (2))$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\hat{\Gamma}_1 + 120^0 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 20^0.$$

Άρα είναι:

$$\hat{B} = \frac{180^0 - 20^0}{2} = 80^0, \ \hat{\Delta} = \hat{B} = 80^0 \ \text{ και } \ \hat{A} = \hat{\Gamma} = 180^0 - 80^0 = 100^0.$$

Γ΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Έστω ο ακέραιος

$$A = \left[(-1)^{\nu} + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο Α είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν.

Λύση

Έχουμε

$$A = \left[(-1)^{\nu} + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu = \left[(-1)^{\nu} + 1 + \left((-1)^3\right)^{\nu} + 1\right]\cdot\nu$$

$$= \left[2 + 2\cdot(-1)^{\nu}\right]\cdot\nu = \begin{cases} 4\nu, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{αν } \nu \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Επειδή ο ακέραιος Α είναι διαιρέτης του 24, έπεται ότι:

- $A \neq 0$, οπότε ο ν δεν μπορεί να είναι περιττός.
- Ο θετικός ακέραιος $A = 4\nu$, όπου ν άρτιος θετικός ακέραιος, ανήκει στο σύνολο των άρτιων θετικών διαιρετών του 24, δηλαδή είναι:

$$4\nu \in \{2,4,6,8,12,24\}, \text{ όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$

$$\Leftrightarrow \nu \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 6\right\}, \text{όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$

$$\Leftrightarrow \nu = 2 \text{ ή } \nu = 6.$$

Άρα οι δυνατές τιμές του ν είναι το 2 και το 6.

Πρόβλημα 2

Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Λύση

Ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ικανοποιεί την εξίσωση

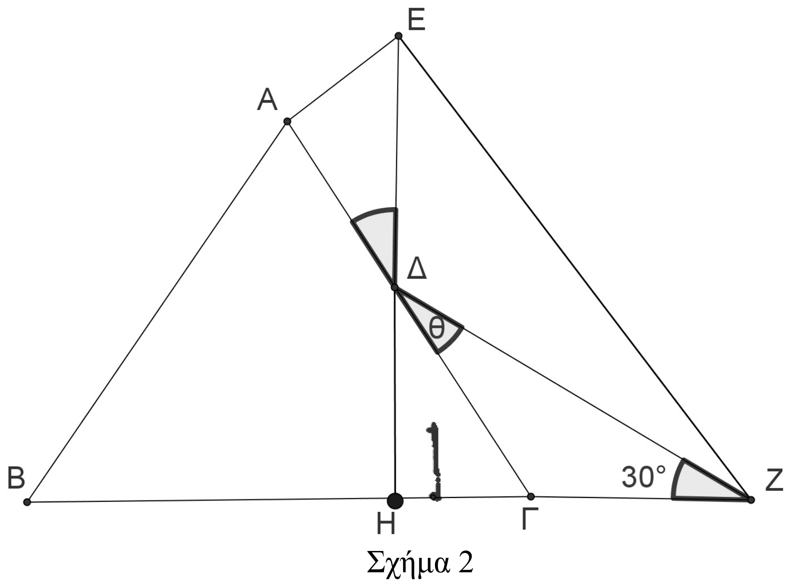
$$10a + b = ab - (a + b) \Leftrightarrow 11a = ab - 2b \Leftrightarrow (11 - b)a = -2b.$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι δυνατόν να ισχύει, γιατί ο όρος $(11-b)a$ του πρώτου μέλους είναι θετικός, ενώ ο όρος του δευτέρου μέλους είναι μικρότερος ή ίσος με το μηδέν. Άρα δεν υπάρχει ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 3
Να υπολογίσετε το άθροισμα:
$$S = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 997^2 - 998^2 - 999^2 + 1000^2 .$$

Λύση
Παρατηρούμε ότι το άθροισμα S είναι άθροισμα 250 αθροισμάτων της μορφής
$$S_k = (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2, \text{ για } k = 0,1,2,3,...,249 .$$
Όμως έχουμε
$$\begin{aligned} S_k &= (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2 \\ &= 16k^2 + 8k + 1 - 16k^2 - 16k - 4 - 16k^2 - 24k - 9 + 16k^2 + 32k + 16 \\ &= 4, \text{ για κάθε } k = 0,1,2,3,...,249. \end{aligned}$$
Άρα έχουμε
$$S = S_0 + S_1 + ... + S_{249} = 4 + 4 + ...4 = 250 \cdot 4 = 1000$$

Πρόβλημα 4
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι: το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $\mathrm{A\Gamma} = \beta$ του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 90^\circ$, η ΔΕ είναι κάθετη προς τη ΒΓ, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \theta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta = 30^0$.
(i) Να βρείτε τη γωνία θ.
(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ συναρτήσει του β.



Σχήμα 2

Λύση
(i) Έστω ότι η ευθεία ΔΕ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Η. Τότε θα είναι
$$\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta \text{ (ως κατά κορυφή) και } \mathrm{H}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma + \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 2\theta ,$$
οπότε από το τρίγωνο ΗΔΖ έχουμε:
$$90^\circ + 2\theta + 30^0 = 180^0 \Leftrightarrow \theta = 30^0$$

(ii) Το τρίγωνο ΗΕΖ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΕΖ, οπότε για τον υπολογισμό της ΕΖ θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Πρέπει όμως να έχουμε υπολογίσει τις κάθετες πλευρές ΗΖ και ΗΕ συναρτήσει του β.

Από το τρίγωνο ΗΔΓ που είναι ορθογώνιο στο Η με $\Gamma\Delta = \dfrac{\beta}{2}$ και έχει $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta = 30^0$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{H}\Delta = \Delta\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} \text{ και } \mathrm{H}\Gamma = \Delta\Gamma \cdot \eta\mu 30^0 = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\beta}{4}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα μήκη των ΗΔ και ΗΓ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΔΓ με $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta = 30^0$, οπότε η κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία των 30^0 θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή είναι $\mathrm{H}\Gamma = \dfrac{\beta}{4}$ και στη συνέχεια από το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε και την πλευρά $\mathrm{H}\Delta = \dfrac{\beta\sqrt{3}}{4}$.

Το τρίγωνο ΓΔΖ είναι ισοσκελές ($\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 30^0$), οπότε θα είναι $\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\Delta = \dfrac{\beta}{2}$ και

$$\mathrm{HZ} = \mathrm{H}\Gamma + \Gamma\mathrm{Z} = \frac{\beta}{4} + \frac{\beta}{2} = \frac{3\beta}{4}.$$

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ με $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 90^\circ$, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 30^0$ και $\mathrm{A}\Delta = \dfrac{\beta}{2}$, έχουμε:

$$\Delta\mathrm{E} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\sigma\upsilon\nu 30^0} = \frac{\beta/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\beta\sqrt{3}}{3},$$

οπότε θα είναι

$$\mathrm{HE} = \mathrm{H}\Delta + \Delta\mathrm{E} = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} + \frac{\beta\sqrt{3}}{3} = \frac{7\beta\sqrt{3}}{12}.$$

Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΗΕΖ με $\hat{\mathrm{H}} = 90^\circ$ έχουμε:

$$\mathrm{EZ} = \sqrt{\mathrm{HE}^2 + \mathrm{HZ}^2} = \sqrt{\left(\frac{7\beta\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2} = \frac{\beta\sqrt{57}}{6}.$$

Α΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α, για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Για $\alpha = 0$ είναι $\mathrm{A} = 0$, ρητός. Έστω $\alpha \neq 0$. Αν ήταν ο $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ ρητός, τότε ο αριθμός $\dfrac{\mathrm{A}}{\alpha} = \sqrt{3}$**,** θα ήταν επίσης ρητός, ως πηλίκο δύο ρητών αριθμών, που είναι άτοπο.

Επομένως, ο αριθμός Α είναι ρητός μόνο για $\alpha = 0$.

(ii) Έχουμε $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$. Αν ο αριθμός Β ήταν ρητός, τότε ο αριθμός $\mathrm{B} - 4 = 2\sqrt{3}$ θα ήταν επίσης ρητός, ως διαφορά δύο ρητών, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙ-ΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς
$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}.$$
(β) Αν ισχύει ότι:
$$\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6},$$
να βρείτε την τιμή της παράστασης:
$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}.$$

Λύση
(α) Έχουμε
$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(8+1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(9+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot 9=\frac{9}{64},$$
$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{4}\cdot\frac{9}{128}=\frac{9}{64}.$$
Άρα είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

Σημείωση. *Λόγω της μη ύπαρξης παρενθέσεων που να δίνουν προτεραιότητα στις πράξεις διαί-ρεσης και πολλαπλασιασμού θεωρούμε δεκτή και τη λύση της μορφής*
$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{1}{96}=\frac{768}{27}.$$
Στην περίπτωση αυτή είναι $\mathrm{A}<1<\mathrm{B}$, δηλαδή $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

(β) Λόγω της υπόθεσης $\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6}$, έχουμε ότι:
$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}=\frac{8}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4\alpha}+\frac{12}{3\beta}-\frac{2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma}{12}-\frac{3}{12}$$
$$=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{4}+\frac{4}{\beta}-\frac{2}{3}+\frac{\gamma}{6}-\frac{1}{4}=\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}-\frac{7}{6}=-1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος αυτοκινήτων είχε στο κατάστημά του την αρχή της περυσινής χρονιάς 20 αυτοκίνητα τύπου Α και 60 αυτοκίνητα τύπου Β. Η τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο τύπου Α είναι 10000 ευρώ, ενώ για κάθε αυτοκίνητο τύπου Β είναι 12000 ευρώ.

Στο τέλος της χρονιάς είχε πουλήσει το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α και το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β.

Να βρείτε ποιο θα είναι το κέρδος του από την πώληση των αυτοκινήτων, αν γνωρίζετε ότι από καθένα αυτοκίνητο τύπου Α κερδίζει το 5% της τιμής πώλησής του, ενώ από καθένα αυτοκίνητο τύπου Β κερδίζει το 10% της τιμής πώλησής του.

Λύση

Το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α είναι $20\cdot\frac{30}{100}=6$ αυτοκίνητα, ενώ το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β είναι $\left(20+60\right)\cdot\frac{60}{100}=80\cdot\frac{60}{100}=48$ αυτοκίνητα. Επομένως από τα αυτοκίνητα τύπου Β πουλήθηκαν $48-6=42$ αυτοκίνητα.

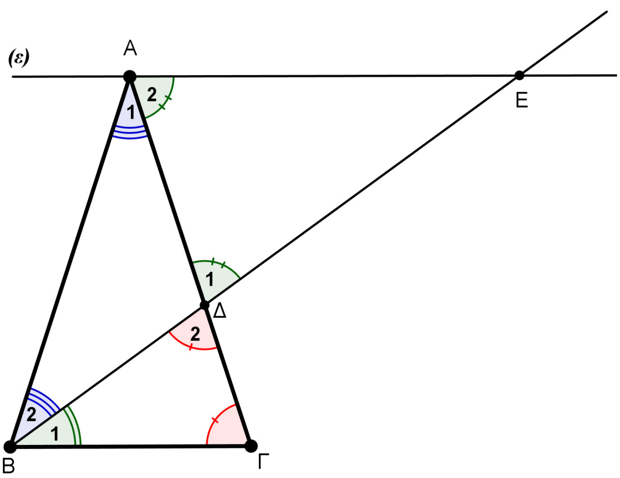
Από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Α κερδίζει $10000\cdot\frac{5}{100}=500$ ευρώ, ενώ από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Β κερδίζει $12000\cdot\frac{10}{100}=1200$ ευρώ. Επομένως από την πώληση των αυτοκινήτων ο έμπορος κέρδισε

$$6\cdot 500+42\cdot 1200=3000+50400=53400 \text{ ευρώ.}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=36^0$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, ΑΔΕ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή.

Λύση



Σχήμα 1

Το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι 180^o Επειδή όμως ισχύει $\hat{\mathrm{A}}=36^o$, θα έχουμε: $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=72^o$.

Η $\mathrm{B\Delta}$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, οπότε $\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\mathrm{B}}_2=\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}=\frac{72^o}{2}=36^o$.

Επειδή τώρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 36^o$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ισχύει $\hat{B}_1 = 36^o$ και $\hat{\Gamma} = 72^o$. Άρα $\hat{\Delta}_2 = 72^o$.

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 = 72^o$, προκύπτει ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$.

Από την ισότητα τέλος των γωνιών $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 72^o$ (ως κατά κορυφή), προκύπτει η ισότητα $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 = 72^o$. Επομένως το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{E}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την BE. Επίσης $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \dfrac{\hat{B}}{2} = 36^o$, οπότε θα είναι και $\hat{B}_2 = \hat{E}$. Επομένως και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $A - B = 27$, όπου $B = \overline{\alpha\gamma\beta} = 100\alpha + 10\gamma + \beta$.

(ii) Το άθροισμα των ψηφίων β, γ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης: $3x + 12 < 5x - 1$.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 3.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$A - B = 27 \Leftrightarrow 9\beta - 9\gamma = 27 \Leftrightarrow 9\cdot(\beta - \gamma) = 27 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 3. \qquad (1)$$

Για την ανίσωση του ερωτήματος (ii) έχουμε:

$$3x + 12 < 5x - 1 \Leftrightarrow 3x - 5x < -12 - 1 \Leftrightarrow -2x < -13 \Leftrightarrow 2x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{2}.$$

Άρα, ο μικρότερος ακέραιος που είναι λύση της είναι ο 7, οπότε έχουμε:

$$\beta + \gamma = 7. \qquad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$2\beta = 10,\ 2\gamma = 4 \Leftrightarrow \beta = 5,\ \gamma = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να σκεφθούμε ως εξής: Επειδή οι ακέραιοι β, γ είναι ψηφία με διαφορά $\beta - \gamma = 3$ θα είναι $\beta > \gamma$ και επειδή επιπλέον έχουν άθροισμα 7, οι δυνατές τιμές τους είναι

$$\beta = 7,\ \gamma = 0 \text{ ή } \beta = 6,\ \gamma = 1 \text{ ή } \beta = 5,\ \gamma = 2 \text{ ή } \beta = 4,\ \gamma = 3.$$

Επειδή πρέπει $\beta - \gamma = 3$ οι αποδεκτές τιμές είναι $\beta = 5,\ \gamma = 2$.

Άρα ο θετικός ακέραιος Α θα έχει τη μορφή $A = \overline{\alpha 52}$ με άθροισμα ψηφίων $\alpha + 7$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο Α διαιρείται με το 3, πρέπει και αρκεί ο ακέραιος $\alpha + 7$ να είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε, αφού το α είναι ψηφίο, οι κατάλληλες τιμές του είναι: $\alpha = 2$ ή $\alpha = 5$ ή $\alpha = 8$.

Επομένως, έχουμε $A = 252$ ή $A = 552$ ή $A = 852$

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1.$$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-20,$$

για $\beta=-\frac{1}{3}$.

Λύση
(α) Έχουμε

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1\Leftrightarrow 2\cdot(2x+18)-(7-3x)=8\Leftrightarrow 4x+36-7+3x=8$$

$$\Leftrightarrow 7x+29=8\Leftrightarrow 7x=8-29\Leftrightarrow 7x=-21\Leftrightarrow x=-3.$$

(β) Για $\beta=-\frac{1}{3}$ η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)^{-3}-9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-20=\left(\frac{1}{\frac{1}{9}}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^{-3}-9\cdot\frac{1}{9}-20$$

$$=\left(9+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)^3-1-20=\left(\frac{81}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)-1-20=-\frac{82}{9}-1-20$$

$$=-\frac{82}{9}-\frac{9}{9}-\frac{180}{9}=-\frac{271}{9}.$$

Πρόβλημα 2
Οι θετικοί ακέραιοι α,β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha\leq 10,\ \beta\geq 12 \text{ και } (\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\leq 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=3\alpha-2\beta$.

Λύση
Είναι $\alpha\leq 10$, οπότε $\alpha-12<0$. Άρα, για να αληθεύει η ανίσωση $(\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\leq 0$, αρκεί να ισχύει ότι: $40-2\beta\geq 0\Leftrightarrow 40\geq 2\beta\Leftrightarrow \beta\leq 20$. Έτσι έχουμε:

$$0\leq\alpha\leq 10 \text{ και } 12\leq\beta\leq 20\Rightarrow 0\leq 3\alpha\leq 30 \text{ και } 24\leq 2\beta\leq 40$$

$$\Rightarrow 0\leq 3\alpha\leq 30 \text{ και } -40\leq -2\beta\leq -24,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$-40\leq \mathrm{A}=3\alpha-2\beta\leq 6,$$

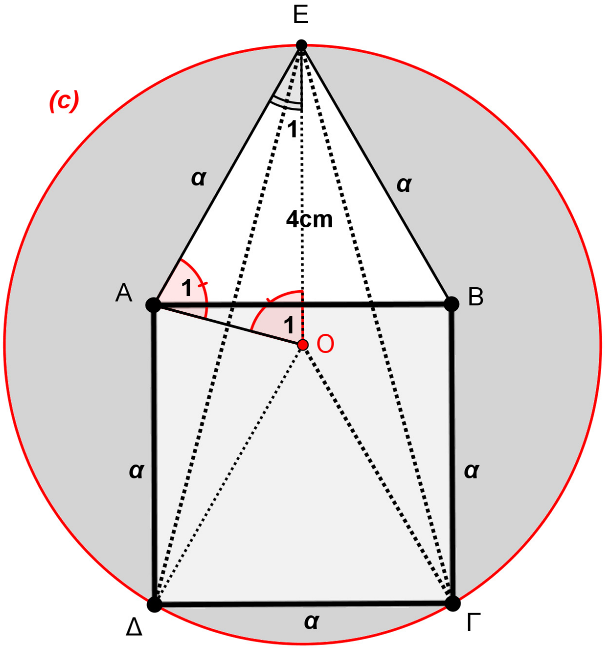
οπότε η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης Α είναι 6, ενώ η μικρότερη τιμή της είναι -40.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε έχει ακτίνα 4 cm.

(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $Ε\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου.
(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος $ΕΑ\Delta\Gamma ΒΕ$ και εσωτερικά του κύκλου (c).

Λύση

(i) Στα τρίγωνα $ΑΕ\Delta$ και $ΒΕ\Gamma$ ισχύουν: $ΑΕ = ΒΕ = \alpha$, $Α\Delta = Β\Gamma = \alpha$ και $Ε\hat{Α}\Delta = Ε\hat{Β}\Gamma = 90^o + 60^o = 150^o$.



Σχήμα 2

Άρα τα τρίγωνα $ΑΕ\Delta$ και $ΒΕ\Gamma$ είναι ίσα και κατά συνέπεια $Ε\Delta = Ε\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $Ε\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(ii) Εφόσον $Ε\Delta = Ε\Gamma$, το σημείο $Ε$ ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος $\Delta\Gamma$ (που ταυτίζεται με τη μεσοκάθετη του τμήματος $ΑΒ$). Επίσης $ΕΑ = ΕΒ$, οπότε το σημείο $Ε$ ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος $ΑΒ$. Άρα η $ΟΕ$ είναι μεσοκάθετη της $ΑΒ$ και κατά συνέπεια διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Ε}Β$ του ισόπλευρου τριγώνου $ΑΕΒ$. Άρα είναι $\hat{Ε}_1 = 30^o$.

$$\left.\begin{array}{l} ΑΕ = Α\Delta = \alpha \\ ΟΕ = Ο\Delta = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow ΟΑ \text{ μεσοκάθετη της } Ε\Delta \Rightarrow ΟΑ \text{ διχοτόμος της } \Delta\hat{Α}Ε \Rightarrow \hat{Α}_1 = 75^o.$$

Στο τρίγωνο $ΑΟΕ$ έχουμε: $\hat{Α}_1 = 75^o$ και $\hat{Ε}_1 = 30^o$. Άρα $\hat{Ο}_1 = 75^o$, οπότε το τρίγωνο $ΑΟΕ$ είναι ισοσκελές με $ΕΑ = ΕΟ = \alpha = 4cm$.

(iii) Το εμβαδόν του κύκλου (c) είναι: $Ε_c = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου $ΑΒ\Gamma\Delta$ είναι: $Ε_{τετ} = 4^2 = 16$, ενώ το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΕ$ είναι: $Ε_{τρ} = 4\sqrt{3}$. Άρα το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας είναι: $Ε = 16\pi - 16 - 4\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $Α = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $Α - Β = 198$, όπου $Β = \overline{\gamma\beta\alpha} = 100\gamma + 10\beta + \alpha$,

(ii) Η εξίσωση $\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{\alpha-2\gamma}{x}=1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 9.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=198 \Leftrightarrow 99\cdot(\alpha-\gamma)=198 \Leftrightarrow \alpha-\gamma=2. \qquad (1)$$

Η εξίσωση της πρότασης (ii) , αν $\gamma \neq 2\alpha$ και $x \neq 0$, γράφεται:

$$\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{\alpha-2\gamma}{x}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{x+\alpha-2\gamma}{x}=0 \Leftrightarrow (x+\alpha-2\gamma)\left(\frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\alpha-2\gamma=0 \text{ ή } \frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=2\gamma-\alpha \text{ ή } x=2\alpha-\gamma$$

Επειδή, λόγω της (ii) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι 4, έχουμε ότι

$$(2\gamma-\alpha)+(2\alpha-\gamma)=4 \Leftrightarrow \alpha+\gamma=4, \qquad (2)$$

με τους περιορισμούς για τις παραμέτρους $\gamma \neq 2\alpha$ και $\alpha \neq 2\gamma$.

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$2\alpha=6,\ 2\gamma=2 \Leftrightarrow \alpha=3,\ \gamma=1$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι περιορισμοί για την εξίσωση.

Άρα ο θετικός ακέραιος Α θα έχει τη μορφή $\mathrm{A}=\overline{3\beta 1}$ με άθροισμα ψηφίων $4+\beta$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο Α διαιρείται με το 9, πρέπει και αρκεί $4+\beta=\pi o\lambda.(9)$, οπότε, αφού το β είναι ψηφίο, η μοναδική δυνατή τιμή του είναι $\beta=5$.

Επομένως, ο ζητούμενος θετικός ακέραιος Α είναι ο 351.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{2^3}{31}\cdot\left(2^3+2^0+\frac{3}{8}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right) \text{ και } \mathrm{B}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{3^4}-\frac{2}{9^2}\right)+\frac{3}{2^4}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=11\alpha\beta\gamma \text{ και } \alpha\beta\gamma\neq 0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{2\alpha}+\frac{12-\beta}{3\beta}+\frac{16-\gamma}{4\gamma}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{2^3}{31}\cdot\left(2^3+2^0+\frac{3}{8}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot\left(8+1+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot\left(9+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot 9=\frac{72}{31},$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{3^4}-\frac{2}{9^2}\right)+\frac{3}{2^4}=\left(\frac{3}{12}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{81}-\frac{2}{81}\right)+\frac{3}{16}=\frac{1}{6}\cdot\frac{81}{6}+\frac{3}{16}=\frac{9}{4}+\frac{3}{16}=\frac{39}{16}.$$

Επειδή είναι $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{72}{31}-\frac{39}{16}=\frac{72\cdot 16-39\cdot 31}{31\cdot 16}=\frac{1152-1209}{496}<0,$ έπεται ότι $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

(β) Έχουμε

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{2\alpha}+\frac{12-\beta}{3\beta}+\frac{16-\gamma}{4\gamma}=\frac{8}{2\alpha}-\frac{\alpha}{2\alpha}+\frac{12}{3\beta}-\frac{\beta}{3\beta}+\frac{16}{4\gamma}-\frac{\gamma}{4\gamma}$$
$$=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\frac{13}{12}.$$

Από την υπόθεση $6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=11\alpha\beta\gamma$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$ με διαίρεση και των δύο μελών της ισότητας με $6\alpha\beta\gamma\neq 0$ προκύπτει ότι:

$$\frac{6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{6\alpha\beta\gamma}=\frac{11\alpha\beta\gamma}{6\alpha\beta\gamma}\Rightarrow\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{11}{6},$$

οπότε η παράσταση Γ έχει τιμή

$$\Gamma=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\frac{13}{12}=4\cdot\frac{11}{6}-\frac{13}{12}=\frac{44}{6}-\frac{13}{12}=\frac{75}{12}=\frac{25}{4}.$$

Πρόβλημα 2

Ένας πελάτης αγόρασε από μία έκθεση αυτοκινήτων ένα αυτοκίνητο για το οποίο πλήρωσε με μετρητά το μισό της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου, ενώ για τα υπόλοιπα συμφωνήθηκε να πληρώσει με 24 μηνιαίες δόσεις των 500 ευρώ. Με αυτόν το διακανονισμό επιβαρύνθηκε με τόκους που συνολικά αντιστοιχούν στο 10% της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου. Να βρείτε την τιμή πώλησης του αυτοκινήτου και πόσα συνολικά θα πληρώσει συνολικά ο πελάτης.

Λύση.

Αν υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι x, τότε, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση:

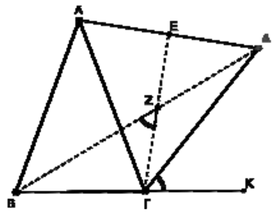
$$\frac{x}{2}+24\cdot 500 = x+\frac{10x}{100} \Leftrightarrow \frac{x}{2}+12000 = x+\frac{x}{10} \Leftrightarrow 5x+120000 = 10x+x$$

$$\Leftrightarrow 6x = 120000 \Leftrightarrow x = \frac{120000}{6} = 20000.$$

Άρα η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι $x = 20000$ ευρώ και ο πελάτης θα πληρώσει συνολικά $x+\frac{10x}{100} = \frac{11x}{10} = \frac{11\cdot 20000}{10} = 22000$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

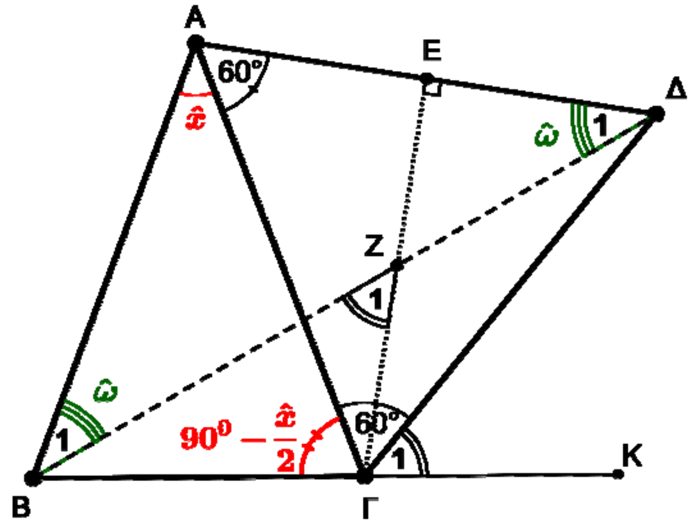
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$), το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ είναι ισόπλευρο και E είναι το μέσο του $\mathrm{A\Delta}$. Αν το K βρίσκεται στη προέκταση της $\mathrm{B\Gamma}$ και οι $\mathrm{B\Delta}, \mathrm{\Gamma E}$ τέμνονται στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\mathrm{B\hat{Z}\Gamma}$ και $\mathrm{K\hat{\Gamma}\Delta}$, είναι ίσες.



Λύση

Έστω $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \hat{x}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{x}+2\hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 90^o - \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (1)$$



Σχήμα 1

Από το ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma\Delta}$, έχουμε: $\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta} = 60^0$. Οι γωνίες τώρα $\hat{\Gamma}, \mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}$ και $\hat{\Gamma}_1$ είναι διαδοχικές με την πρώτη και την τελευταία πλευρά τους αντικείμενες ημιευθείες, έχουμε ότι $\hat{\Gamma} + \mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta} + \hat{\Gamma}_1 = 180^o$, οπότε

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^o - 60^o - \left(90^o - \frac{\hat{x}}{2}\right) \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 30^o + \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (2)$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$, θέτουμε $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\omega}$ και παίρνουμε:

$$2\hat{\omega} + \hat{x} + 60^0 = 180 \Leftrightarrow \hat{\omega} = 60^o - \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (3)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο τέλος $\mathrm{E}\Delta\mathrm{Z}$, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{Z}}_1 = \mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = 90^o - \hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{Z}}_1 = 30^o + \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (4)$$

Πρόβλημα 4

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 5 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Λύση

Το σύνολο $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, ..., 2012\}$ έχει 2012 στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 5κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \le 5\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le \kappa \le \frac{2012}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le \kappa \le 402\frac{2}{5} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 402\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι 402.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 8κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \le 8\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le \kappa \le \frac{2012}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le \kappa \le 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι 251.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 5 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\mathrm{EK\Pi}\{5, 8\} = 40$ που ανήκουν στο σύνολο Α.

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$1 \le 40\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{40} \le \kappa \le \frac{2012}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{40} \le \kappa \le 50\frac{12}{40} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 50\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 5 και 8 μέσα στο σύνολο Α είναι 50.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο Α συνολικά $402 + 251 - 50 = 603$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $2012 - 603 = 1409$ στοιχεία.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{4\beta^2}\right)^3 + \frac{9\alpha - 20\beta^2}{\beta^2},$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \beta = 2^{-3}$.

(β) Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y} = \alpha > 0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $K = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x, y και ισχύει ότι $K \le 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση K παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Λύση

(α) Για $\alpha = \beta = 2^{-3}$ λαμβάνουμε $\dfrac{\alpha}{\beta^2} = \dfrac{2^{-3}}{\left(2^{-3}\right)^2} = \dfrac{2^{-3}}{2^{-6}} = 2^{-3+6} = 2^3 = 8$.

Η παράσταση Α γράφεται:

$$A = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237\right) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha}{\beta^2}\right)^3 + 9 \cdot \frac{\alpha}{\beta^2} - 20 = (8 + 237) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 8\right)^3 + 9 \cdot 8 - 20$$

$$= 245 \cdot 2^3 + 72 - 20 = 245 \cdot 8 + 52 = 2012.$$

(β) Από την υπόθεση έχουμε ότι $x = \alpha y$, οπότε η παράσταση γράφεται

$$K = \frac{2ayy}{\alpha^2 y^2 + y^2} = \frac{2\alpha y^2}{\left(\alpha^2 + 1\right) y^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1},$$

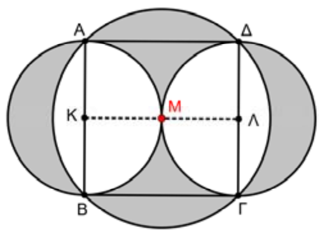
δηλαδή είναι ανεξάρτητη των x, y και εξαρτάται μόνο από το λόγο α. Επιπλέον, ισχύει

$$K = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \le 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \ge 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \ge 0,$$

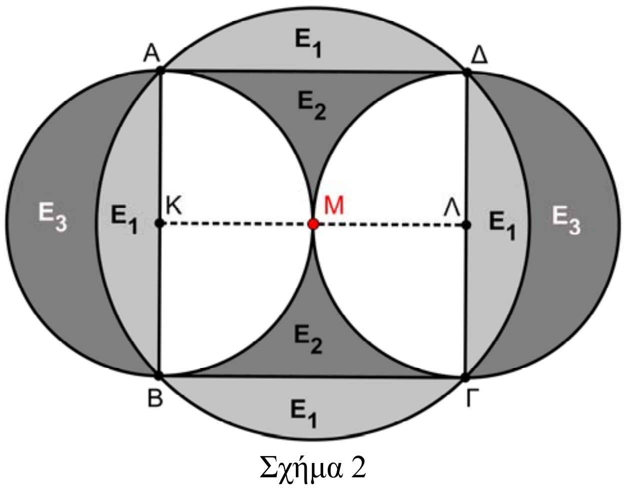
το οποίο είναι αληθές. Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι 1 και λαμβάνεται όταν $\alpha - 1 = 0$, δηλαδή όταν $\alpha = 1$.

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K, Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M. Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $K\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να υπολογιστεί συναρτήσει του R, το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Λύση



Σχήμα 2

Επειδή είναι $AK = \Delta\Lambda$ και $AK \parallel \Delta\Lambda$, ως κάθετες στη διάκεντρο $K\Lambda$, το τετράπλευρο $AK\Lambda\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε θα είναι $A\Delta = K\Lambda = 2R$. Ομοίως προκύπτει ότι και το τετρά-

πλευρο ΚΒΓΛ είναι ορθογώνιο και ότι $\text{ΒΓ} = \text{ΚΛ} = 2R$ Επομένως, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά $2R$ και εμβαδό $(\text{ΑΒΓΔ}) = 4R^2$.
Το τρίγωνο ΑΚΜ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $\text{ΚΑ} = \text{ΚΜ} = R$. Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε: $\text{ΜΑ} = \text{ΜΒ} = \text{ΜΓ} = \text{ΜΔ} = R\sqrt{2}$, δηλαδή ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $R\sqrt{2}$ και κατά συνέπεια το εμβαδό του θα είναι: $\text{Ε} = \pi(R\sqrt{2})^2 = 2\pi R^2$.

Τα εμβαδά των δύο μικτόγραμμων χωρίων ΜΑΔ και ΜΒΓ είναι ίσα μεταξύ τους και το άθροισμά τους προκύπτει, αν από το εμβαδό του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδό των δύο μικρών ημικυκλίων (δηλαδή το εμβαδό του μικρού κύκλου).

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτουν οι σχέσεις:

$$2\text{Ε}_2 = (\text{ΑΒΓΔ}) - \pi R^2 \Leftrightarrow 2\text{Ε}_2 = 4R^2 - \pi R^2 \Leftrightarrow \text{Ε}_2 = \left(\frac{4-\pi}{2}\right)R^2.$$

Για τα εμβαδά των χωρίων Ε_3 έχουμε: $\text{Ε}_3 = \dfrac{\pi R^2}{2} - \text{Ε}_1$.

Άρα το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$2\text{Ε}_1 + 2\text{Ε}_2 + 2\text{Ε}_3 = 2\text{Ε}_1 + (4-\pi)R^2 + \pi R^2 - 2\text{Ε}_1 = 4R^2.$$

Παρατήρηση

Το εμβαδό ενός από τα τέσσερα ίσα κυκλικά τμήματα του μεγάλου κύκλου είναι:

$$\text{Ε}_1 = \frac{\text{Ε} - (\text{ΑΒΓΔ})}{4} = \frac{2\pi R^2 - 4R^2}{4} = \frac{(\pi-2)R^2}{2}..$$

Ο υπολογισμός όμως δεν είναι απαραίτητος γιατί απλοποιείται με τις πράξεις.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια διαγράφουμε όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Λύση

Το σύνολο $\text{Α} = \{101, 102, 103, ..., 2012\}$ έχει 2012 - 100 =1912 στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 3κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \le 3\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{3} \le \kappa \le \frac{2012}{3} \Leftrightarrow 33\frac{2}{3} \le \kappa \le 670\frac{2}{3} \Leftrightarrow \kappa \in \{34, 35, ..., 670\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι $670 - 33 = 637$.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 8κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \le 8\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{8} \le \kappa \le \frac{2012}{8} \Leftrightarrow 12\frac{5}{8} \le \kappa \le 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow \kappa \in \{13, 14, ..., 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι $251 - 12 = 239$.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 3 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\text{ΕΚΠ}\{3,8\} = 24$ που ανήκουν στο σύνολο Α.

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$101 \le 24\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{24} \le \kappa \le \frac{2012}{24} \Leftrightarrow 4\frac{5}{24} \le \kappa \le 83\frac{20}{24} \Leftrightarrow \kappa \in \{5, 6, ..., 83\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 3 και 8 μέσα στο σύνολο Α είναι $83 - 4 = 79$.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο Α συνολικά $637 + 239 - 79 = 797$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $1912 - 797 = 1115$ στοιχεία.

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x)=\left(\alpha x^2+\beta x\right)\left(\gamma x^2+\delta\right)+4,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Έχουμε $P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=x^4-5x^2+4$ και

$$Q(x)=\left(\alpha x^2+\beta x\right)\left(\gamma x^2+\delta\right)+4=\alpha\gamma x^4+\beta\gamma x^3+\alpha\delta x^2+\beta\delta x+4.$$

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα, αν, και μόνον αν, ισχύουν

$$\alpha\gamma=1,\ \beta\gamma=0,\ \alpha\delta=-5,\ \beta\delta=0$$

$$\Leftrightarrow\{\beta=0 \text{ ή } \gamma=0\},\ \{\beta=0 \text{ ή } \delta=0\},\alpha\gamma=1,\alpha\delta=-5.$$

Οι τιμές $\gamma=0$ και $\delta=0$ αποκλείονται γιατί δεν επαληθεύουν τις δύο τελευταίες εξισώσεις, οπότε λαμβάνουμε $\beta=0,\ \gamma=\dfrac{1}{\alpha},\ \delta=-\dfrac{5}{\alpha},\ \alpha\neq 0.$ Από την εξίσωση $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$, με αντικατάσταση των τιμών των β,γ και δ προκύπτει η εξίσωση

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}-\frac{5}{\alpha}=-3\Leftrightarrow\alpha-\frac{4}{\alpha}=-3\Leftrightarrow\alpha^2+3\alpha-4=0\Leftrightarrow\alpha^2-1+3\alpha-3=0$$

$$(\alpha-1)(\alpha+1)+3(\alpha-1)=0\Leftrightarrow(\alpha-1)(\alpha+4)=0\Leftrightarrow\alpha-1=0 \text{ ή } \alpha+4=0\Leftrightarrow\alpha=1 \text{ ή } \alpha=-4$$

Επομένως οι τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι

$$\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \delta=-5 \text{ ή } \alpha=-4,\ \beta=0,\ \gamma=-\frac{1}{4},\ \delta=\frac{5}{4}.$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\leq\frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\leq\frac{|x|+x^2}{4}\Leftrightarrow 3x^2+4\left(|x|-1\right)\leq 3|x|+3x^2\Leftrightarrow|x|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq x\leq 4.$$

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}\Leftrightarrow 2x+2+x(x+1)>(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+2+x^2+x>x^2+4x+4\Leftrightarrow -x>2\Leftrightarrow x<-2.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στο διάστημα $[-4,-2)=\{x\in\mathbb{R}:-4\leq x<-2\}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\quad\text{και}\quad B=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}.$$

Λύση
Έχουμε

$$A=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{31}\cdot\left(27+1+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{1}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{31}\cdot\left(28+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{112}{31}$$

$$B=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}=\frac{1}{41}:\left(\frac{80}{81}-\frac{79}{81}\right)+\frac{67}{41}=\frac{1}{41}:\frac{1}{81}+\frac{67}{41}=\frac{81}{41}+\frac{67}{41}=\frac{148}{41}$$

Επειδή $A-B=\frac{112}{31}-\frac{148}{41}=\frac{112\cdot 41-148\cdot 31}{31\cdot 41}=\frac{4592-4588}{1271}=\frac{4}{1271}>0$, έπεται ότι $A>B$.

Πρόβλημα 2
Ένας φορητός υπολογιστής έχει τιμή πώλησης 720 ευρώ σε μετρητά. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης. Να βρείτε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις πόση θα είναι η μηνιαία δόση.

Λύση.
Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης., δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{5}{100}=36$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720+36=756$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $756:12=63$ ευρώ.

Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης, δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{14}{100}=100,8$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720+100,8=820,8$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $820,8:24=34,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παράλληλο προς τη βάση ΒΓ και ίσο με την πλευρά ΑΒ. Η ευθεία $\mathrm{B\Delta}$ τέμνει την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$.

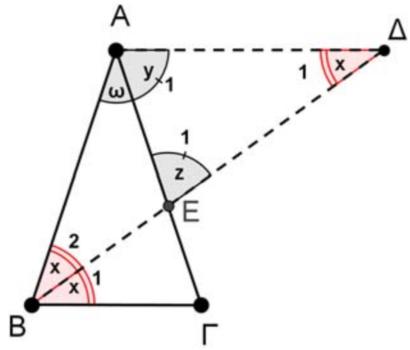
(β) Αν το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$ είναι ισοσκελές, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \omega$.

Λύση

(α) Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Delta}$ είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta}$), οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2$.

Οι $\mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{B\Gamma}$ είναι παράλληλες, οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$, ως εντός εναλλάξ γωνίες.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{x}$. Επομένως η $\mathrm{B\Delta}$ διχοτομεί την γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$.



Σχήμα 1

(β) Από ο άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\mathrm{A\Delta E}$, έχουμε :

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 180^o \qquad (1).$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\mathrm{AB\Delta}$, έχουμε:

$$2\hat{x} + \hat{y} + \hat{\omega} = 180^o \qquad (2).$$

Από την παραλληλία τέλος των $\mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{B\Gamma}$ (με τέμνουσα την $\mathrm{A\Gamma}$), έχουμε:

$$\hat{y} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} = 2\hat{x} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) (σε συνδυασμό με τη σχέση (3)), έχουμε:

$$3\hat{x} + \hat{z} = 180^o \quad (\mathrm{A}) \quad \text{και} \quad 4\hat{x} + \hat{\omega} = 180^o \quad (\mathrm{B}).$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\hat{y} = \hat{z}$, τότε $\hat{y} = \hat{z} = 2\hat{x}$ και από τις σχέσεις (Α) και (Β) λαμβάνουμε: $\hat{x} = 36^o$ και $\hat{\omega} = 36^o$.
- Αν $\hat{x} = \hat{z}$, τότε από τη σχέση (Α) παίρνουμε: $\hat{x} = \hat{z} = 45^o$, οπότε $\hat{\mathrm{B}} = 90^o$, άτοπο.
- Αν $\hat{x} = \hat{y}$, τότε από τη σχέση (3) παίρνουμε: $\hat{x} = 0^o$, άτοπο.

Άρα, αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, τότε $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \omega = 36^0$.

Πρόβλημα 4

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 60% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 15% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν υπάρχουν 24 μαθητές που δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $(60+45)-15 = 90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι 24, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $24\cdot\frac{100}{10}=240$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $240\cdot\frac{60}{100}=144$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $240\cdot\frac{45}{100}=108$.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y},\ \text{όταν } x=3^{-2}, y=3^{-3}.$$

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Λύση

(α) Για $x=3^{-2}$, $y=3^{-3}$ έχουμε $\frac{x^3}{y^2}=\frac{\left(3^{-2}\right)^3}{\left(3^{-3}\right)^2}=\frac{3^{-6}}{3^{-6}}=1$, $\frac{x}{y}=\frac{3^{-2}}{3^{-3}}=\frac{3^3}{3^2}=3$ και

$$\frac{81x^2+27y}{y}=\frac{81\cdot\left(3^{-2}\right)^2+27\cdot3^{-3}}{3^{-3}}=\frac{81\cdot3^{-4}+27\cdot3^{-3}}{3^{-3}}=\frac{81\cdot\frac{1}{81}+27\cdot\frac{1}{27}}{3^{-3}}=2\cdot3^3.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y}=\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot3^3+2\cdot3^3=\frac{4}{3}\cdot27+2\cdot27=36+54=90.$$

(β) Ο αριθμός Β γράφεται στη μορφή

$$\mathrm{B}=16^{23}\cdot5^{89}=\left(2^4\right)^{23}\cdot5^{89}=2^{92}\cdot5^{89}=2^3\cdot\left(2^{89}\cdot5^{89}\right)=2^3\cdot\left(2\cdot5\right)^{89}=2^3\cdot10^{89}=8\cdot10^{89}.$$

Επομένως, ο αριθμός Β έχει πρώτο ψηφίο το 8 και ακολουθούν 89 μηδενικά, δηλαδή έχει συνολικά στη δεκαδική του αναπαράσταση 90 ψηφία.

Πρόβλημα 2

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα (ποδόσφαιρο ή μπάσκετ) είναι σε ποσοστό $\left(65+45\right)-20=90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αυτά αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι $24+12=36$, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $36\cdot\frac{100}{10}=360$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $360 \cdot \frac{65}{100} = 234$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $360 \cdot \frac{45}{100} = 162$.

Πρόβλημα 3

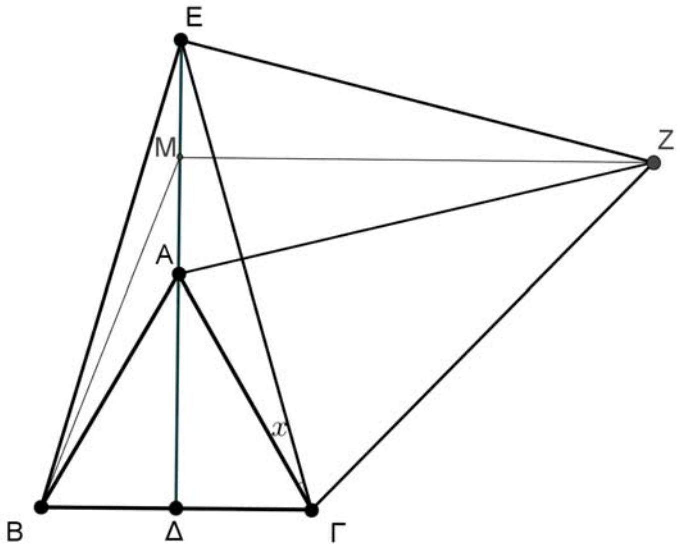
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\text{ΑΕ} = \text{ΑΔ}$. Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\text{ΑΖ} = \text{ΕΓ}$.

(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α.

(iii) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του α.

Λύση



Σχήμα 2

(i) Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΖΑΓ έχουν:

1. $\text{ΒΓ} = \text{ΑΓ}$ (διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο).
2. $\text{ΕΓ} = \text{ΖΓ}$ (διότι το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο).
3. $\text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β} = \text{Ζ}\hat{\Gamma}\text{Α} = 60^o + \hat{x}$, όπου $\hat{x} = \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΖΑΓ είναι ίσα (έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες), οπότε θα έχουν και $\text{ΑΖ} = \text{ΕΓ}$.

(ii) Σημειώνουμε πρώτα ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α, οπότε το ύψος του ΑΔ έχει μήκος $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι $\text{ΑΕ} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $\text{ΕΔ} = \alpha\sqrt{3}$

Έχουμε ότι: $(\text{ΑΓΖΕ}) = (\text{ΑΓΖ}) + (\text{ΖΑΕ}) = (\text{ΕΒΓ}) + (\text{ΖΑΕ})$, αφού λόγω της ισότητας των τριγώνων ΕΒΓ και ΑΓΖ έπεται ότι έχουν και ίσα εμβαδά. Για το τρίγωνο ΕΒΓ θεωρούμε ως βάση το τμήμα $\text{ΒΓ} = \alpha$ με αντίστοιχο ύψος $\text{ΕΔ} = 2 \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}$, οπότε έχει εμβαδό

$$(\text{ΕΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \alpha\sqrt{3} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}.$$

Στο τρίγωνο ZAE θεωρούμε ως βάση το τμήμα $\mathrm{AE} = \mathrm{A\Delta} = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Επειδή το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές ($\mathrm{AZ} = \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{ZE}$) και το M είναι μέσο του τμήματος AE έπεται ότι το ZM είναι ύψος του τριγώνου ZAE που αντιστοιχεί στη βάση AE. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ZAM λαμβάνουμε

$$\mathrm{ZM} = \sqrt{\mathrm{ZA}^2 - \mathrm{AM}^2} = \sqrt{\mathrm{E\Gamma}^2 - \mathrm{AM}^2} = \sqrt{\mathrm{E\Delta}^2 + \mathrm{\Delta\Gamma}^2 - \mathrm{AM}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\alpha\sqrt{3}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{3\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3\alpha^2}{16}} = \frac{7\alpha}{4}.$$

Άρα έχουμε $\left(\mathrm{ZAE}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{7\alpha}{4} = \dfrac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}$, οπότε

$$\left(\mathrm{A\Gamma ZE}\right) = \left(\mathrm{EB\Gamma}\right) + \left(\mathrm{ZAE}\right) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} + \frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16} = \frac{15\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

(iii) Το τετράπλευρο $\mathrm{B\Gamma ZM}$ είναι τραπέζιο ($\mathrm{ZM} \parallel \mathrm{B\Gamma}$, αφού και οι δύο είναι κάθετες προς την ευθεία $\mathrm{\Delta E}$. Βάσεις του τραπεζίου αυτού είναι οι $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$, $\mathrm{ZM} = \dfrac{7\alpha}{4}$ και ύψος το τμήμα

$\mathrm{\Delta M} = \mathrm{\Delta A} + \mathrm{\Delta M} = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\alpha\sqrt{3}}{4}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\left(\mathrm{B\Gamma ZM}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{ZM}\right)\cdot\mathrm{\Delta M} = \frac{1}{2}\cdot\left(\alpha + \frac{7\alpha}{4}\right)\cdot\frac{3\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{33\alpha^2\sqrt{3}}{32}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\left(ax + b\right) \text{ και } Q(x) = a^2x^3 + 4x^2 + dx + e,$$

όπου οι συντελεστές a,b,c,d,e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1) = 21$, να βρείτε τις τιμές των a,b,c,d,e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Από την ισότητα $P(1) = 21$ έχουμε ότι $P(1) = \left(a+b+c\right)\left(a+b\right) = 21$, από την οποία, λόγω της υπόθεσης ότι οι a,b,c είναι θετικοί ακέραιοι, οπότε $a+b+c > a+b$, έπεται ότι

$$\left\{\begin{matrix} a+b+c = 7 \\ a+b = 3 \end{matrix}\right\} \quad (1) \qquad \text{ή} \qquad \left\{\begin{matrix} a+b+c = 21 \\ a+b = 1 \end{matrix}\right\}. \quad (2)$$

Επειδή οι a,b είναι θετικοί ακέραιοι η εξίσωση $a+b=1$ του συστήματος (2) είναι αδύνατη, οπότε και το σύστημα (2) είναι αδύνατο.

Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε $a+b=3$ και $c=4$.

Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\left(ax + b\right) = a^2x^3 + 2abx^2 + \left(b^2 + ac\right)x + bc,$$

οπότε έχουμε

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \left\{a^2 = a^2,\ 2ab = 4,\ b^2 + ac = d,\ bc = e\right\}.$$

Επειδή $c = 4$ και $a+b=3$, τελικά έχουμε τις εξισώσεις:

$$a+b=3,\ ab=2,\ c=4,\ b^2+4a=d,\ 4b=e,\ a,b,c,d,e \text{ θετικοί ακέραιοι,}$$

$$\Leftrightarrow a=1,\ b=2,\ c=4,\ d=8\ e=8 \ \text{ ή } \ a=2,\ b=1,\ c=4,\ d=9\ e=4.$$