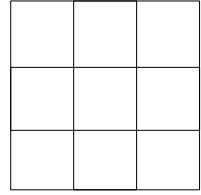


Θαλής Γ' Γυμνασίου 1995-1996

1. Δύο μαθητές  $A, B$  χρησιμοποιούν ένα πίνακα  $3 \times 3$ , όπως στο σχήμα, για να παίξουν "τρίλιζα".



Καθένας γράφει σ' ένα τετραγωνάκι της επιλογής του ένα σταυρό ή έναν κύκλο.

(Και οι δύο έχουν δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν και το σταυρό και τον κύκλο, όποιο θέλουν σε κάθε τους κίνηση ανεξάρτητα με τι χρησιμοποίησαν νωρίτερα.)

Θα νικήσει αυτός, ο οποίος πρώτος γράφει ένα σύμβολο που είναι το ίδιο στα τρία τετράγωνα μιας γραμμής ή μιας στήλης ή μιας διαγωνίου του πίνακα.

Για ποιον παίκτη υπάρχει σίγουρη στρατηγική να κερδίσει; Γιατί;

2. Να βρεθεί το πλήθος των αριθμών του συνόλου  $A = \{1, 11, 111, 1111, \dots, \underbrace{11\dots1}_{1995\text{ψηφία}}\}$ , οι οποίοι είναι πολλαπλάσια του 7.

3. Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με εμβαδό 2. Για τα μήκη των πλευρών του  $AB\Gamma$  ισχύει:  $a \geq \beta \geq \gamma$ .  
Να δειχτεί ότι  $\beta \geq 2$ . Πότε ισχύει το ίσον;

4. Να υπολογιστούν οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  για τους οποίους ισχύει:  
 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0$ .

Θαλής Γ' Γυμνασίου 1996-1997

1. Έστω  $A = \sqrt{\sqrt{81} + 3\sqrt{8} : \sqrt{2} + 8\sqrt{3}} : \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$ .

Να υπολογιστεί η τιμή του  $B = 3(-1)^A + 2(-1)^{A+1}$ .

2. Έστω  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμο και από την κορυφή  $A$  παίρνουμε μια τυχαία ευθεία που τέμνει την  $\Gamma B$  στο  $E$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε μια ευθεία παράλληλη προς την  $AE$  και επ' αυτής παίρνουμε ένα σημείο  $Z$ .

Να δειχτεί ότι το παραλληλόγραμμο με πλευρές  $AE$  και  $AZ$  έχει εμβαδό ίσο με το εμβαδό του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .

3. Να δειχτεί ότι δεν υπάρχει ακέραιος  $n$  που να ικανοποιεί τη σχέση:

$$n(n-1) + (n-1)(n+1) + n(n+1) + 3n^5 = 3.000.000.$$

4. Η Άννα έχει 48 σπίρτα και τα χώρισε σε 3 σωρούς.

Μετά πήρε τόσα σπίρτα από τον πρώτο σωρό όσα υπήρχαν στον δεύτερο και τα έβαλε στον δεύτερο.

Κατόπιν πήρε τόσα σπίρτα από τον δεύτερο σωρό όσα υπήρχαν στον τρίτο και τα έβαλε στον τρίτο.

Τέλος πήρε τόσα σπίρτα από τον τρίτο σωρό όσα υπήρχαν στον πρώτο και τα έβαλε στον πρώτο.

Τότε παρατήρησε ότι οι τρεις σωροί είχαν ίσο αριθμό σπίρτων.

Πόσα σπίρτα είχε αρχικά ο κάθε σωρός;

Θαλής Γ' Γυμνασίου 1997-1998

1. Για τους μη μηδενικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, x, y$  ισχύει  $\alpha x = \beta y$ .

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης  $A = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ .

2. Έστω  $ΑΒΓΔΕΖΗΘ$  κύβος με ακμή  $\alpha$ .

Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας  $ΓΑΖΘ$ .

3. Έστω τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με μήκη πλευρών  $\alpha = 26^{400}$ ,  $\beta = 82^{300}$  και  $\gamma$  μικρότερος από το μεγαλύτερο των  $\alpha, \beta$ .

Να προσδιοριστεί το  $\gamma$ , ώστε το τρίγωνο  $ΑΒΓ$  να είναι ορθογώνιο.

4. Στο τέλος του Β' Παγκόσμιου Πολέμου σε ένα στρατόπεδο βρίσκονται 1997 αιχμάλωτοι: 998 Ιταλοί και 999 Γερμανοί. Ο διοικητής του στρατοπέδου αποφασίζει να απελευθερώσει σταδιακά τους κρατούμενους, εκτός από έναν τον οποίο θα κρατήσει για λίγο καιρό ακόμα στο στρατόπεδο.

Η διαδικασία απόλυσης των κρατουμένων είναι η εξής:

Επιλέγονται τυχαία τρεις κρατούμενοι και φεύγουν οι δύο.

Αν και οι τρεις είναι της ίδιας εθνικότητας, ο ένας από αυτούς επιστρέφει, ενώ αν είναι διαφορετικής εθνικότητας επιστρέφει αυτός που έχει διαφορετική εθνικότητα από τους άλλους δύο.

Ποιας εθνικότητας θα είναι ο "άτυχος" κρατούμενος;

Θαλής Γ' Γυμνασίου 1998-1999

1. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαιρείται σε 4 μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με δύο ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του. Τα τρία απ' αυτά τα τέσσερα ορθογώνια έχουν εμβαδά 10, 18, 25 cm<sup>2</sup> αντίστοιχα.

Να βρεθεί το εμβαδό του τέταρτου ορθογωνίου.

2. Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός  $A = \frac{333334 \cdot 666663 \cdot 333331 + 333327}{333333^2}$  είναι ακέραιος και να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

3. Διαθέτουμε 1 κόκκινο, 2 μαύρους και 3 πράσινους βόλους.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τις τοποθετήσουμε σε 6 τρύπες που βρίσκονται σε ευθεία γραμμή και ισαπέχουν;

4. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γραφεί ο αριθμός 105 ως άθροισμα τουλάχιστον δύο θετικών διαδοχικών ακεραίων;

Θαλής Γ' Γυμνασίου 1999-2000

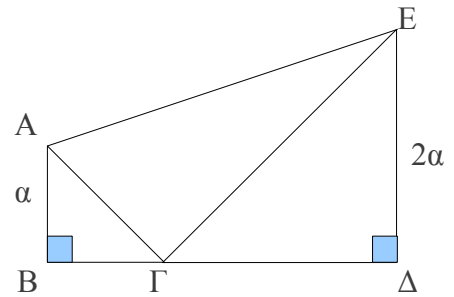
1. Στο σχήμα έχουμε:

α)  $AB \parallel E\Delta$

β)  $\hat{B} = 90^\circ$

γ)  $\hat{BAG} = \hat{GED} = 45^\circ$

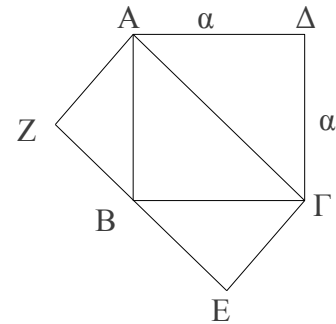
δ)  $AB = \alpha$ ,  $\Delta E = 2\alpha$ .



Να υπολογιστεί το μήκος του ΑΕ.

2. Στο διπλανό σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο και το  $A\Gamma E Z$  ορθογώνιο.

Να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A\Gamma E Z)}$ .



3. Έστω  $A = \frac{(-2)^n}{2^{n^2}}$ ,  $B = \frac{(-2)^n}{2^{n^2+3}}$ , όπου  $n$  είναι θετικός ακέραιος.

Να βρεθεί ποιος από τους αριθμούς  $A$ ,  $B$  είναι μεγαλύτερος.

4. Να βρείτε πόσοι από τους αριθμούς  $1, 2, 3, \dots, 1999$  δε διαιρούνται ούτε με το  $5$  ούτε με το  $7$ .

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = (-5)^2 - (-2)^{-3} : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^{1000}$$

$$B = [(-5)^2 - (-2)^3 - 1] : \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{35}{24} \right]$$

Να βρείτε τους αριθμούς  $A$ ,  $B$  και να συγκρίνετε τους αριθμούς  $\frac{A}{B}$ ,  $\frac{25B}{23A}$ .

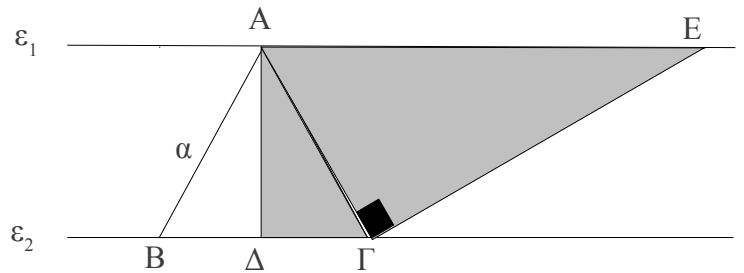
2. Στο σχήμα δίνονται

- $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$
- το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο πλευράς  $\alpha$
- $GE \perp AG$  και  $A\Delta \perp B\Gamma$
- $AE = 2\alpha$ .

Να βρείτε:

α) Το λόγο  $\frac{GE}{AD}$ .

β) Το εμβαδό του τραπεζίου  $A\Delta GE$ .



3. Ο θετικός ακέραιος  $\alpha$  είναι άρτιος και όταν διαιρείται με το 7 δίνει υπόλοιπο 2.

Να βρεθεί ο αριθμός  $\alpha$ , αν είναι μεταξύ των αριθμών 512 και 521.

4. Σε μια Βαλκανική συνάντηση Νέων συμμετείχαν 199 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες.

Να αποδείξετε ότι μία τουλάχιστον χώρα είχε στην αποστολή της 12 τουλάχιστον παιδιά του ίδιου φύλου.

1. Αν  $n$  θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = [(-1)^{2n} + (-1)^{2n+1}] \cdot (3^{12} + 2^{10}),$$

$$B = (-2)^{-3} : (-2)^{-1} + \frac{(-3)^{-2} - (-2)^{-4}}{(-4)^{-2}}$$

2. Τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει πλευρές  $AB=\lambda$ ,  $A\Gamma=\lambda+2$ ,  $B\Gamma=10$  και ισχύει:

$$(\lambda+2)^2 - \lambda^2 = 28.$$

Να δειχτεί ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με  $\hat{A}=90^\circ$ .

3. Στο εσωτερικό τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $a$  κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο  $ABE$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $B\Gamma E$  είναι ίσα.

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων  $\Gamma\Delta E$ ,  $A\Delta E$  και  $A\Gamma E$ .

4. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8.$$

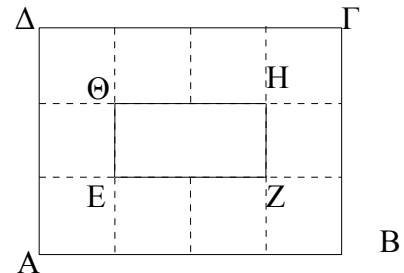
Για ποιες τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή της παράστασης  $A$ ;

1. Αν  $\alpha = -\frac{3}{2}$  και  $\beta = 3$  να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \alpha^3 - (1 + \alpha)^{-2} + 4 \left( \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2} \right)^{-1} + \left[ \left( \frac{\beta}{\alpha} - 2004 \right)^{2004} \right]^0.$$

2. Στο σχήμα υπάρχουν 10 ίσα τετράγωνα μεταξύ των ορθογωνίων  $AB\Gamma\Delta$  και  $EZH\Theta$ .

Να υπολογίσετε την πλευρά των τετραγώνων, αν είναι γνωστό ότι το άθροισμα των εμβαδών τους ισούται αριθμητικά με το άθροισμα των περιμέτρων των ορθογωνίων  $AB\Gamma\Delta$  και  $EZH\Theta$ .



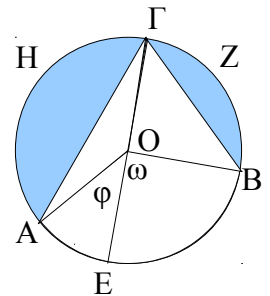
3. Σε μια διοργάνωση σκακιού μέσω διαδικτύου συμμετείχαν 1119 αγόρια και κορίτσια. Το πρώτο κορίτσι έπαιξε με 20 αγόρια, το δεύτερο κορίτσι έπαιξε με 21 αγόρια, το τρίτο κορίτσι έπαιξε με 22 αγόρια κ.ο.κ. μέχρι το τελευταίο κορίτσι που έπαιξε με όλα τα αγόρια.

Να βρείτε πόσα ήταν τα αγόρια και πόσα ήταν τα κορίτσια.

4. Στο σχήμα η  $\Gamma E$  είναι διάμετρος του κύκλου  $(O, R)$ , η γωνία  $\Gamma \hat{O} B = \omega$  είναι τριπλάσια της γωνίας  $A \hat{O} E = \varphi$  και το εμβαδό του κυκλικού τομέα  $OAEB$  ισούται με  $\frac{1}{3} \pi R^2$ .

α) Να βρείτε τις γωνίες  $\omega, \varphi$ .

β) Να βρείτε το λόγο  $\frac{E_{\kappa.τ.}(BZ\Gamma)}{E_{\kappa.τ.}(AH\Gamma)}$  των εμβαδών των κυκλικών τομέων  $BZ\Gamma$  και  $AH\Gamma$ .





1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2003 - \frac{6 - 10x + 2(4x - y - 3)}{3(x - z) + 3(y + z)} - 2\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2y$$

αν  $x + y = 2003$ .

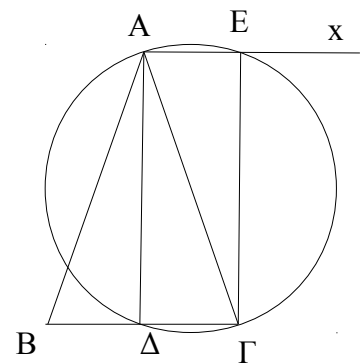
2. Οι αριθμοί  $x$  και  $y$  είναι ανάλογοι προς τον αριθμητή και τον παρονομαστή, αντίστοιχα, του κλάσματος που προκύπτει από τη μετατροπή σε κλασματική μορφή του δεκαδικού

αριθμού  $a = 4,333\dots$ . Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $B = \frac{6x - 5y}{6x + 5y} - \frac{21}{31}$ .

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Με διάμετρο την πλευρά  $A\Gamma$  γράφουμε κύκλο που τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ . Φέρνουμε ακόμα την  $A\chi \perp A\Delta$  που τέμνει τον κύκλο στο  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι το  $A\Delta$  είναι ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

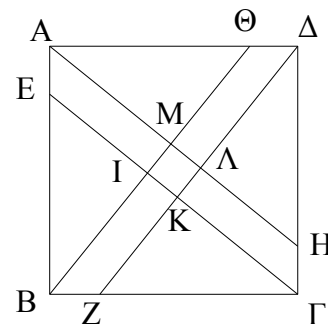
β) Να συγκρίνετε το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$  προς το εμβαδό του τετραπλεύρου  $A\Delta\Gamma E$ .



4. Στο σχήμα το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  έχει πλευρά  $AB = 4a$  και  $AE = BZ = \Gamma H = \Delta\Theta = a$ . Το τετράπλευρο  $IK\Lambda M$  είναι τετράγωνο. Να υπολογίσετε:

1) Την  $AH$  ως συνάρτηση του  $a$ .

2) Το εμβαδό του τετραγώνου  $IK\Lambda M$  ως συνάρτηση του  $a$ .





**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**65<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2004**

**Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

1. Δίνονται οι παραστάσεις  $A = \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 5^2 - 3^2 + x}{\left[1 - (-1)^{2005}\right]^0}$ ,  $B = \frac{\left[(-2)^3 + (-1)^3\right]}{9} + \frac{x}{2}$

Αν είναι  $A = 6B$ , να προσδιορίσετε την τιμή του  $x$ .

*Μονάδες 5*

2. Στο διπλανό σχήμα το σημείο  $M$  είναι μέσον της πλευράς  $B\Gamma$  και η μεσοκάθετη της  $B\Gamma$  τέμνει τη  $ΑΓ$  στο  $\Lambda$ .

Επίσης δίνονται:

$$\widehat{M\Lambda\Gamma} = 45^\circ, \widehat{A\Lambda B} = 30^\circ, \Lambda\Gamma = \kappa.$$

Να βρείτε :

- (α) τις γωνίες  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $ΑΒΓ$ .

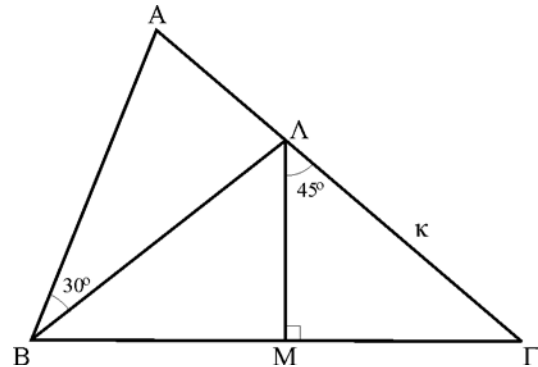
*(Μονάδες 2)*

- (β) τις πλευρές  $ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ$  συναρτήσει του  $\kappa$ .

*(Μονάδες 2)*

- (γ) το εμβαδόν του τριγώνου  $ΑΒΓ$ .

*(Μονάδες 1)*



3. Μία εταιρεία χρησιμοποίησε 20 εργάτες επί 6 μήνες, εργαζόμενους 8 ώρες το 24ωρο, για να τελειώσει το μισό ενός έργου. Επειδή το υπόλοιπο του έργου πρέπει να τελειώσει σε 2 μήνες η εταιρεία αποφάσισε να προσλάβει και άλλους εργάτες, της ίδιας απόδοσης ανά ώρα, οι οποίοι θα δουλεύουν δεύτερη βάρδια επί 10 ώρες το 24ωρο, ενώ οι υπάρχοντες εργάτες θα δουλεύουν όπως και πριν. Πόσους επιπλέον εργάτες πρέπει να προσλάβει η εταιρεία ώστε να τελειώσει το έργο ακριβώς σε δύο μήνες;

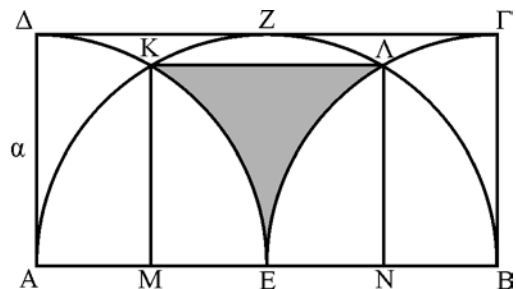
*Μονάδες 5*

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο  $ΑΒΓΔ$  με  $ΑΒ=2ΑΔ=2α$ , τα μέσα  $E$  και  $Z$  των  $ΑΒ$  και  $ΓΔ$ , αντίστοιχα, και οι τρεις κύκλοι με κέντρα  $A, E$  και  $B$  και ακτίνας  $\alpha$ , που τέμνονται μέσα στο ορθογώνιο  $ΑΒΓΔ$  στα σημεία  $K$  και  $\Lambda$ . Να βρείτε :

- (α) το εμβαδόν του τριγώνου  $ΚΑΕ$  *(Μονάδες 1)*

- (β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $ΚΛΝΜ$ , όπου  $M$  μέσον της  $ΑΕ$  και  $N$  μέσον της  $ΕΒ$  *(Μονάδες 1)*

- (γ) το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου γραμμοσκιασμένου τριγώνου  $ΕΚΛ$ . *(Μονάδες 3)*



Θαλής Γ' Γυμνασίου 2005-2006

1. Έστω  $a = \beta + 2005$ . Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = -3 [2(a+2\beta) - 2(3\beta-2a) - 4\beta] + 19(a-\beta).$$

2. Να βρείτε το μικρότερο θετικό πολλαπλάσιο του 2005, το οποίο διαιρούμενο δια του 2001 αφήνει υπόλοιπο 12.

3. Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ρητός αριθμός του οποίου το 33% καθώς και το 15% είναι ακέραιος.

4. Είναι δυνατόν να υπάρχουν στο εσωτερικό ενός κυρτού τετραπλεύρου δύο διαφορετικά σημεία από τα οποία όλες οι πλευρές του τετραπλεύρου να φαίνονται από ίσες γωνίες;

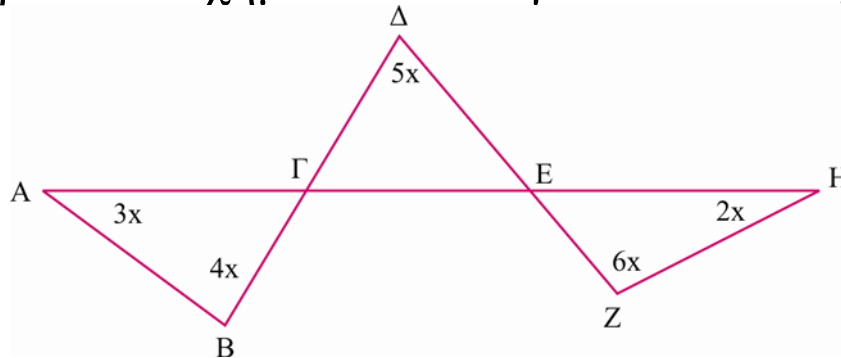
Δικαιολογείστε την απάντησή σας.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
67<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ' τάξη Γυμνασίου

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το  $x$  σε μοίρες



2. Αν  $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$  και  $\alpha\beta\gamma=10$ , τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^2 \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2$$

3. Αν  $p$  είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $27p + 1$  είναι σύνθετος.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  διάφοροι του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$\frac{3}{2} \alpha \beta^{-1} + \frac{10}{3} \alpha^{-1} \beta = 3.$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007  
Γ΄ τάξη Γυμνασίου

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

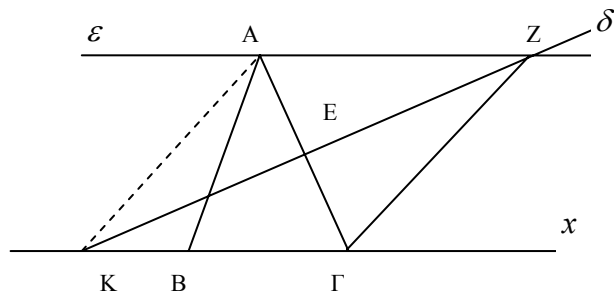
$$A = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4, \quad B = -(x-3) - 3(y-4) - [x(y-2) - y(x+3)].$$

Για ποιες τιμές του  $x$  αληθεύει η ανίσωση:  $A > B$ .

**Πρόβλημα 2**

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$  και  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 40^\circ$ . Η ευθεία  $\varepsilon$  είναι παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$  και η ευθεία  $\delta$  είναι μεσοκάθετη της πλευράς  $A\Gamma$ .

- (α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $Z\hat{\Gamma}x$ ,  
(β) Να αποδείξετε ότι  $KA = AZ$ .



**Πρόβλημα 3**

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο  $\Sigma = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ .

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής  $A = aaabb$ , όπου  $a, b$  ψηφία με  $a \neq 0$ , ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

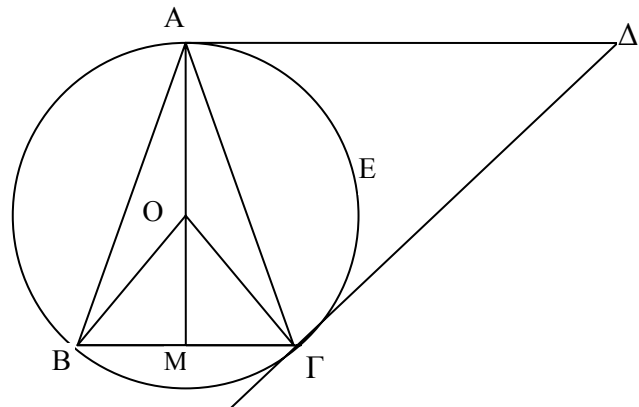
**Πρόβλημα 4**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$ . Η  $A\Delta$  είναι παράλληλη προς τη  $B\Gamma$  και η  $\Gamma\Delta$  είναι κάθετη προς την  $O\Gamma$ .

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα  $OAE\Gamma$  συναρτήσει της πλευράς  $B\Gamma = a$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  συναρτήσει της πλευράς  $B\Gamma = a$ .

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές.





**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**69<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008**

**Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

1. Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{[1 - (-1)^{2009}]^0}$ ,  $B = \frac{[(-2)^2 + (-1)^2]^2}{5} + \frac{x}{2}$ .

Αν είναι  $A = B$ , να προσδιορίσετε την τιμή του  $x$ .

**Μονάδες 5**

2. Το σημείο  $A(-\lambda + 2, 4\lambda - 1)$ , όπου  $\lambda$  θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων  $Oxy$ . Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος  $\lambda$ ,

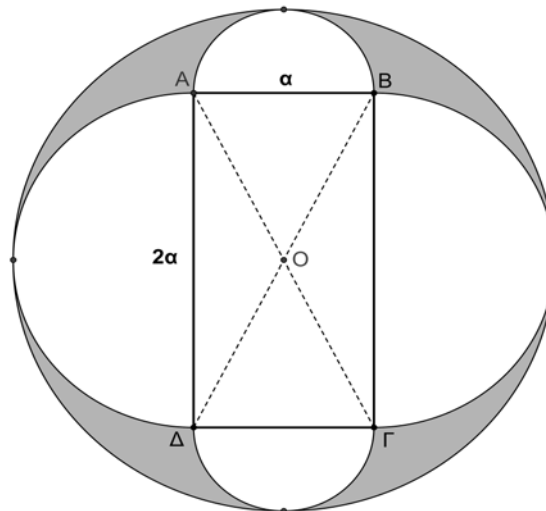
(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος  $OA$  και

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $OBA\Gamma$ , όπου  $B, \Gamma$  είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο  $A$  στους θετικούς ημιάξονες  $Ox$  και  $Oy$ , αντίστοιχα.

**Μονάδες 5**

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με πλευρές  $AB = \alpha$ ,  $A\Delta = 2\alpha$  και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής  $O$  των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του  $\alpha$  το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

**Μονάδες 5**



4. Αν ισχύει  $\frac{45^v \cdot 2^{2v}}{6^v} = 900$ , όπου  $v$  θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 2003 \cdot (-1)^v - (-1)^{v+1} + 4 \cdot (-1)^{v+2}.$$

**Μονάδες 5**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
70<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

Αν  $v$  είναι φυσικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 4 \cdot (-1)^v + 2 \cdot \frac{(-1)^{2v+1}}{5} - 7 \cdot \frac{(-1)^{3v}}{5}.$$

*Μονάδες 5*

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Ο θετικός ακέραιος  $\alpha$  είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού  $\alpha$ .

*Μονάδες 5*

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται δυο ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία  $\varepsilon_1$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλη προς την ευθεία  $(\eta) : y = 2x$  και διέρχεται από το σημείο  $\Gamma(0,6)$ .

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή του συστήματος ορθογωνίων αξόνων Οxy, Α είναι το κοινό σημείο των ευθειών  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  και Β είναι το σημείο όπου η ευθεία  $\varepsilon_2$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ .

*Μονάδες 5*

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες  $r_1, r_2, r_3$  με  $0 < r_1 < r_2 < r_3$ . Έστω  $\Delta_1$  ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες  $r_1, r_2$ , και  $\Delta_2$  ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες  $r_2, r_3$ . Αν είναι

$r_2 - r_1 = r_3 - r_2$  και  $r_3 = 3r_1$ , να βρείτε το λόγο  $\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)}$ , όπου  $E(\Delta_1)$  και  $E(\Delta_2)$  είναι τα

εμβαδά των κυκλικών δακτυλίων  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$ , αντίστοιχα.

*Μονάδες 5*

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**71<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010**

**Γ' Γυμνασίου**

1. Αν  $x + y = 3 \cdot (-2)^2$  και  $y - w = \left[ \left( -\frac{3}{5} \right)^4 \right]^6 \cdot \left[ \left( -\frac{3}{5} \right)^6 \right]^{-4}$ , να βρεθεί η τιμή της παράστασης:  
 $A = 7x + 10y - 3w - 87$ .

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

- (α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
- (β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
- (γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5,
- (δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 120^\circ$ . Στο εσωτερικό της γωνίας  $A$  φέρουμε ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  κάθετες στις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$ , αντίστοιχα που τέμνουν την πλευρά  $B\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$ , αντίστοιχα. Αν  $\hat{A\Delta B} = 120^\circ$ ,  $\hat{A\hat{E}\Delta} = 60^\circ$  και το ύψος  $AH$  έχει μήκος  $2\sqrt{3}$  μονάδες μήκους, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισόπλευρο.
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.
- γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$ .

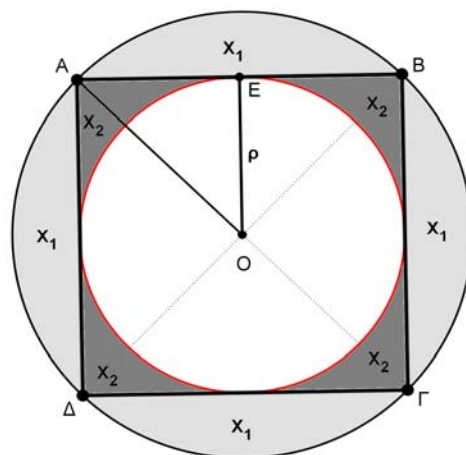
4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  έχει πλευρά  $2\rho$ . Ονομάζουμε  $X_1$  το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου  $C(O, OA)$  που ορίζονται από τις χορδές  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  και  $\Delta A$ . Επίσης ονομάζουμε  $X_2$  το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$  και εσωτερικά του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου  $\Delta(O, \rho, OA)$  που ορίζεται από τους κύκλους  $C(O, \rho)$  και  $C(O, OA)$ .

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά  $E(X_1)$  και  $E(X_2)$  των χωρίων  $X_1$  και  $X_2$ , αντίστοιχα, έχουν λόγο  $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$

μεγαλύτερο του  $\frac{13}{5}$ .

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα  $x$  του κύκλου  $C(O, x)$  που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο  $\Delta(O, \rho, OA)$  σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



**Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**





ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
72<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
19 Νοεμβρίου 2011

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Αν  $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$ ,  $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$  και  $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$  να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( \frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

**Πρόβλημα 2**

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

**Πρόβλημα 3**

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  δίνεται ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση  $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$ , όπου  $\lambda, \mu$  πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία  $(\delta)$  με εξίσωση  $y = 2\lambda x$  και περνάει από το σημείο  $K(2, 8)$ .

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\lambda$  και  $\mu$ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία  $\Lambda(-4, -4)$  και  $M(-1, 2)$  ανήκουν στην ευθεία  $(\varepsilon)$  και να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $K\Lambda$ .

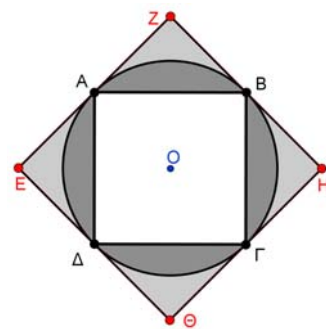
**Πρόβλημα 4**

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα  $AB\Gamma\Delta$  και  $EZH\Theta$  είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο  $EZH\Theta$  έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου  $C(O, \rho)$  στα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$ .

(α) Να βρείτε το άθροισμα  $\Sigma_1$  των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$  και εξωτερικά του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .

(β) Να βρείτε το άθροισμα  $\Sigma_2$  των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου  $EZH\Theta$  και εξωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$ .

(γ) Να αποδείξετε ότι  $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$ . (Θεωρείστε ότι  $\pi = 3,1415$ ).



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
73<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1}}, \text{ αν είναι } x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6},$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

**Πρόβλημα 2**

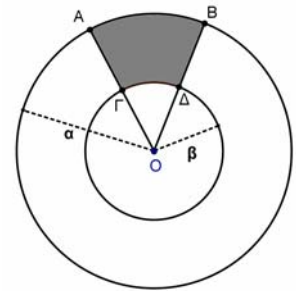
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$  οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x - 5\alpha + 2 < \alpha(x - 3) + 2(\alpha - 1).$$

**Πρόβλημα 3**

Αν το εμβαδόν  $E$  του χωρίου  $AB\Delta\Gamma$  του διπλανού σχήματος ισούται με το  $\frac{1}{12}$  του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους  $(O, \alpha)$  και  $(O, \beta)$ ,  $0 < \beta < \alpha$ , να βρείτε τη γωνία  $\omega = \hat{A}OB$  και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma = \left( 2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega \right)^3.$$



**Πρόβλημα 4**

Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A\Delta = \alpha$  cm και  $AB < A\Delta$ . Η κάθετη από την κορυφή  $B$  προς τη διαγώνιο  $A\Gamma$  την τέμνει στο σημείο  $E$ . Αν ισχύει ότι  $E\Gamma = 2 \cdot AE$ , να βρείτε:

- (i) το μήκος της πλευράς  $AB$ .
- (ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
74<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Αν ο πραγματικός αριθμός  $\alpha$  είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού  $\sqrt{5}$ , να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

**Πρόβλημα 2**

Αν ο θετικός ακέραιος  $\beta$  ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο  $x$  την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta}.$$

**Πρόβλημα 3**

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς  $\chi O \psi$  μια ευθεία  $(\varepsilon)$  σχηματίζει με τον άξονα  $\chi' \chi$  γωνία  $45^\circ$  και επίσης διέρχεται από το σημείο  $M(2, -6)$ . Το σημείο  $A$  ανήκει στον άξονα  $\chi' \chi$  και στην ευθεία  $(\varepsilon)$ , ενώ το σημείο  $B$  ανήκει στον άξονα  $\psi' \psi$  και στην ευθεία  $(\varepsilon)$ .

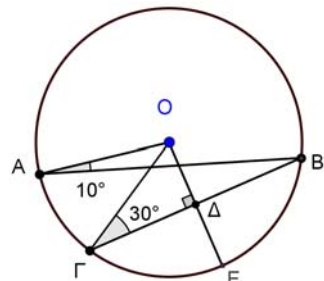
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$ .

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $A$ ,  $B$  και το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$ .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $OAM$ .

**Πρόβλημα 4**

Σε κύκλο  $c(O, R)$  (κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$ ) δίνονται σημεία  $A$ ,  $\Gamma$  και  $B$  τέτοια ώστε  $\widehat{OAB} = 10^\circ$  και  $\widehat{O\Gamma B} = 30^\circ$ . Τα σημεία  $A$  και  $\Gamma$  βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία  $OB$ . Από το σημείο  $O$  φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή  $\Gamma B$  που την τέμνει στο σημείο  $\Delta$ , ενώ τέμνει τον κύκλο  $c(O, R)$  στο σημείο  $E$ .



(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας  $\widehat{AB\Gamma}$  και το μέτρο του τόξου  $\widehat{A\Gamma}$  σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $OB\Gamma E$  είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!