

1. Δυο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:

Τους δίνεται ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο πλήθος πλευρών, μεγαλύτερο από 6 (π.χ. ένα 100-γωνο). Κάθε παίκτης συνδέει δυο από τις κορυφές του πολυγώνου με ένα τμήμα το οποίο, όμως, να μην τέμνει κανένα από άλλα τέτοια τμήματα που οι παίκτες είχαν φέρει προηγουμένως. Θα χάσει ο παίκτης που πρώτος δε θα μπορέσει να φέρει ένα τέτοιο τμήμα.

Μπορεί ένας παίκτης να ακολουθήσει μια στρατηγική ώστε να νικήσει σίγουρα;

2. Ένα τετράγωνο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ ώστε οι κορυφές του Κ, Λ, Μ, Ν να βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, και ΔΑ αντίστοιχα. Αν ο λόγος του εμβαδού του ΚΛΜΝ προς το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι λ, να βρείτε το λόγο των μηκών των τμημάτων στα οποία διαιρούνται οι πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ από τις κορυφές του άλλου τετραγώνου.

3. Υπάρχει τρίγωνο με όλες τις πλευρές του και ένα ύψος του να έχουν ακέραια μήκη και η περίμετρός του να είναι 21;

4. Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}}$.

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, όπου A η ορθή γωνία, έχουμε $AB=600\text{m}$. Πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta=150\text{m}$. Να βρεθεί το μήκος $\Gamma\Delta$ αν είναι $AB+A\Delta=\Gamma\Delta+B\Gamma$.

2. Αν α , β και γ τα μήκη πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε την ανισότητα:

$$(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2 \leq 4\beta^2\gamma^2.$$

3. α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός n τέτοιος ώστε ο n^3+3n να είναι περιττός.

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε να ισχύει:

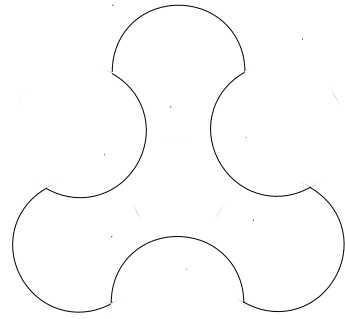
$$5x^3 - 4y^2 - 6xy + 15x + 6y - 5 = 0$$

4. Επτά πόλεις $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ βρίσκονται, με αυτή τη διάταξη, πάνω σε μία ευθεία. Πού πρέπει να κτιστεί ένα εργοστάσιο, ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τις επτά πόλεις να είναι το ελάχιστο δυνατό;

1. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + x = \frac{42}{x^2 + x + 1}$$

2. Μια περιοχή του επιπέδου περικλείεται από 6 ημικύκλια ακτίνας 1 cm όπως στο σχήμα. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής αυτής.



3. Έστω ότι για θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)+\beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)+\gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)=0$$

Να αποδειχτεί ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

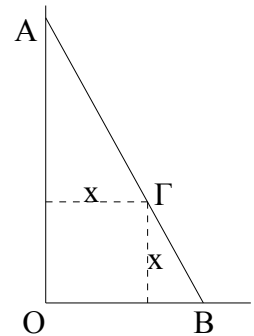
4. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί n για τους οποίους ο αριθμός $2n + 1$ διαιρεί τον αριθμό $n^2 + n - 2$.

1. Το άθροισμα δυο ακεραίων είναι 26, ενώ αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1.

Να βρεθούν οι αριθμοί.

2. Μια σκάλα ακουμπά στο έδαφος και στον τοίχο. Το σημείο επαφής Α στον τοίχο βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Επιπλέον υπάρχει ένα σημείο της σκάλας που απέχει ίση απόσταση x από τον τοίχο και το έδαφος.

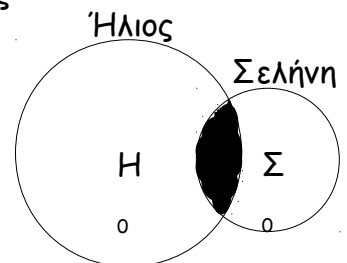
Να βρείτε το μήκος της σκάλας συναρτήσει των h και x .



3. Στην πρόσφατη έκλειψη Ηλίου στη χώρα μας ο δίσκος της Σελήνης κάλυπτε το δίσκο του Ήλιου έτσι ώστε η καλυπτόμενη επιφάνεια να μεγαλώνει σιγά - σιγά.

Το σχήμα μας δείχνει μια φάση της κάλυψης αυτής.

Να αποδείξετε ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή του φαινομένου, η διαφορά μεταξύ των μη επικαλυπτόμενων επιφανειών $H_0 - \Sigma_0$ παρέμενε σταθερή.



4. Αν a περιττός ακέραιος, να δειχθεί ότι ο αριθμός $a^4 + 6a^2 - 7$ είναι πολλαπλάσιο του 128.

1. Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 18 ισούται με το τετράγωνο του αριθμού.

Να βρεθεί ο αριθμός.

2. α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ισούται με 360° .

β) Τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ οι εξωτερικές γωνίες $A_{εξ}$, $B_{εξ}$, $\Gamma_{εξ}$, $\Delta_{εξ}$ είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 8, 10, 12, αντιστοίχως.

Να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου.

3. Σε μια τάξη Λυκείου διοργανώθηκε πρωτάθλημα σκακιού. Την πρώτη μέρα έγιναν μόνο κάποιοι αγώνες στους οποίους οι δυο αντίπαλοι ήταν ένα αγόρι και ένα κορίτσι.

Στους αγώνες αυτούς της πρώτης μέρας πήραν μέρος τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού των αγοριών της τάξης και τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού των κοριτσιών της τάξης. Αν η τάξη έχει συνολικά 34 παιδιά, να βρείτε:

α) πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η τάξη

β) πόσα παιδιά δεν πήραν μέρος την πρώτη μέρα στους αγώνες

4. Οι δυο διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι οι θετικοί ακέραιοι x και y . Αν αυξήσουμε τη μια διάσταση κατά 1 και την άλλη διάσταση κατά 2, τότε το ορθογώνιο που προκύπτει έχει εμβαδό διπλάσιο του αρχικού ορθογωνίου.

Να βρεθούν οι διαστάσεις x και y .

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι $xyz = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{1}{y+1-\frac{y}{x+1}} + \frac{1}{z+1-\frac{z}{y+1}} + \frac{1}{x+1-\frac{x}{z+1}}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$3(1 + a^2 + a^4)x = (1 + a + a^2)^2x + a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 1$$

ως προς x , θεωρώντας το a ως παράμετρο.

3. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα $ΑΓ$ και σημείο $Β$ στο εσωτερικό του. Κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΕ$ προς το ίδιο μέρος του ευθύγραμμου τμήματος $ΑΓ$.

Αν οι $ΑΕ$ και $ΓΔ$ τέμνονται στο $Ζ$, να βρείτε τη γωνία $\hat{A} \hat{Z} \hat{D}$.

4. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό M , ο οποίος έχει την ιδιότητα: για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha + \beta = 1$ ισχύει ότι:

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq M$$

1. Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς a , με $a > 1$. Το τετράγωνο που έχει πλευρά κατά 1 μικρότερη του a , έχει περίμετρο ίση αριθμητικά προς το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου.

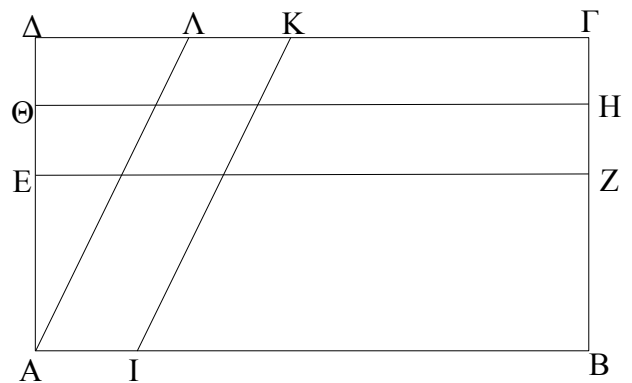
Να βρεθεί η πλευρά a .

2. Οι αριθμοί x, y, z, w έχουν την ιδιότητα:

Αν προσθέσουμε τρεις οποιουσδήποτε από αυτούς και από το άθροισμα που θα προκύψει αφαιρέσουμε τον αριθμό 5, προκύπτει πάντοτε ο αριθμός 2002.

Να υπολογίσετε το άθροισμα $x + y + z + w$.

3. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται οικόπεδο $AB\Gamma\Delta$ σχήματος ορθογωνίου με πλευρές $AB = a$ και $B\Gamma = b$. Από το οικόπεδο θα κοπούν δυο δρόμοι $EZH\Theta$ και $AIK\Lambda$. Ο δρόμος $EZH\Theta$ σχήματος ορθογωνίου έχει πλάτος $ZH = \psi$, ενώ ο δρόμος $AIK\Lambda$ σχήματος παραλληλογράμμου έχει πλευρά $AI = \chi$.



α) Να εκφράσετε το εμβαδό του οικοπέδου που απομένει μετά την αποκοπή των δυο δρόμων, ως συνάρτηση των a, b, χ και ψ .

β) Να εκφράσετε το πλάτος d του δρόμου $AIK\Lambda$ ως συνάρτηση του χ , αν είναι γνωστό ότι $\angle \Lambda AI = 30^\circ$.

4. Μπορούμε να παραστήσουμε τον αριθμό 2002 ως άθροισμα ενός τριψήφιου αριθμού και του κύβου του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού αυτού;

1. Το τετράγωνο ενός αριθμού ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά 72. Επιπλέον, αν από το 60 αφαιρέσουμε το διπλάσιο του αριθμού, λαμβάνουμε αριθμό μικρότερο του 52.

Να βρεθεί ο αριθμός.

2. Αν x, y, a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x \neq y, x \neq 2y, y \neq 2x, a \neq \pm 3b$ και $\frac{2x-y}{a+3b} = \frac{2y-x}{a-3b} = \lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) $x + y = 2\lambda a$ και $x - y = 2\lambda b$

β) $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \geq 1$

3. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) οι διαγώνιες τέμνονται στο E . Αν είναι $(ABE) = 72 \text{ m}^2$ και $(\Gamma\Delta E) = 50 \text{ m}^2$, να υπολογίσετε το εμβαδό του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

4. Να βρεθούν οι ακέραιοι α, β για τους οποίους ισχύει η ισότητα

$$\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha = 2\beta^2 + 4\beta + 3$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
65^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2004

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Το τετράγωνο ενός αριθμού x ισούται με το διπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 8. Επιπλέον το διπλάσιο του αριθμού είναι μεγαλύτερο του -2 .
Να βρεθεί ο αριθμός x .

Μονάδες 5

2. Αν το τετράγωνο του αθροίσματος των πραγματικών αριθμών x, y και z ισούται με το τριπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων τους και επιπλέον ισχύει $x + 2y + 3z = 60$, να βρείτε τους αριθμούς x, y και z .

Μονάδες 5

3. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, $A\Delta = \alpha$, $B\Gamma = 2\alpha$ και $\Gamma\Delta = \frac{3\alpha}{2}$, του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο E .

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 1

(β) Να αποδείξετε ότι η ΔA είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\Delta E}$.

Μονάδες 2

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ και το λόγο $\frac{E(EB\Gamma)}{E(AB\Gamma\Delta)}$.

Μονάδες 2

4. Οι θετικοί ακέραιοι x, y με $x > y$ είναι τέτοιοι ώστε

$$x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 = 49(x - y).$$

Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y .

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θαλής Α' Λυκείου 2005-2006

1. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2003 \cdot 2005^3 - 2004 \cdot 2002^3$ είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$$

3. Να αναλυθεί το πολυώνυμο

$$x^6 - 2x^5 + x^2 - x - 2$$

σε γινόμενο τριών πολυωνύμων θετικού βαθμού.

4. Να αποδειχθεί ότι αν η ευθεία που ενώνει τα μέσα των δυο απέναντι πλευρών ενός κυρτού τετραπλεύρου διαιρεί το τετράπλευρο σε δυο ισεμβαδικά τετράπλευρα, τότε το τετράπλευρο είναι τραπέζιο.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

“Ο ΘΑΛΗΣ”

ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Α΄ τάξη Λυκείου

1. Η Α΄ τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθένα από τους μαθητές των τμημάτων αυτών δίνουμε 10 €. Έτσι δώσαμε 1090€. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda x + 3) = \lambda^3 + 2\lambda x - 2$ για τις διαφορές πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ .

3. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} \right)^2 \geq 3 \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > \hat{B}$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ τέμνονται στο Ι. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΒΓ – ΑΓ. Να αποδείξετε ότι : ΙΔ = ΙΑ.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Α' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.

Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς x και y που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον x κατά 50 και αυξήσω τον y κατά 40, τότε το γινόμενο τους δεν μεταβάλλεται.

Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: Αν αυξήσεις τον αριθμό x κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό y κατά 20, τότε πάλι το γινόμενο τους δεν μεταβάλλεται;

Ο Γιάννης απαντάει: Πράγματι, αυτό ισχύει.

Η Μαρία καταλήγει: Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.

Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

Πρόβλημα 2

Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{(\beta - 1)(\beta + 1)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 45^\circ$. Φέρουμε ευθεία ε κάθετη προς την $A\Gamma$ στο A η οποία τέμνει την προέκταση της ΓB στο E . Πάνω στην ευθεία ε παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ με το σημείο A να βρίσκεται μεταξύ των E και Δ . Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς $A\Gamma = \beta$:

(α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$,

(β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AE .

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x . Να βρεθεί ο αριθμός x .
Μονάδες 5
2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε $0 \leq x \leq y \leq z$ και $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44$.
Μονάδες 5
3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων τα οποία έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:
“υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα”.
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις).
Μονάδες 5
4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν τις ισότητες
$$x^2 - y = z^2, \quad y^2 - z = x^2, \quad z^2 - x = y^2,$$

να αποδείξετε ότι:
(α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.
(β) Ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.
Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \leq 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $A = 2^\mu + 2^\nu$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

- (α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta E = \Delta Z$ και $A\hat{L}E = A\hat{L}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.
(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το μέρος του Α), αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta E = \Delta Z$ και $A\hat{L}E = A\hat{L}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο.

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή, όταν βέβαια είναι γεμάτη, σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία, αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν για να γεμίσει η δεξαμενή θα είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Α΄ Λυκείου

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2 - 5x = 14, \quad \frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4}.$$

2. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4.$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{4}{y}, \quad \frac{x-1}{2} - \frac{2}{3y} = \frac{5}{3} + \frac{x}{3}.$$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AD . Από τυχόν σημείο E του ύψους AD θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $B\Gamma$. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία M, N έτσι ώστε $EM = EN$ και $MB < M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $M\Gamma$ και NB τέμνονται πάνω στο ύψος AD .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-10)(x^2-7x+10)=0 \\ \frac{x^2+1}{2} + \frac{2x-1}{5} < \frac{x(x+1)}{2} \end{array} \right\}.$$

Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A(x) = \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} - \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}$$

Πρόβλημα 3

(α) Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2} + \frac{x}{4} = \kappa(x+2) - \frac{3(\kappa x-1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή A και ακτίνα $\rho < AB$ τέμνει τις πλευρές AB και AG στα σημεία E και Δ , αντίστοιχα. Οι ευθείες $B\Delta$, ΓE τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία K , N αντίστοιχα. Αν T είναι το σημείο τομής των $B\Delta$, ΓE και S το σημείο τομής των ΔN , EK , να αποδείξετε ότι τα σημεία A , S και T βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x(x-2)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$K(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^3 + \beta^3 - \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha\beta + \beta^2)(\alpha - 2\beta)}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha - \beta},$$

αν $\alpha + \beta \neq 0$ και $\alpha + \beta \neq 1$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = \alpha$ και $AB = A\Gamma = 2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά AB τέμνει την ευθεία της διχοτόμου $B\Delta$ στο σημείο E . Η ευθεία AE τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Οκτωβρίου 2013

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = 4 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -8 \end{array} \right\}$$

έχουν την ίδια λύση (x, y) , να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β .**Πρόβλημα 2**Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z = 2(x + y) \quad \text{και} \quad z = 3(x - y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y < x < z$.**(β)** Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) για την οποία: $x^2 + y^2 + z^2 = 680$.**Πρόβλημα 3**Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A = 8x + 1$ και $B = 2x - 3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.**Πρόβλημα 4**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 20^\circ$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Από το σημείο A φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα AE τέτοιο ώστε $AE \parallel B\Gamma$, $AE = AB$ και με τα σημεία E και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία AB . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $BAEZ$. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $B\hat{\Delta}Z$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!