Ευκλείδης Γ' Λυκείου 1995-1996

1. Να ορίσετε συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το N* και η οποία να ικανοποιεί τη σχέση:

$$[f(1)]^3+[f(2)]^3+\ldots+[f(\nu)]^3=[f(1)+f(1)+\ldots+f(\nu)]^2$$, για κάθε ν $\in \mathbb{N}^*$.

2. Ο Α και ο Β παίζουν το παρακάτω παιχνίδι:

Σ' ένα χαρτί είναι γραμμένα κ "-" (πρόσημα πλην).

Καθένας, εναλλάξ, μπορεί να αλλάξει ένα είτε δύο πρόσημα από " -" σε "+".

Τα πρόσημα που θα αλλαχθούν μπορούν να βρίσκονται σε οποιαδήποτε θέση αρκεί όταν αλλάζονται δύο, αυτά να είναι γειτονικά.

Θα νικήσει αυτός που θα μεταβάλλει το τελευταίο "-" σε "+".

Υπάρχει στρατηγική, ώστε να νικήσει κάποιος από τους παίκτες;

3. Γράφουμε τους αριθμούς 1, 2, ..., 1995 με όποια σειρά θέλουμε, ώστε να σχηματιστεί ένας αριθμός.

Να εξετάσετε αν ο αριθμός που σχηματίζεται είναι τέλειο τετράγωνο.

4. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΔ. Έστω Ε το σημείο τομής των ΒΚ, ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των ΔΚ, ΓΒ.

Να αποδείξετε ότι ΕΔ=ΖΒ.

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 1996-1997

1. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα (x,y) που ικανοποιούν τη σχέση:

$$4x^3 + 4x^2y - 12x^2 = y^3 + xy^2 - 3y^2$$

2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο C. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΒΓ στο Δ και τον C στο Κ. Οι εγγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ΒΔΚ και ΚΔΓ είναι ίσοι.

Να δειχτεί ότι το ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

3. Έστω το σύνολο $A=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu\}$, $\alpha_i \geq 0$, $i=1, 2, ..., \nu$.

Για κάθε i, j υπάρχει κ, $(1 \leq i,j,\kappa \leq \nu)$ ώστε $\alpha_\kappa = \frac{1}{2}|\alpha_i - \alpha_j|$.

Να δειχτεί ότι $\alpha_i=0$ για κάθε i.

4. Έστω η γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ και $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$. Για κάθε $\nu \geq \nu_0$ η $f(\nu)$ διαιρεί το ν.

Να προσδιοριστεί η συνάρτηση f.

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 1997-1998

1. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

f(0)=0 και f(xσυνθ) – f(xσυν^{2}θ) = x–x^{2}συνθ, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi , \kappa\pi + \frac{\delta}{2} \right\}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

2. Έστω A, B, Γ $\nu \times \nu$ πίνακες με ΑΒΓ + ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ + Α + Β + Γ = Ο.

Να δειχτεί ότι Α(Β + Γ) = (Β + Γ)Α αν και μόνο αν Α(ΒΓ) = (ΒΓ)Α.

3. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Ο τυχαίο σημείο του επιπέδου του.

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της $\Pi = \frac{(OA)+(O\Gamma)}{(OB)+(O\Delta)}$.

4. Θεωρούμε 9 σημεία που αποτελούν τις κορυφές 10 διαφορετικών τριγώνων.

Να δειχτεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο από τα δοσμένα τρίγωνα, τα οποία έχουν ακριβώς μία κοινή κορυφή.

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 1998-1999

1. Έστω $\alpha_\nu = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + ... + \frac{1}{\nu\cdot(\nu+2)}$. Να δειχτεί ότι $\alpha_{1999} \leq \frac{1}{4}(2{,}999)$.

2. Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να δειχτεί ότι δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί α, β, γ, δ του διαστήματος $\Delta = [\nu^2, (\nu+1)^2]$ που να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

β) Να προσδιορίσετε όλους τους φυσικούς αριθμούς α, β, γ, δ του διαστήματος $E = [\nu^3, (\nu+1)^3]$ που αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

3. Θεωρούμε την παράσταση $K = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_\nu\beta_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, όπου οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0 ή 1.

Έστω $A(\nu)$ το πλήθος των 2ν-άδων $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu)$ για τις οποίες ο αριθμός K είναι άρτιος και $\Pi(\nu)$ το πλήθος των 2ν-άδων αυτών, για τις οποίες ο αριθμός K είναι περιττός.

Να δειχτεί ότι $\frac{A(\nu)}{\Pi(\nu)} = \frac{2^\nu+1}{2^\nu-1}$.

4. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και $\mu=\max\{AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A\}$.

Να δειχτεί ότι $4\mu^2 \geq A\Gamma^2 + B\Delta^2$.

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 1999-2000

1. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Σημείο Μ κινείται στο τόξο ΑΒ.

Να δειχτεί ότι ο λόγος $\frac{MA+MB}{M\Gamma+M\Delta}$ είναι σταθερός.

2. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Στα ύψη ΑΔ, ΒΕ παίρνουμε σημεία Μ, Ν, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $B\hat{M}\Gamma = A\hat{N}\Gamma = 90^o$.

α) Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΓΜΝ είναι ισοσκελές.

β) Επιπλέον ισχύουν: $MN = 4+2\sqrt{3}$ και $M\hat{A}N = 30^o$.

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ΜΓΝ.

3. Έστω $\mathbb{N}^*$ το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών.

Να δειχτεί ότι το $\mathbb{N}^*$ μπορεί να γραφτεί ως ένωση τριών συνόλων Α, Β, Γ, ανά δύο ξένων μεταξύ τους, που είναι τέτοια ώστε, να ισχύει:

"αν $\kappa,\lambda \in \mathbb{N}^*$ με $|\kappa-\lambda|=2$ ή 5, τότε τα κ και λ ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα".

4. Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$ και ισχύει $x^2+2y^2+z^2 = \frac{2}{5}a^2$, $a>0$.

Να δειχτεί ότι $|x-y+z| \leq a$.

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 2000-2001

1. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Ένας κύκλος που έχει χορδή τη ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο μέσον της Δ και την πλευρά ΑΓ στο Ε. Γράφουμε και τον κύκλο (γ) που έχει χορδή τη ΓΕ και εφάπτεται της ΒΓ στο Γ. Η ΔΕ προεκτεινόμενη τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ζ και τον κύκλο (γ) στο Η.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΖΑ, ΒΕ και ΓΗ περνάνε από το ίδιο σημείο.

2. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{12(\alpha x+36)}{x^2+36}$, ο α είναι ακέραιος.

Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι ακέραιοι αριθμοί.

3. Για x,y,z>0 να αποδειχτεί ότι:

α) $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{x+y}{3}$

β) $f(x,y,z)=\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \geq \frac{x+y+z}{3}$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δύο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:

Πάνω σε ένα κύκλο δίνονται 100 διαφορετικά σημεία και οι δύο μαθητές διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο γράφουν μια χορδή, διαφορετική κάθε φορά, με άκρα δύο οποιαδήποτε από τα 100 δεδομένα σημεία. Το παιχνίδι τελειώνει όταν καθένα από τα 100 σημεία χρησιμοποιηθεί ως άκρο χορδής μία τουλάχιστον φορά. Νικητής είναι ο μαθητής ο οποίος θα γράψει τη χορδή με την οποία τελειώνει το παιχνίδι.

Αν ο μαθητής Α αρχίσει πρώτος, ποιος από τους δύο μαθητές έχει στρατηγική νίκης; (δηλαδή ποιος από τους δύο μαθητές μπορεί να παίξει έτσι, ώστε να νικήσει, ανεξαρτήτως του πως θα παίξει ο άλλος;)

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 2001-2002

1. Να προσδιοριστούν οι τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι ρίζες των εξισώσεων

$$x^2-\alpha x-1=0 \quad \text{και} \quad x^2-\beta x-1=0$$

σχηματίζουν με κατάλληλη διάταξη μία αριθμητική πρόοδο με 4 όρους.

2. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x,y,z) = x^2yz + 3x^2y + 2x^2z + 6x^2 + 11xyz + 22xz + 33xy + 66x.$$

1) Να γράψετε το $P(x,y,z)$ ως γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων.

2) Για ποιες τριάδες φυσικών αριθμών (x,y,z) ισχύει $P(x,y,z)=2002$;

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και ισχύει ΑΒ=ΑΓ=3 και ΒΓ=3. Θεωρούμε σημείο Δ της ΒΓ τέτοιο ώστε ΒΔ=2ΔΓ.

Στο σημείο Δ φέρνουμε ευθεία κάθετη προς την ΑΔ η οποία τέμνει το τόξο ΑΒΓ στο Μ.

Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΒΜΓ συναρτήσει του ΑΜ=κ.

4. Στην Ε.Μ.Ε. γίνονται μαθήματα προετοιμασίας για τις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες για τους 20 μαθητές που προκρίνονται στην τελική φάση. Διδάσκονται 4 μαθήματα: Γεωμετρία, Θεωρία αριθμών, Συνδυαστική, Άλγεβρα.

Δήλωσαν συμμετοχή: στη Γεωμετρία 15 μαθητές, στη Θεωρία αριθμών 13, στη Συνδυαστική 14 και στην Άλγεβρα 19 μαθητές.

Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον μαθητής δήλωσε συμμετοχή και στα 4 μαθήματα.

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 2002-2003

1. Ο πενταψήφιος αριθμός $A=\overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}$ (στο δεκαδικό σύστημα) έχει ψηφία x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 τέτοια, ώστε x_3, x_4, $x_5 > 1$ και $x_1 + x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4x_5 = 121$.

Να βρεθεί ο αριθμός Α.

2. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και τα σημεία Α, Β επάνω στις Οx, Oy, αντιστοίχως, έτσι ώστε ΟΑ+ΟΒ=2λ, λ>0.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Τ στο εσωτερικό της γωνίας $x\hat{O}y$ έτσι ώστε Ε(ΟΑΤΒ) = λ^2, ανεξάρτητα από τη θέση των Α και Β.

3. Αν ο αριθμός $\overline{\alpha\beta\gamma}$ (στο δεκαδικό σύστημα) είναι πρώτος, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (Ε): $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει ρητή ρίζα.

4. Αν $\alpha \geq 1$ και $z \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $|z + \alpha| \leq \alpha$ και $|z^2 + \alpha| \leq \alpha$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον κυκλικό δίσκο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα α.

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 2003-2004

1. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, x, y, z ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2 \text{ και } x^2+y^2=z^2.$$

Να αποδείξετε ότι ικανοποιούν και τη σχέση $(\alpha+x)^2+(\beta+y)^2 \leq (\gamma+z)^2$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΓΔ=6 και ΑΒ=x, όπου x θετικός ακέραιος. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ε. Η παράλληλη από το Ε προς τις βάσεις τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.

Να προσδιορίσετε τις τιμές του x για τις οποίες το μήκος του ΖΗ είναι θετικός ακέραιος.

3. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$ που τέμνει τη ΒΔ στο Λ και την προέκτασή της ΒΑ στο Κ.

Για το σημείο τομής των διαγωνίων Μ ισχύει $MA\cdot M\Gamma+MA\cdot \Gamma\Gamma=MB\cdot M\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι $B\hat{K}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$.

4. Να αποδείξετε ότι για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ισχύει

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)}+\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_2(\alpha_2+\alpha_3)}+\ldots+\frac{\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-1}(\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu)}+\frac{\alpha_1-\alpha_\nu}{\alpha_\nu(\alpha_\nu+\alpha_1)}\geq 0.$$

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 2004-2005

1. Να προσδιορίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς z=x+yi, x,y $\in \mathbb{R}$, που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$|z+1| = 4z - \bar{z} - 6i$$

2. Να προσδιορίσετε τους θετικούς ακέραιους α, β με α>β, τέτοιους ώστε

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2005}\ .$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Ο κύκλος κέντρου Α και ακτίνας ΑΒ=γ τέμνει τη μεσοκάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ, που είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 < 2(\beta^2 - \gamma^2)$.

β) $B\hat{A}\Delta = 2\Delta\hat{A}\Gamma$.

4. Θεωρούμε σύνολο Μ με στοιχεία 2004 θετικούς πραγματικούς αριθμούς με την ιδιότητα:

''Για οποιαδήποτε στοιχεία α, β του Μ με α >β ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς (α+β), (α–β) ανήκει στο σύνολο Μ.''

Να αποδείξετε ότι, αν διατάξουμε τους αριθμούς του συνόλου Μ κατά αύξουσα τάξη, τότε αυτοί αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 2005-2006

1. Για μια συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει: $f\left[f(x)\right] = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το f(1).

β) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $g(x) = x^3 + x^2 f(x) - 2xf^2(x) + 3$ είναι 1–1.

2. Έστω α, β θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\beta} < \sqrt{5}$.

Να δειχτεί ότι $\sqrt{5} - \frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{4\alpha\beta}$.

3. Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ, ΑΔ μη παράλληλη προς το ΒΓ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ.

Να αποδειχτεί ότι υπάρχει σημείο Ρ διάφορο του Ο τέτοιο ώστε ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΡΒΔ και ΡΑΓ να ισούται με το τετράγωνο του λόγου των πλευρών ΡΒ και ΡΑ αντίστοιχα.

4. Έστω 2ν>κ και έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν δια του κ.

Να αποδειχτεί ότι για κάθε ακέραιο λ υπάρχουν δείκτες i, j από το σύνολο {1, 2, 3, ..., ν} τέτοιοι ώστε $\kappa \setminus (\alpha_i + \alpha_j - \lambda)$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right)\left(1 - x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ.

2. Θεωρούμε τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 90^\circ$ και προεκτείνουμε τη χορδή ΑΒ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=ΑΒ. Ονομάζουμε Δ το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ από το Γ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Α προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι: ΚΒ= 2ΚΑ.

3. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha+\beta}} \geq \alpha^\alpha \beta^\beta .$$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν είναι ΜΚ= x, ΜΛ= y, να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$S = x^2 + y^2$$

και τη θέση του σημείου Μ για την οποία λαμβάνεται αυτό.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2+2=3\sqrt{3x-2}.$$

Πρόβλημα 2
Σε ένα "τουρνουά" ποδοσφαίρου συμμετέχουν n ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμό. Αν στο τέλος του "τουρνουά" ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός n των ομάδων που συμμετείχαν.

Πρόβλημα 3
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0,$$

τότε να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό m που είναι τέτοιος ώστε:

$$x+y+z+m\leq 0.$$

Πρόβλημα 4.
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=2\alpha$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\Delta\mathrm{A}+\mathrm{A}\Gamma<\Delta\mathrm{B}+\mathrm{B}\Gamma$.

(ii) Να βρείτε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ για το οποίο το άθροισμα $\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M}\Gamma$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Για το σημείο Μ που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$x^2 + 4y^2 = 4a^2$$

$$ax - y = 2a,$$

έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε, να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x + y + z$ και $S_2 = xy + yz + zx$, όπου $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = 6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1S_2 - 6$. ***Μονάδες 4***

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$. ***Μονάδες 1***

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ , ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1 < k < 30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Η ακολουθία a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1} = a_n + kn,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

όπου k θετικός ακέραιος και $a_1 = 1$. Να βρείτε για ποια τιμή του k ο αριθμός 2011 είναι όρος της ακολουθίας a_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC και έστω M_1, M_2, M_3 τυχόντα σημεία των πλευρών του BC, AC, AB αντίστοιχα. Έστω ακόμη τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων AH_2H_3, BM_1H_3, CM_1H_2 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_1), οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BH_1H_3, AM_2H_3, CM_2H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_2) και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων CH_1H_2, AM_3H_2, BM_3H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_3). Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Αν $a,b,x,y \in \mathbb{R}$ με $(a,b) \neq (0,0)$ και $(x,y) \neq (0,0)$ και ισχύουν

$$a\left(x^2 - y^2\right) - 2bxy = x\left(a^2 - b^2\right) - 2aby$$
$$b\left(x^2 - y^2\right) + 2axy = y\left(a^2 - b^2\right) + 2abx,$$

να αποδείξετε ότι $x = a$ και $y = b$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$, όπου $\mathrm{r} = 15cm$, σε απόσταση $9cm$ από το κέντρο του κύκλου. Να βρείτε τον αριθμό των χορδών του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{aligned} x^2+2xy &= 5 \\ y^2-3xy &= -2. \end{aligned}$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΟΒ (έστω (c_1)), τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΒΓ στο σημείο Ν. Έστω (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΚΝ και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΓΚ. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Η ακολουθία $a_n, n\in\mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1}=a_n-\frac{k}{2^n},\ n\in\mathbb{N}^*,\ a_1=1,$$

όπου k θετικός ακέραιος.

(i) Να προσδιορίσετε το γενικό όρο a_n της ακολουθίας ως συνάρτηση των n και k.

Μονάδες 2

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι k, n τέτοιοι ώστε : $a_n=\frac{1}{2^{1000}}$.

Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος α_ν, $\nu = 1,2,3,\ldots$ που έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha \neq 0$, διαφορά $\omega \neq 0$ και είναι τέτοια ώστε ο λόγος του αθροίσματος $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της προς το άθροισμα $\alpha_{\nu+1} + \cdots + \alpha_{3\nu}$ των επόμενων 2ν το πλήθος όρων της είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος του ν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4},\ y^2 = \frac{8x^4}{16+x^4},\ z^2 = \frac{8y^4}{16+y^4}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2, \Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{4x^2 - ax + b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 16b$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ