Θαλής Γ' Λυκείου 1995-1996

1. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$\Pi(x, y) = xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

με $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

2. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε x $\in \mathbb{R}$ να ισχύει ότι:

$$f(x - 2) + f(x + 2) = \sqrt{3}\, f(x).$$

Να δείξετε ότι η f είναι περιοδική.

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ε μια ευθεία που περνάει από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου και τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι $\frac{AK}{KB} \geq 4\frac{\Gamma\Lambda}{A\Lambda}$.

4. Έστω Α ένα σύνολο ν ακεραίων αριθμών. Από το σύνολο αυτό κατασκευάζουμε όλες τις δυνατές παραστάσεις παίρνοντας ένα ορισμένο πλήθος αριθμών και προσθαφερώντας τους μεταξύ τους. Π.χ. αν $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \alpha_{i_4} \in$ Α τότε μια δυνατή παράσταση είναι η

$\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} - \alpha_{i_3} + \alpha_{i_4}$ ή $-\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} + \alpha_{i_4}$.

Δύο διαφορετικές παραστάσεις ανεξάρτητα από το αποτέλεσμά τους θα θεωρούνται διακεκριμένες.

Να υπολογιστεί το πλήθος των δυνατών παραστάσεων.

Θαλής Γ' Λυκείου 1996-1997

1. Έστω A ένας μη μηδενικός $\nu\times\nu$ πίνακας. Δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικός $\nu\times\nu$ πίνακας B με $(AB)^2 = (AB)$.

2. Δίνεται ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ικανοποιεί τη συνθήκη

$$999\mathrm{f}(\pi - x) + 998\mathrm{f}(x-\pi) = 1996\,\text{συν}x\,.$$

Δείξτε ότι ικανοποιεί και την

$$f^2(\pi + x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(\frac{1996}{1997}\right)^2.$$

3. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ της προέκτασης της ΑΓ ώστε ΑΓ = ΒΖ = ΔΖ. Αν Ε το συμμετρικό του Ζ ως προς το Γ, να υπολογιστεί η γωνία ΓΒΕ.

4. Δίνονται στο επίπεδο $m+n$ σημεία μη συνευθειακά ανά τρία, όπου m, n μεγαλύτερα ή ίσα του 3. Τα m σημεία είναι χρωματισμένα κόκκινα και n είναι χρωματισμένα μπλε.

α) Δείξτε ότι αν $m=n$, τότε υπάρχει τρόπος να συνδεθούν ορισμένα από αυτά τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δυο συνθήκες:

i) κάθε σημείο να ανήκει σε ακριβώς τρία ευθύγραμμα τμήματα

ii) τα άκρα κάθε ευθύγραμμου τμήματος να είναι διαφορετικού χρώματος

β) Δείξτε ότι, αντίστροφα, αν υπάρχει τρόπος να συνδεθούν ορισμένα από αυτά τα σημεία με τμήματα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες i) και ii), τότε $m=n$.

Θαλής Γ' Λυκείου 1998-1999

1. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΓ=ΒΓ) με περίκεντρο Ο και έγκεντρο Ι. Αν Δ είναι ένα σημείο της ΒΓ τέτοιο ώστε η ΔΟ να είναι κάθετος επί της ΒΙ, να αποδειχθεί ότι ΓΔ = ΔΙ.

2. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, να προσδιοριστεί η μέγιστη τιμή της παράστασης

$$K = \varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\ .$$

3. Για ποιους θετικούς ακεραίους m και n, μεγαλύτερους του 1 ισχύει

$$2^{1999} + 3^{1999} = m^n\ ;$$

4. Είκοσι κληρονόμοι κάθονται σε ένα στρογγυλό τραπέζι για να μοιράσουν την κληρονομιά τους. Συμφωνούν να τη μοιράσουν με τέτοιο τρόπο ώστε ο καθένας να έχει τόσα χρήματα όσα είναι ο μέσος όρος των δυο διπλανών του.

Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η μοιρασιά;

Θαλής Γ' Λυκείου 1999-2000

1. Δίνεται η εξίσωση $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Θεωρείστε στην εξίσωση το α ως άγνωστο, το x ως παράμετρο και βρείτε τις ρίζες της συναρτήσει του x.

β) Βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης με άγνωστο το x συναρτήσει της παραμέτρου α.

2. Δίνεται η τριγωνομετρική εξίσωση:

$$(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)\eta\mu 2x = \lambda(\eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

β) Να λυθεί η εξίσωση όταν είναι $\lambda = -\frac{2}{3}$.

3. Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$. Σχηματίζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΒΓΔΕ και φέρουμε την εσωτερική διχοτόμο της $\hat{A}$. Να αποδειχθεί ότι αυτή χωρίζει το τετράγωνο σε δυο ισεμβαδικά τραπέζια.

4. Αν $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$ είναι διαφορετικοί ανά δυο μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_{19} \in \{0,1\}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε ο αριθμός $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{19}x_{19}$ να είναι πολλαπλάσιο του 19.

Θαλής Γ' Λυκείου 2000-2001

1. Ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) οι πλευρές ΒΓ = α και ΑΓ = β ικανοποιούν τη σχέση $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Να αποδείξετε ότι είναι $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$, όπου μ_β και μ_γ είναι οι διάμεσοι από τις κορυφές Β και Γ, αντιστοίχως.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y, z τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2 + y^2 - 8z = 6.$$

3. Τα σημεία Κ, Λ βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και είναι τέτοια ώστε να ισχύει:

$$(ΑΒΚ) = (ΑΓΚ) = (ΒΚΛ) = (ΓΚΛ) = (ΒΛΓ)$$

α) Να αποδείξετε ότι τα Κ, Λ ανήκουν στη διάμεσο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί ο λόγος $\frac{ΚΘ}{ΘΛ}$.

4. Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 577 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Σε οποιαδήποτε ομάδα 9 παιδιών υπάρχουν 2 τουλάχιστον παιδιά με το ίδιο ύψος.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ομάδα 5 παιδιών από την ίδια χώρα που είναι του ίδιου φύλου και έχουν το ίδιο ύψος.

Θαλής Γ' Λυκείου 2001-2002

1. Δίνεται η εξίσωση

$$\mu x^2 + \beta x + \nu = 0,$$

όπου μ, ν είναι πρώτοι φυσικοί αριθμοί με $3 < \mu < \nu$ και ο β είναι ακέραιος.

Να προσδιορίσετε τον ακέραιο β συναρτήσει των φυσικών μ, ν έτσι, ώστε η εξίσωση να έχει μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

2. Να προσδιορίσετε το γινόμενο των ν διαδοχικών όρων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ γεωμετρικής προόδου, αν είναι γνωστό ότι ο φυσικός αριθμός ν είναι άρτιος και

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \kappa \ , \ \ \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\nu}=\lambda \ ,$$

όπου οι κ, λ είναι δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί.

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1 και $\hat{B} = 120^\circ$ υπάρχει σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε να είναι $A\hat{B}\Delta = 90^\circ$ και ΔΓ = ΑΒ. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΔ.

4. Οι μαθητές Χ και Υ παίζουν ένα παιχνίδι ως εξής:

Επιλέγουν εναλλάξ ο ένας μετά τον άλλο έναν από τους αριθμούς 1 και 2. Αρχίζει ο Χ επιλέγοντας τον αριθμό $X_1 \in \{1,2\}$, συνεχίζει ο Υ επιλέγοντας τον αριθμό $Y_1 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_1 = X_1 + Y_1$. Στη συνέχεια ο Χ επιλέγει τον αριθμό $X_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_2 = \Sigma_1 + X_2$, ενώ ο Υ συνεχίζοντας επιλέγει τον αριθμό $Y_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_3 = \Sigma_2 + Y_2$ κ.ο.κ. Νικητής αναδεικνύεται ο μαθητής που θα καταγράψει σε μια επιλογή του ως άθροισμα τον αριθμό 200.

Να εξηγήσετε γιατί ο μαθητής Χ έχει στρατηγική νίκης.

Ισχύει το ίδιο αν ο νικητής αναδικνύεται όταν το άθροισμα γίνει 300;

Θαλής Γ' Λυκείου 2002-2003

1. α) Να προσδιορίσετε το σύνολο C_α των σημείων Μ του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z = x + yi με x, y $\in \mathbb{R}$ και ικανοποιούν την ισότητα

$$i(z+\bar{z}-\alpha)+z-\bar{z}=0 \text{ , όπου } \alpha \in \mathbb{R} .$$

β) Αν $A\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) \in C_\alpha$, να προσδιορίσετε σημείο Β $\in C_\alpha$ τέτοιο ώστε η μεσοκάθετος του ΑΒ να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου K_β με εξίσωση

$$|z + 1 - 3i| = \beta, \ \beta>0.$$

Για ποια τιμή του β ο κύκλος K_β εφάπτεται του C_α;

2. Από σημείο Ρ εκτός κύκλου φέρουμε τις εφαπτόμενες ΡΑ, ΡΒ και τυχαία τέμνουσα ΡΓΔ προς τον κύκλο. Αν ισχύει 2(ΡΑΓ) = 3(ΡΒΓ), να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(A\Delta\Gamma)}$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > 90^\circ$ και πλευρά ΒΓ = R, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του. Αν Ε είναι το εμβαδό του τριγώνου και μ_α είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ, να αποδείξετε ότι

$$\mu_\alpha^2=\frac{1}{4}R^2+2E\sqrt{3}$$

4. Αν x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι με

$$\text{ΜΚΔ}(x, y, z) = 1 \text{ και } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z} ,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός x + y είναι τέλειο τετράγωνο.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$65^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2004

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(x^2-1)(x^2-3)(x^2-2)^2 = 72$$

Μονάδες 5

2. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y για τους οποίους ισχύει ότι

$$9(x^2+y^2)+10xy = 177 + x^2y^2$$

Μονάδες 5

3. Δίνεται ο αριθμός

$$S(\nu) = 1^5 + 2^5 + \ldots + \nu^5,\ \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Να προσδιορίσετε τους αριθμούς ν για τους οποίους ισχύει ότι : $(\nu+1) \mid S(\nu)$

Μονάδες 5

4. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τη διχοτόμο του ΒΕ, το μέσο Μ της ΕΓ και σημείο Κ της πλευράς ΑΒ τέτοιο ώστε η διχοτόμος ΒΕ να τέμνει τη ΜΚ στο μέσο της Ο.
Να αποδείξετε ότι $\widehat{B O \Gamma} > 90^\circ$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θαλής Γ' Λυκείου 2005-2006

1. Έστω k μη μηδενικός πραγματικός αριθμός και $(α_ν)$ μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοιων ώστε να ισχύει

$$(α_{ν+1})^2 + α_{ν+1} = k((α_ν)^2 + α_ν) + (k-1)α_{ν+1}α_ν$$

για κάθε ν θετικό ακέραιο. Να αποδειχτεί ότι η ακολουθία $(α_ν)$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

2. Για ακέραιους m και n, να αποδειχτεί ότι αν ο αριθμός $m^2 + 28\,mn + n^2$ διαιρείται δια του 13, τότε ο αριθμός $m^3 + n^3$ διαιρείται δια του 13.

3. Έστω $X\hat{O}Y$ μια κυρτή γωνία, P εσωτερικό σημείο της και *C* ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία O, P και τέμνει τις OX, OY, αντίστοιχα, στα σημεία A και B διαφορετικά από το O. Να αποδειχτεί ότι ο λόγος

$$\frac{AB}{PA+PB}$$

είναι σταθερός για οποιαδήποτε θέση του κύκλου *C*.

4. Για πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, x τέτοιους ώστε $\alpha<\beta \;,\; \gamma<x \;,\; x>\frac{\alpha+\gamma}{2}$, να αποδειχτεί ότι

$$\frac{x-\gamma}{\beta-\alpha}+\frac{x-\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta-x}{2x-\alpha-\gamma}\geq\frac{3}{2}\,.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x+y))=x-f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=f(x)+f(-x)$ είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$3^{x+1}-x\cdot 3^{x}-4x-1=0.$$

3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2\ \kappa\alpha\iota\ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\frac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}\geq |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και τα σημεία Κ, Λ, Μ προς το ίδιο μέρος της ευθείας ΒΓ.

Αν $\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα γινόμενα **ΚΒ· ΚΓ**, **ΛΒ· ΛΓ** και **ΜΒ· ΜΓ** είναι άνισα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}} = 30^\circ$. Στα σημεία Α και Γ θεωρούμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Δ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιοριστούν οι παράμετροι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο αριθμός 2 να είναι ρίζα των εξισώσεων:

$$\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2 = 0 \text{ και } \mu x^2 - 4x - \lambda - 2 = 0.$$

(β) Για τις τιμές των λ, μ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2}{\mu x^2 - 4x - \lambda - 2} = \frac{17}{8}.$$

Πρόβλημα 3

Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(f(x) - f(y)\right) = f\left(f(x)\right) - y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Πρόβλημα 4

Για κάθε τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b και c, που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta .$$

Μονάδες 5

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A} = n^2 - n + 1$ και $\mathrm{B} = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Μονάδες 5

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Μονάδες 5

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM} \text{ και } \mathrm{A\Gamma} = 2 \cdot \mathrm{AM} \;,\; \mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{MB} \text{ και } \mathrm{B\Delta} = 2 \cdot \mathrm{MB}$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$70^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ $1^{ο}$.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2 + 3x(x-2) + 11x - 10y = 2015$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ $2^{ο}$

Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\left(x - f(y)\right) - f\left(y - f(x)\right) = 2f\left(f(x) - f(y)\right),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x - f(x)) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ $3^{ο}$

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί με δεκαδική αναπαράσταση της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\text{ψηφία}}\alpha}$, όπου α είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\alpha\,00\cdots00\,\alpha}$, μεσολαβούν 2ν το πλήθος μηδενικά.

Να αποδείξετε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 33 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 33".

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ $4^{ο}$.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(\mathrm{A}_1, \frac{R}{2})$, $C_2(\mathrm{B}_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Ν) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$, $\Gamma_1\Gamma_2$ και ΟΝ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ΄ Λυκείου

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Το ύψος του ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Ζ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΖ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ευθεία ΕΔ τέμνει την ευθεία ΑΓ στο Κ και η ευθεία ΖΚ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΛ.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε "γύρους". Στον πρώτο "γύρο" ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου "γύρου" κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο "γύρο" ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου "γύρου". Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κ.ο.κ.

- **α.** Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.
- **β.** Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρείτε τον αριθμό των αθλητών που συμμετείχαν.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1(\mathrm{O}_1,\mathrm{r}_1)$ και $c_2(\mathrm{O}_2,\mathrm{r}_2)$ στα διακεκριμένα σημεία Α και Β, αντιστοίχως. Αν το Μ είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων $c_1(\mathrm{O}_1,\mathrm{r}_1)$, $c_2(\mathrm{O}_2,\mathrm{r}_2)$ και ισχύει ότι $\mathrm{r}_1<\mathrm{r}_2$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{MA}<\mathrm{MB}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση
$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R},$, αν το σύστημα
$$\left\{\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda, \qquad 2x-y=-\lambda\right\} \qquad (\Sigma)$$
έχει λύση στο $\mathbb{R}$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3
Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n=a_n-a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=a_1-a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0,ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n$.
2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n>10^3$ και $S_{n+1}\le 8\cdot 10^3$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς ΒΓ . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο Κ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Μ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Τ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Α, Ι, Λ, Μ και Α, Ι, Κ, Ν, όπου Ι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Αν η ΑΔ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη κορυφή Α, τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+x}=\frac{2011}{2013}.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a,b,c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147.

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ στα σημεία T, S, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM,KT,NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση
$$2x^2-5x-2x\sqrt{x^2-5x}=1.$$

Πρόβλημα 2
Αν α,β ακέραιοι και ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\alpha^2+\beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Πρόβλημα 3
Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση
$$4x^4+(8+4a)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2=0$$
έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο M. Οι κύκλοι $C_B(B,AB)$, $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O,R)$ στο σημείο Σ.
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Λ,N,T είναι συνευθειακά.
(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $T\Sigma,K\Gamma,NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***