Θαλής Β' Λυκείου 1995-1996

1. Έστω κύκλος ακτίνας 1, στον οποίο ορίζουμε ένα συγκεκριμένο σημείο A_0.

Στη συνέχεια ορίζουμε τα σημεία A_ν ως εξής:

Το μήκος του τόξου A_0A_ν (όπου αυτό μπορεί να είναι και μεγαλύτερο του 2π) να είναι $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{\nu}$.

Να δείξετε ότι:

α) Δεν υπάρχει σημείο A_ν, $\nu \geq 1$ που να συμπίπτει με το A_0.

β) Δεν υπάρχουν $\mu,\nu \in \mathbb{N}$, $\mu \neq \nu$ ώστε τα σημεία A_μ, A_ν να συμπίπτουν.

2. Αν ΑΒΓΔ είναι ένα τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ, να δείξετε ότι ισχύει: ΑΒ + ΓΔ ≥ 4ρ.

3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί ν με την ιδιότητα:

Από το σύνολο $A(\nu) = \{1, 2, ..., \nu\}$ μπορούμε να διαλέξουμε κ αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa$ όπου $\kappa \geq 3$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, έτσι ώστε να ισχύει, $|\alpha_1 - \alpha_2| = |\alpha_2 - \alpha_3| = ... = |\alpha_{\kappa-1} - \alpha_\kappa| = |\alpha_\kappa - \alpha_1|$.

Τι συμβαίνει αν απλά $\kappa \geq 1$;

4. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1$ διαιρείται με το 1930.

Θαλής Β' Λυκείου 1995-1996

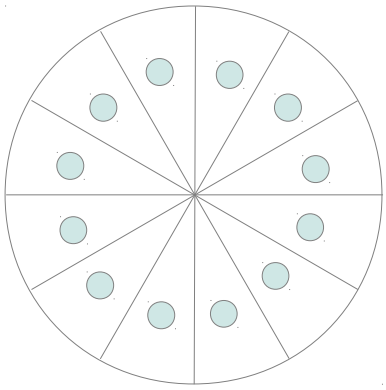
1. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \leq \gamma^2$.

2. Αν x και y ακέραιοι με $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq y \leq 100$, να λυθεί η εξίσωση:

$$|x + y - 2| + |3x - 2y + 1| + 3x - 2y + 1 = 0.$$

3. Σ' ένα κύκλο είναι εγγεγραμμένο ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, τέτοιο ώστε η ΑΒ είναι παράλληλη προς την ΕΔ και η ΑΕ προς τη ΒΓ. Δείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Α είναι παράλληλη προς τη ΓΔ.

4. Ένας δίσκος έχει χωριστεί σε 12 ίσους τομείς με ακτίνες που ξεκινούν από το κέντρο του. Στον καθένα από τους δώδεκα τομείς τοποθετούμε ένα κέρμα. Κάνουμε τώρα την εξής κίνηση: μετακινούμε ένα οποιοδήποτε κέρμα από την θέση του στον αμέσως επόμενο τομέα (κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού) και συγχρόνως μετακινούμε ένα δεύτερο κέρμα από τη θέση του στον αμέσως προηγούμενο τομέα.



Δείξτε ότι όποια διαδοχή κινήσεων και αν κάνουμε, δεν είναι δυνατόν να έρθουν όλα τα κέρματα σε ένα και τον αυτό τομέα. Αντιθέτως δείξτε ότι αν οι τομείς ήταν δεκατρείς, τότε με κατάλληλη επιλογή κινήσεων, μπορούμε να φέρουμε όλα τα κέρματα σε ένα τομέα.

Θαλής Β' Λυκείου 1999-2000

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (4α - 7)x + 3α^2 - 17α + 10 = 0$, $α \in \mathbb{Z}$, $α \geq -1$.

α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της είναι περιττός ακέραιος.

β) Να υπολογιστεί η τιμή του α έτσι ώστε η μεγαλύτερη ρίζα να είναι τετραπλάσια της μικρότερης.

2. Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις ανισότητες

$$|x| \geq |y + z|, \ |y| \geq |z + x|, \ |z| \geq |x + y|.$$

Να δειχθεί ότι $x + y + z = 0$.

3. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο. Έστω Δ το μέσον του τόξου ΒΓ, που περιέχει την κορυφή Α. Αν Ε είναι το ίχνος της κάθετης από το Δ προς την ΑΓ, να αποδειχθεί ότι ΑΒ + ΑΕ = ΕΓ.

4. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και κάθετες πλευρές μήκους 1. Από σημείο Ρ της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετες ΡΚ, ΡΘ προς τις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του Ρ, ένα από τα εμβαδά (ΒΚΡ), (ΡΘΓ) και (ΚΡΘΑ) είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $\frac{2}{9}$.

Θαλής Β' Λυκείου 2001-2002

1. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλευρές ΑΒ = α και ΒΓ = β. Θεωρούμε σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ, αντιστοίχως, έτσι ώστε η περίμετρος του τριγώνου ΕΓΖ να είναι ίση προς α + β και η ΑΖ να είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΖΕ.

α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους α, β.

β) Να βρείτε τη γωνία ΕΑΖ.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 45^\circ$ και $\hat{B} > 45^\circ$. Στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τρίγωνο ΑΒΔ ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{\Delta} = 90^\circ$. Στη συνέχεια, εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΕ και ΑΓΖ με $\hat{E} = 90^\circ$ και $\hat{Z} = 90^\circ$.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο ν που είναι τέτοιος ώστε ο αριθμός

$$\nu^2 + 2004\nu$$

να είναι τέλειο τετράγωνο.

4. Οι μαθητές Χ και Υ παίζουν ένα παιχνίδι ως εξής:

Επιλέγουν εναλλάξ ο ένας μετά τον άλλο έναν από τους αριθμούς 1 και 2. Αρχίζει ο Χ επιλέγοντας τον αριθμό $X_1 \in \{1,2\}$, συνεχίζει ο Υ επιλέγοντας τον αριθμό $Y_1 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_1 = X_1 + Y_1$. Στη συνέχεια ο Χ επιλέγει τον αριθμό $X_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_2 = \Sigma_1 + X_2$, ενώ ο Υ συνεχίζοντας επιλέγει τον αριθμό $Y_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_3 = \Sigma_2 + Y_2$ κ.ο.κ. Νικητής αναδεικνύεται ο μαθητής που θα καταγράψει σε μια επιλογή του ως άθροισμα τον αριθμό 200.

Να εξηγήσετε γιατί ο μαθητής Χ έχει στρατηγική νίκης.

Ισχύει το ίδιο αν ο νικητής αναδικνύεται όταν το άθροισμα γίνει 300;

Θαλής Β' Λυκείου 2002-2003

1. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = ΑΔ.

Αν η ΑΓ τέμνει τη ΒΕ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι η ΔΖ περνάει από το μέσον της ΒΓ.

2. Να προσδιορίσετε όλους τους διψήφιους αριθμούς που είναι ίσοι με το γινόμενο που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα ψηφία τους αυξημένα κατά 2.

3. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 - 4\beta x + 4\gamma = 0$, $\alpha>0$ έχει δυο ρίζες στο διάστημα [2,3], να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha \le \beta \le \gamma < \alpha + \beta$

β) $\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta}{\beta+\alpha}>\frac{\gamma}{\gamma+\beta}$

4. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Τα σημεία Ε, Ζ κινούνται πάνω στις πλευρές ΒΓ, ΓΔ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $E\hat{A}Z=45^\circ$. Οι ΑΕ και ΑΖ τέμνουν τη ΒΔ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Οι ΕΛ και ΖΚ τέμνονται στο Η και η ΑΗ τέμνει τη ΖΕ στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ευθεία ΑΜ είναι κάθετη προς τη ΖΕ.

β) Η γωνία ΒΜΔ είναι σταθερή, δηλαδή είναι ανεξάρτητη της θέσης των Ε, Ζ πάνω στις πλευρές ΒΓ ,ΓΔ αντίστοιχα.

Θαλής Β' Λυκείου 2003-2004

1. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και δυο τυχαία σημεία A_1 πάνω στην πλευρά ΒΓ και B_1 πάνω στην πλευρά ΑΓ. Ονομάζουμε C_1 και C_2 τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων BA_1B_1, $ΓA_1B_1$, αντίστοιχα. Η ευθεία ΑΒ τέμνει τον C_1 στο $Γ_1$, ενώ η ευθεία $Γ_1B_1$ τέμνει τον C_2 στο Δ. Να αποδείξετε ότι τα ορθόκεντρα των τριγώνων$AB_1Γ_1$ και $ΔB_1Γ$ είναι σημεία συνευθειακά με το B_1.

2. Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = x^2 - kx + m,\ B = x^2 + mx - k,\ Γ = m^2x^2 + (k - 1)x + k,$$

με k, m $\in \mathbb{R}$ και $k + m \neq 0$. Αν είναι

$$A^2 + B^2 + Γ^2 = AB + BΓ + ΓA$$

να βρείτε την τιμή του x, την μέγιστη τιμή του k και την τιμή του m που αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή του k.

3. Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} > 90^\circ$) φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Η και τη διάμεσο ΒΜ του τριγώνου ΑΒΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΖΔ και

β) $\hat{Γ} = Z\hat{A}E$.

4. Από τους αριθμούς x, y, z $\in \mathbb{R}$ δύο είναι αρνητικοί και ένας είναι θετικός. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(x-y)(x^2-xy)^2}{yz}+\frac{(y-z)(y^2-yz)^2}{zx}+\frac{(z-x)(z^2-zx)^2}{xy}\geq 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
65ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2004

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ=2ΑΒ η διχοτόμος ΒΔ ισούται με το ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 5

2. **(α)** Αν για τους ακέραιους a, b αληθεύει η ισότητα

$$a + a^2 + a^4 = b + b^2 + b^4,$$

τότε να αποδείξετε ότι $a = b$.

Μονάδες 3

(β) Αφού επαληθεύσετε ότι η εξίσωση $x + x^2 + x^4 = 22$ έχει ως λύση τον ακέραιο αριθμό 2, να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν μπορεί να έχει άλλη ακέραια λύση.

Μονάδες 2

3. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΑΔ και την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας Α η οποία τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο Ε. Φέρουμε τη ΒΖ κάθετη προς την ΑΕ και την ΕΗ κάθετη προς την ΑΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ζ και Η είναι συνευθειακά.

Μονάδες 2

(β) Αν είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 30^o$, να βρείτε τη γωνία $\widehat{AH\Delta}$.

Μονάδες 3

4. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y για τους οποίους ο αριθμός

$$A = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + x - y$$

είναι τέλειο τετράγωνο και επιπλέον ισχύει $x^2 + y^2 < 12$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Β΄ τάξη Λυκείου

1. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^2-(2006\kappa+1)x+2007=0$ όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$, έχει δύο ακέραιες ρίζες.

2. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4, ΒΓ = 2 και σημείο Μ στο εσωτερικό του με ΜΓ = 1 και ΜΒ = $\sqrt{3}$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ.

3. Έστω $\kappa=2+2^2+2^3+\ldots+2^{2008}$. Να αποδείξετε ότι ο 30 διαιρεί τον κ.

4. α) Να αποδείξετε ότι : $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}>\sqrt[3]{19}$
β) Να λύσετε την εξίσωση:
$$2^{-1}x+x^{-1}=\frac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 - 2y^2 + 2y^4 + 2 = 0.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές των θετικών μονοψήφιων ακεραίων αριθμών κ, λ, μ, για τους οποίους η δευτεροβάθμια εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0$ έχει δύο ακέραιες ίσες λύσεις.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ημιευθεία $Ax // ΒΓ$ (η Ax βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο Γ ως προς την ευθεία ΑΒ). Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΒΓΔΕ να είναι ρόμβος (το σημείο Ε βρίσκεται ανάμεσα στο Α και στο Δ). Στο σημείο Δ θεωρούμε την κάθετη ευθεία στη ΔΓ που τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΑ στο Ζ.

(α) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

(β) Να αποδειχθεί ότι το Ε είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΓΖ.

Πρόβλημα 4.

Αν $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, να λυθεί το σύστημα:

$$3x^2y + 2yz^2 = 70xz$$
$$7y^2z + 4zx^2 = 256xy$$
$$5z^2x + 6xy^2 = 52yz.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από δύο, έχουν ως τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

Μονάδες 5

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\text{ΑΔ} \parallel \text{ΒΓ}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Φέρουμε από το Α κάθετη προς τη ΒΓ που την τέμνει στο σημείο Ε και από το Ε κάθετη προς την διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $\text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Γ}$.

Μονάδες 5

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = 2,$$
$$x + y + z = 300.$$

Μονάδες 5

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το Μ προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ έτσι ώστε

$$\text{ΑΓ} \perp \text{ΑΜ} \text{ και } \text{ΑΓ} = \text{ΑΜ}, \quad \text{ΒΔ} \perp \text{ΜΒ} \text{ και } \text{ΒΔ} = \text{ΜΒ},$$

και επιπλέον τα σημεία Γ, Μ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \le \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν $\text{Α}_1, \text{Β}_1, \Gamma_1$ είναι τα μέσα των πλευρών του $\text{ΒΓ}, \text{ΑΓ}, \text{ΑΒ}$ αντίστοιχα και $\text{Α}_2, \text{Β}_2, \Gamma_2$ είναι τα μέσα των $\text{ΟΑ}, \text{ΟΒ}, \text{ΟΓ}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $\text{Α}_2\text{Β}_1\Gamma_2\text{Α}_1\text{Β}_2\Gamma_1$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του $\text{Α}_1\text{Α}_2$, $\text{Β}_1\text{Β}_2$ και $\Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \ge 2009$ και $y \ge -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\text{Α}=\frac{x-y+2}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases}(x+y)^3 = z-2x-y\\ (y+z)^3 = x-2y-z\\ (z+x)^3 = y-2z-x\end{cases} \qquad (\Sigma),$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
Ιστοσελίδα: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β΄ Λυκείου

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$
$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$
$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και οι κύκλοι $c_1(\text{Α}, \text{ΑΒ})$ (με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα $R_1 = \text{ΑΒ}$) και $c_2(\text{Α}, \text{ΑΓ})$ (με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα $R_2 = \text{ΑΓ}$). Ο κύκλος $c_1(\text{Α}, \text{ΑΒ})$ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΒ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\text{Α}, \text{ΑΓ})$ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΚΝ είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\text{ΓΑ} = \text{ΓΒ}$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΚΝ είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\text{Α}} = 90^o$) και έστω Ε το μέσο της διχοτόμου ΒΔ. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΕΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΕ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{K}(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ x\neq\pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2},$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y=x^3+2x-2,\ z=y^3+2y-2,\ x=z^3+2z-2.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα. Από το σημείο Ζ, θεωρούμε παράλληλη στην ΑΓ, που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Μ. Από το σημείο Ε, θεωρούμε παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα ΒΜΟΖ και ΓΝΟΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο, έστω Κ, των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου Ι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν $\alpha \neq 0$ και $-1 < \alpha < 1$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha ,$$

όπου

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}, \quad \mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} .$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0 .$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3} = \frac{y}{2012y+5} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Πρόβλημα 4
Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλοι $c_1(A, AM)$ και $c_2(B, BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K και N, αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A, AM)$ και $c_2(B, BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2+3x+1}{x}-\frac{27x}{9x^2+3x+1}\geq 6.$$

Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Πρόβλημα 2
Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α,β,γ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1=1$ και $x_2=\beta$.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες η αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2+x-4}{x^2-x+2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K,Λ,M,N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***