Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 1995-1996

1. Να γίνει γινόμενο η παράσταση $A=\left(\nu^2+3\nu+1\right)^2-1.$

2. Να προσδιορίσετε τους επταψήφιους αριθμούς, οι οποίοι είναι τέλεια τετράγωνα και τα τρία πρώτα ψηφία τους, στη σειρά, είναι τα 4, 0 και 0.

3. Έστω $E(\nu)=(-1)^\nu\cdot\nu,$ όπου ο ν παίρνει τιμές 1 2, 3, ..., 1995.

Να υπολογίσετε το άθροισμα: $A=E(1)+E(2)+E(3)+...+E(1995).$

4. Σε μια σκακιέρα 5 x 5 θέλουμε να τοποθετήσουμε πιόνια, ώστε δύο πιόνια να μη βρίσκονται σε γειτονικά τετραγωνάκια (δηλ. τετραγωνάκια με κοινή πλευρά), και επιπλέον σε κάθε τετραγωνάκι είτε να υπάρχει πιόνι είτε να είναι γειτονικό με ένα τετραγωνάκια με πιόνι.

Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο και τον μέγιστο αριθμό από πιόνια που μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σκακιέρα, ώστε να ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις.

Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 1996-1997

1. Έστω $\alpha \neq \pm \beta$ και ισχύει $\frac{5\alpha}{\alpha-\beta}+\frac{3\beta}{\alpha+\beta}=5$. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A=\frac{10\alpha-4\beta}{\alpha+6\beta}$.

2. Να δειχτεί ότι η ακολουθία των αριθμών: 6, 10, 14, 18, ..., (4κ+2), ... δεν περιέχει κανένα τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

3. Σ' έναν κύκλο ακτίνας R είναι εγγεγραμμένα δύο κανονικά πολύγωνα. Το εμβαδό του ενός είναι διπλάσιο του εμβαδού του άλλου.

Να βρεθεί η περίμετρος του μεγαλύτερου.

4. Από τους 18 αριθμούς, 1, 2, 3, ..., 18, επιλέγουμε στη τύχη τέσσερις διαφορετικούς.

Να δειχτεί ότι από αυτούς τους τέσσερις υπάρχουν δύο, έστω οι α και β, με $0<\alpha-\beta\leqslant 5$.

Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 1997-1998

1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να παραστήσουμε τον πρώτο 1997 ως διαφορά δύο τετραγώνων φυσικών αριθμών;

2. Να βρεθεί ο ακέραιος αριθμός κ, ώστε ο αριθμός $A=\dfrac{\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{18+8\sqrt{2}}}{\kappa-2}$ να είναι ακέραιος.

3. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ, αν

$AB=3\sqrt{3}\cdot 2^{\nu-1},\ \ B\Gamma=2^{\nu+2}-2^{\nu+1}+2^{\nu},\ \ A\Gamma=2^{\nu+1}-2^{\nu}+2^{\nu-1},\ \ \nu\in\mathbb{N},\nu\neq 0.$

Να προσδιοριστεί το ν, αν η περίμετρος του ΑΒΓ είναι $3(3+\sqrt{3})$.

4. Έχουμε άπειρα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα και στις κορυφές καθενός τοποθετούμε τους αριθμούς 1, 2, 3. Μπορούμε να τοποθετήσουμε μερικά τρίγωνα, το ένα πάνω στο άλλο, ώστε σε κάθε κορυφή το άθροισμα των αριθμών να είναι 97;

Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 1998-1999

1. Έστω $\alpha=(8^7-9\cdot 8^6+9\cdot 8^5-9\cdot 8^4+9\cdot 8^3-9\cdot 8^2+9\cdot 8-1)^{1000}$ και $\beta=1024^{200}\cdot 625^{1000}$. Να συγκριθούν οι αριθμοί α^2 και β.

2. Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός $A=1^1+2^2+3^3+4^4+...+9^9+10^{10}$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Δ σημείο της ΒΓ και Ι το μέσον της ΑΔ. Η ΒΙ τέμνει την ΑΓ στο Ε και η ΓΙ την ΑΒ στο Ζ.

Από το Δ φέρνουμε ΔΗ//ΑΓ (Η σημείο της ΒΙ) και ΔΘ//ΑΒ (Θ σημείο της ΓΙ).

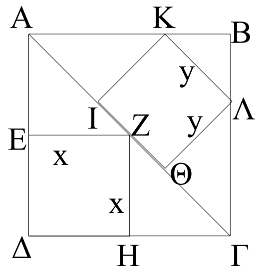
Να δειχτεί ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

4. Να χωρίσετε ένα τετράγωνο με πλευρά 4 σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα τα οποία να έχουν άθροισμα περιμέτρων 25.

Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 1999-2000

1. Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ, ΔΕΖΗ και ΘΙΚΛ είναι τετράγωνα.

Να υπολογιστεί ο λόγος των εμβαδών $\dfrac{(\Delta EZH)}{(\Theta IK\Lambda)}$.



2. Δίνεται η παράσταση $P(x)=(\alpha+\beta)^2x^2-4(\alpha+\beta)x+\gamma^2+4,$ όπου οι αριθμοί α, β, γ είναι ακέραιοι, με $\alpha>0,\ \beta>0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \gamma\geq 0.$

Η παράσταση αυτή παίρνει την τιμή 0 για x=1.

Να βρεθούν οι αριθμοί α, β και γ.

3. α) Να αποδείξετε ότι, αν το τετράγωνο ενός θετικού ακεραίου αριθμού είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός είναι άρτιος.

β) Ο ακέραιος αριθμός α δεν διαιρείται με το 5 και ο αριθμός $A=\alpha^2+2\alpha+3$ είναι άρτιος.

Να βρεθεί το ψηφίο των μονάδων του α.

4. α) Αν $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ με $xy\neq 0,$ να δειχτεί ότι $y\neq 3$ και $x=3+\dfrac{9}{y-3}.$

β) Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y για τους οποίους ισχύει: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}.$

Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2000-2001

1. α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}=\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)-\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}\right).$

β) Να υπολογιστεί το άθροισμα $\Sigma=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{1999\cdot 2000\cdot 2001}.$

2. Για τους αριθμούς α, β, x, y ισχύει $xy-\alpha\beta=1.$

Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+x^2+y^2+\alpha x+\beta y>1.$

3. α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $x^4+4y^4.$

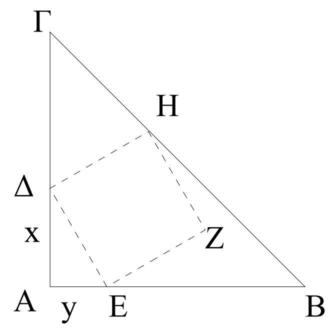
β) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $y\geq 2,$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός x^4+4y^4 είναι σύνθετος.

4. Στο σχήμα έχουμε: (α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

(β) ΑΔ=x, ΑΕ=y, ΑΓ=2x+y

(γ) Το ΔΕΖΗ είναι τετράγωνο με $(\varDelta EZH)=\frac{2}{5}(AB\Gamma).$

Να υπολογίσετε: 1) το λόγο $\frac{x}{y}$ και 2) το λόγο $\frac{(A\varDelta E)}{(AB\Gamma)}.$



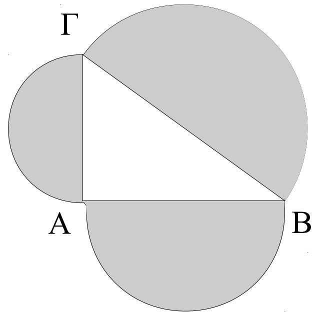
Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2001-2002

1. Να υπολογιστεί η τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A=2002\cdot\left[(-1)^{2001}+(-1)^{2002}\right]^2-[(-2)^{-3}]^2+\frac{1}{64}.$$

2. Στο σχήμα, δίνεται ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο ημικυκλίων με διαμέτρους τις ΑΒ και ΑΔ, ισούται με το εμβαδό του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



3. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $\Pi=(2+\alpha+\alpha^2)^2-\alpha^3$.

4. α. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει ότι: $\left(\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)^2<\frac{\nu}{\nu+1}$.

β. Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2000}{2001}\right)^2<\frac{1}{1001}$.

Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2002-2003

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή των μη αρνητικών ακεραίων αριθμών α, β με α>β, ο αριθμός $\kappa = \frac{(2\alpha+1)^2-(2\beta+1)^2}{4}$ είναι ακέραιος.

Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β για τις οποίες ο κ είναι πρώτος, δηλαδή κ>1 και οι μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του είναι οι αριθμοί 1 και κ.

2. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^o)$ με ΑΒ=ΑΓ=α.

Φέρνουμε ευθεία xAy έτσι ώστε $x\hat{A}\Gamma = 30^o$. Από τα Γ και Β φέρνουμε κάθετες προς την xAy που την τέμνουν στα Δ και Ε, αντίστοιχα.

Να υπολογίσετε το εμβαδό του τραπεζίου ΒΓΔΕ συναρτήσει του α.

3. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z, w ισχύει: $x^2+10y^2+10z^2+9w^2=6(xy+yz+zw)$.

Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τους x και w.

4. Είναι δυνατόν το γινόμενο τριών διαδοχικών θετικών ακεραίων να ισούται με τον κύβο ενός θετικού ακεραίου;

Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2003-2004

1. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \pm 1$ και οι πραγματικοί αριθμοί x, y είναι τέτοιοι ώστε

$$\frac{x+y}{1+\alpha^2}=\frac{1-\alpha^2+\alpha^4}{x^2-xy+y^2}, \qquad \frac{x-y}{1-\alpha^2}=\frac{1+\alpha+\alpha^2}{x^2+xy+y^2}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή του x.

2. Να εξεταστεί, αν υπάρχουν ακέραιοι α, β που να ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(E): \alpha^2+\beta^2=2003.$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=6, ΒΓ=8 και διάμεσο ΑΜ.

Η μεσοκάθετη της διαμέσου ΑΜ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε.

Οι ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ανάλογες των πλευρών ΕΜ, ΜΓ και ΕΓ του τριγώνου ΕΜΓ αντίστοιχα.

Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς ΑΓ.

4. Οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε α>0, β>1 και $\alpha\beta+1=\beta^2+\beta+\alpha$.

Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του α.

Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2004-2005

1. Αν α=1, β=−1 να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$A=\alpha^3+\beta^3+10\alpha-7\beta\sqrt{6}$ και $B=100(2\alpha+\beta)-(8\alpha^3-2)\beta\sqrt{7}$

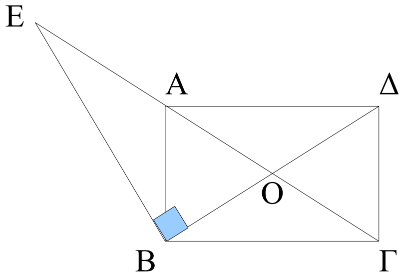
και να βρείτε ποιος από τους αριθμούς A και B είναι μεγαλύτερος .

2. Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΓΔΟ είναι ισόπλευρα πλευράς α.

Η ΒΕ είναι κάθετη προς τη ΒΔ. Να υπολογίσετε:

1) Τη γωνία $A\hat{E}B$.

2) Τα τμήματα ΕΑ, ΕΒ και ΕΔ συναρτήσει του α.



3. Οι αριθμοί α, β είναι ακέραιοι και γνωρίζουμε ότι:

αν το εξαπλάσιο του αριθμού β πολλαπλασιαστεί επί τον αριθμό α+1, προκύπτει αριθμός μικρότερος του 0 και μεγαλύτερος του −10.

Να βρεθούν οι ακέραιοι α και β.

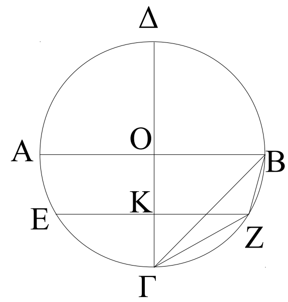
4. Στο σχήμα έχουμε κύκλο (Ο,R) και κάθετες διαμέτρους $AB\perp \Gamma\Delta$.

Η χορδή ΕΖ είναι μεσοκάθετος της ακτίνας ΟΓ.

Να υπολογίσετε:

1) Στο χορδές ΓΖ και ΖΒ συναρτήσει της ακτίνας R.

2) Το εμβαδό του τριγώνου ΒΓΖ συναρτήσει της ακτίνας R.



Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2005-2006

1. Να λυθεί η εξίσωση (E): $x+2x+3x+...+100x=2^2\cdot 5^3\cdot 101$.

2. Δίνονται τα κλάσματα: $K=\dfrac{33.333.333.331}{33.333.333.334}$ και $\Lambda=\dfrac{22.222.222.221}{22.222.222.223}$.

Ποιο είναι μεγαλύτερο και γιατί;

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, όπου ΑΔ=α, ΒΓ=β, ΑΒ=α+β και η πλευρά ΑΒ είναι κάθετος προς τις πλευρές ΒΓ και ΑΔ.

Να υπολογιστεί η απόσταση της κορυφής Α από το μέσον της πλευράς ΓΔ συναρτήσει των α και β.

4. Αν οι αριθμοί α, β, γ, δ και ε είναι διαφορετικοί και καθένας παίρνει μια από τις τιμές 1, 2, 3, 4 και 5, είναι δυνατόν να έχουμε τη σχέση

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\delta)(\delta+\varepsilon)(\varepsilon+\alpha)=(\alpha+\gamma)(\gamma+\varepsilon)(\varepsilon+\beta)(\beta+\delta)(\delta+\alpha);$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνεται ο αριθμός $\mathrm{A}=2^{92}\cdot 5^{90}\cdot 3^{4}\cdot 7^{2}$. Να βρείτε σε πόσα μηδενικά λήγει ο Α και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του.

2. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς x, y, z που είναι τέτοιοι ώστε:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{6}{z}.$$

3. Έστω Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=6. Αν είναι $\mathrm{MK}\perp\mathrm{AB}$, $\mathrm{M\Lambda}\perp\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{K_1\Lambda_1}$ είναι η προβολή του ΚΛ στη ΒΓ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $\mathrm{KK_1\Lambda_1\Lambda}$.

4. Οι 15 μαθητές μιας τάξης έχουν συνολικά στις τσάντες τους 115 τετράδια. Αν κάθε μαθητής έχει ένα τουλάχιστον τετράδιο, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008
Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $12b+26a=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{5}{12}-\left(24b+52a\right)^{-2}-\left(72b+156a\right)^{-1}.$$

Πρόβλημα 2

Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα.

Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Πρόβλημα 3

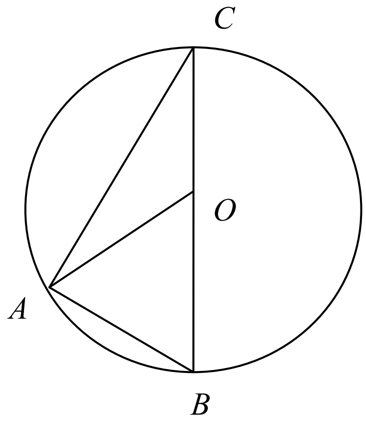
Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και επιπλέον $AB=2\sqrt{7}$ και $AC=6$.

α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ABC που αντιστοιχούν στην πλευρά BC.

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC, να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E}>\frac{2}{3}.$$



Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $\mathrm{A}=abc$, όπου a,b,c ψηφία με $a>0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396. Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 ο αριθμός που προκύπτει ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να προσδιορίσετε τον αριθμό Α.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a+2b=\frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^{4}\right]^{3}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x+2y}{x-2y}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο Κ, έτσι ώστε να είναι $\mathrm{AK}>\mathrm{KB}$. Έστω Μ το συμμετρικό του Β, ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Έστω ο ακέραιος

$$\mathrm{A}=\left[\left(-1\right)^{\nu}+\left(-1\right)^{2\nu}+\left(-1\right)^{3\nu}+\left(-1\right)^{4\nu}\right]\cdot\nu,\ \text{όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο Α είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N=\overline{ab}=10a+b$, όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

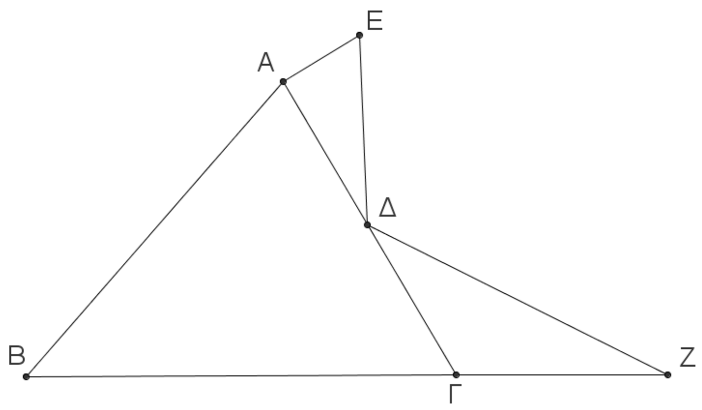
$$S=1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2+\cdots+997^2-998^2-999^2+1000^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $\mathrm{A\Gamma}=\beta$ του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=90^\circ$, η ευθεία ΔΕ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΓ , $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z}=\theta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta=30^0$.

(i) Να βρείτε τη γωνία θ. *Μονάδες 1*

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ συναρτήσει του β. *Μονάδες 4*



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1.$$

Μονάδες 2

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-20,$$

για $\beta=-\frac{1}{3}$.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2
Οι ακέραιοι α,β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha\le 10,\ \ \beta\ge 12\ \text{ και }\left(\alpha-12\right)\cdot\left(40-2\beta\right)\le 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη της παράστασης $\mathrm{A}=3\alpha-2\beta$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε έχει ακτίνα 4 cm.

(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές. ***Μονάδες 1***
(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου. ***Μονάδες 2***
(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΒΓΔΕ και εσωτερικά του κύκλου C. ***Μονάδες 2***

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $\mathrm{A}-\mathrm{B}=198$, όπου $\mathrm{B}=\overline{\gamma\beta\alpha}=100\gamma+10\beta+\alpha$.

(ii) Η εξίσωση $\dfrac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\dfrac{\alpha-2\gamma}{x}=1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 9.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{\alpha}{\beta^2}+237\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{4\beta^2}\right)^3+\frac{9\alpha-20\beta^2}{\beta^2},$$

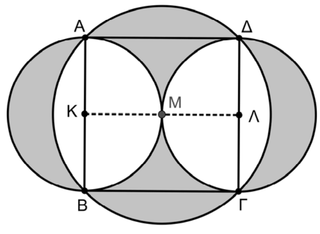
αν δίνεται ότι $\alpha=\beta=2^{-3}$. ***Μονάδες 2***

(β) Αν τα ποσά x,y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y}=\alpha>0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{K}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x,y και ισχύει ότι $\mathrm{K}\leq 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση K παίρνει τη μέγιστη τιμή της. ***Μονάδες 3***

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K,Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M. Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $\mathrm{K}\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta$. Να υπολογιστεί συναρτήσει του R, το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x)=\left(\alpha x^2+\beta x\right)\left(\gamma x^2+\delta\right)+4,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ