Ευκλείδης Ά Λυκείου 1994-1995

1. Έχουμε στο επίπεδο 4 διαφορετικές ευθείες. Είναι γνωστό ότι κάθε άλλη ευθεία του ίδιου επιπέδου τέμνει ή 2 ή 4 από τις ευθείες. Να βρείτε πόσες από τις ευθείες είναι παράλληλες.

2. Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί και x, y είναι θετικοί πραγματικοί διαφορετικοί από το 0, να δείξετε ότι:

$$\left(\alpha\frac{x}{y}+\beta\right)^2+\left(\alpha\frac{y}{x}+\beta\right)^2\geq 2(\alpha+\beta)^2$$

3. Έχουμε ένα τετράγωνο 3x3 (σχήμα 1), κάθε τετραγωνάκι του οποίου περιέχει τον αριθμό 0. Παίρνουμε τυχαίο τετράγωνο 2x2 μέσα στο προηγούμενο, και σε κάθε τετραγωνάκι του προσθέτουμε στον ήδη υπάρχον αριθμό τον αριθμό 1.

Εξετάστε αν είναι δυνατό μετά από κάποιο αριθμό τέτοιων προσθέσεων να βγει το τετράγωνο του σχήματος 2.

0	0	0
0	0	0
0	0	0

σχήμα 1

10	9	6
8	18	14
3	11	5

σχήμα 2

4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τέτοιοι ακέραιοι αριθμοί x, y ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$x^2 + 4y = 1995.$$

Ευκλείδης Α Λυκείου 1995-1996

1. Η εξίσωση $(E):\ \kappa(x-2)+3\lambda=5x+2$ αληθεύει για κάθε πραγματικό x.

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $(E'):\ \kappa(\lambda-4)x+2\lambda=\kappa$ είναι αδύνατη.

2. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια ακεραίων x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $(E):\ x^2=y^2+2y+9.$

3. Έστω Μ σημείο στη πλευρά ΑΒ ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Ισχύουν:

1) ΑΜ=5,1cm, και ΑΜ>ΜΒ.

2) Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι 47,6cm .

3) Το άθροισμα των περιμέτρων του τετραπλεύρου ΑΜΓΔ και του τριγώνου ΜΒΓ είναι 74,79cm.

Να εξετάσετε αν όλα τα παραπάνω είναι αληθινά.

4. Σε μια σκακιέρα 6 x 6 θέλουμε να τοποθετήσουμε πιόνια, ώστε:

δύο πιόνια να μη βρίσκονται σε γειτονικά τετραγωνάκια (δηλ. τετραγωνάκια με κοινή πλευρά), και επιπλέον σε κάθε τετραγωνάκι είτε να υπάρχει πιόνι είτε να είναι γειτονικό με ένα τετραγωνάκι με πιόνι.

Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο και τον μέγιστο αριθμό από πιόνια που μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σκακιέρα, ώστε να ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις.

Ευκλείδης Ά Λυκείου 1996-1997

1. Έστω οιι αριθμοί α, β με $\alpha^2-4\alpha+\beta^2+10\beta+20=0.$

Να δειχτεί ότι α>β.

2. Έστω κύκλος διαμέτρου ΑΒ και σημείο Γ εξωτερικό του κύκλου. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το Γ στρέφεται ώστε να μη διέρχεται από σημείο εσωτερικό του ΑΒ.

Έστω Α', Β' οι προβολές των Α, Β επί της (ε). Να βρεθεί η θέση της (ε) για την οποία το άθροισμα (ΑΑ')+(ΒΒ') γίνεται μέγιστο.

3. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x^2-4x-19^{96}-96^{19}-2000=0$ δεν έχει ακέραια λύση.

4. Έστω οι αριθμοί α, β, γ, δ τοποθετημένοι στις θέσεις:

α	β
γ	δ

Κάνουμε την παρακάτω κίνηση: Είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας γραμμής, είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας στήλης.

Να δειχτεί ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο

0	0
0	0

αν και μόνο αν $\alpha+\delta=\beta+\gamma.$

Ευκλείδης Α Λυκείου 1997-1998

1. Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου.

Να δειχτεί ότι $2<\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}-\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}\leq 3.$

2. Στο εσωτερικό της γωνίας $x\hat{O}y=90^o$ θεωρούμε το σημείο Γ και στις πλευρές της Ox, Oy τα A, B αντίστοιχα.

Να δειχτεί ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 2(ΟΓ).

3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=108^o$ και ΓΔ η διχοτόμος του. Φέρνουμε την κάθετη στη ΓΔ στο Δ, που τέμνει τη ΒΓ στο Ε.

Να δειχτεί ότι ΒΕ=ΑΔ.

4. Έστω $\nu\in\mathbb{N}$, ν>0. Να δειχτεί ότι οι αριθμοί $\nu(\nu-1)$ και $(\nu+1)^2$ έχουν διαφορετικό άθροισμα ψηφίων.

Ευκλείδης Α Λυκείου 1998-1999

1. Έστω α, β, γ $\in Q^*_+$, με $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\alpha\beta\gamma \quad (1)$.

Να δειχτεί ότι ο αριθμός $A=(\alpha^2\beta^2+1)(\beta^2\gamma^2+1)(\gamma^2\alpha^2+1)$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

2. Έστω κύκλος (Ο,2) και τετράγωνο ΟΑΒΓ. Το τετράγωνο και ο κύκλος έχουν κοινό μέρος εμβαδού ίσο με τα $\frac{3}{5}$ του εμβαδού του τετραγώνου.

Να υπολογιστεί η πλευρά του τετραγώνου.

3. Να εξεταστεί αν υπάρχουν 4 διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί ώστε το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτούς να είναι δύναμη του 5.

4. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε σημεία των ΑΒ, ΑΓ.

Να δειχτεί ότι τα τμήματα ΔΕ, ΒΕ, ΓΔ αποτελούν πλευρές τριγώνου.

Ευκλείδης Ά Λυκείου 1999-2000

1. Δύο αμβλείες γωνίες είναι τοποθετημένες έτσι, ώστε το ένα ζεύγος των πλευρών τους να είναι αντικείμενες ημιευθείες, ενώ το άλλο ζεύγος είναι κάθετες ημιευθείες.

Να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών.

2. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν: x−yz=y−zx=z−xy.

Να δειχτεί ότι: (x−y)(y−z)(z−x)=0.

3. Έστω $\alpha, x, y \in P$ με $\alpha \geq 2,\ 1 \leq x \leq \alpha$ και $1 \leq y \leq \alpha.$

Να δειχτεί ότι: $4 \leq (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) < \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}.$

4. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α, β που ικανοποιούν την εξίσωση
$(E):\ \alpha^5\beta^2 + 100\alpha^3 = 200.$

Ευκλείδης Α Λυκείου 2000-2001

1. Αν α και x πραγματικοί με $\alpha \geq 0$, να δειχτεί ότι $\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+a-1}} \geq 2.$

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Θεωρούμε 100 αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{100}$ από τους οποίους οι 40 είναι ίσοι με 1 και οι 60 με 2 και τους τοποθετούμε πάνω σε ένα κύκλο έτσι, ώστε να μην υπάρχουν τρεις ίσοι αριθμοί σε διαδοχικές θέσεις. Σχηματίζονται έτσι 100 τριάδες T_i , i=1, 2, ..., 100, αριθμών σε διαδοχικές θέσεις πάνω στον κύκλο.

Έστω P_i είναι το γινόμενο και S_i είναι το άθροισμα των τριών αριθμών της τριάδας T_i , i=1, 2, ..., 100.

Να δειχτεί ότι:

1) $P_i = 2S_i - 6$, για κάθε i=1, 2, ..., 100.

2) $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{100} = 360$.

3. α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $x^4 + 4y^4$.

β) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $y \geq 2$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x^4 + 4y^4$ είναι σύνθετος.

4. Θεωρούμε τις κάθετες ημιευθείες Ot, Os, το σημείο A της Ot με OA=x και το σημείο B της Os με OB=y και y<x. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ μέσα στη γωνία $t\hat{O}s$. Από την κορυφή Δ φέρνουμε ευθεία ε κάθετη στη διχοτόμο Οδ της γωνίας $t\hat{O}s$ η οποία τέμνει την Os στο E και την Ot στο Z.

Να δειχτεί ότι:

1) AZ=x+y και BE=2x.

2) Το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

Ευκλείδης Α Λυκείου 2001-2002

1. Τριψήφιος αριθμός είναι μεγαλύτερος του 610, μικρότερος του 650 και διαιρούμενος με το 7 δίνει υπόλοιπο 3.

Να βρεθεί ο αριθμός, αν είναι γνωστό ότι είναι πολλαπλάσιο του 5.

2. Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $A=\left(1+\alpha-\alpha^2+\alpha^3\right)^2+\alpha^3$.

3. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^o\right)$ με ΑΒ>ΑΓ. Από το μέσον Μ της υποτείνουσας ΒΓ φέρνουμε κάθετη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΑΓ είναι ίσα.

Να βρεθούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

4. Έστω $A=\dfrac{1}{\sqrt{9x^2-6x+1}}$ και $B=\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+1}}$.

Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες η αριθμητική τιμή της παράστασης $\Pi=\dfrac{2A+B}{3}$ είναι ακέραιος αριθμός.

Ευκλείδης Α Λυκείου 2002-2003

1. Να λυθεί ως προς x η εξίσωση $(E):\ \frac{3\alpha+1}{\alpha+x}-\frac{\alpha-1}{\alpha-x}=\frac{2\alpha\left(\alpha^2-1\right)}{x^2-\alpha^2},\alpha\in P.$

Για ποιες θετικές ακέραιες τιμές του α οι ρίζες της (Ε) είναι αριθμοί πρώτοι;

2. α) Έστω α είναι πραγματική παράμετρος και ισχύει $\frac{2\alpha}{x^2-\alpha^2}=\frac{A}{x-\alpha}-\frac{B}{x+\alpha}$, για κάθε $x\in P-\{-\alpha,\alpha\}$.

Να βρείτε τους αριθμούς Α και Β.

β) Αν $x\neq\mu$, όπου $\mu\in\{-10,-9,\dots,-1,0,1,\dots,9,10\}$, να δειχτεί ότι:

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\dots+\frac{20}{x^2-100}=11\left[\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\dots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right].$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=120^o$. Οι ΑΔ, ΒΕ, ΔΖ είναι διχοτόμοι των γωνιών του. Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{E}Z$.

4. Αν x,y,z>0 να δειχτεί ότι $\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\leq\frac{1}{xyz}.$

Ευκλείδης Ά Λυκείου 2003-2004

1. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z, w. Αν αντικαταστήσουμε τους x, y, z, w με τους αριθμούς $x_1 = x + 10,\quad y_1 = y + 10,\quad z_1 = z + 10,\quad w_1 = w + 10,$ τότε είναι $x_1 + y_1 + z_1 + w_1 = 1040.$ Αν αντικαταστήσουμε τους x, y, z, w με τους αριθμούς

$x_2 = 10 - x,\quad y_2 = 20 - y,\quad z_2 = 30 - z,\quad w_2 = 40 - w,$

πόσο θα είναι το άθροισμα $x_2 + y_2 + z_2 + w_2;$

2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\nu^2+5\nu+5$, δεν είναι τέλειο τετράγωνο για οποιοδήποτε $\nu \in \mathbb{N}.$

3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Γράφουμε τον κύκλο (Α,α). Από τυχαίο σημείο Μ του τόξου ΒΔ που βρίσκεται μέσα στο τετράγωνο φέρνουμε κάθετη προς την ακτίνα ΑΜ, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Ε και την ΓΔ στο Ζ.

Να δειχτεί ότι:

α) ΕΖ=ΒΕ+ΔΖ.

β) $\frac{\alpha}{2} < EZ < \alpha.$

4. Οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι με $\mu \le 6008.$

Να προσδιορίσετε τη μικρότερη δυνατή θετική τιμή του αριθμού $A = 3 - \frac{\mu}{\nu}.$

Ευκλείδης Α Λυκείου 2004-2005

1. Ένας μαθητής θέλει να αγοράσει δύο βιβλία. Το βιβλίο Α κοστίζει το 60% των χρημάτων που έχει μαζί του, ενώ το βιβλίο Β κοστίζει το 44% των χρημάτων που έχει μαζί του.

Αν είχε 0,80€ περισσότερα, τότε θα είχε ακριβώς τα χρήματα που κοστίζουν και τα δύο βιβλία μαζί.

Να βρείτε πόσα χρήματα κοστίζει κάθε ένα από τα δύο βιβλία.

2. Έστω β και γ είναι τα μήκη των καθέτων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα α.

Να δειχτεί ότι $\beta^4+\beta^2\gamma^2+\gamma^4\geq\frac{3}{4}\alpha^4$.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΔ το ύψος του. Στα σημεία Β και Γ παίρνουμε κάθετα τμήματα ΒΕ και ΓΖ προς τη ΒΓ, τέτοια ώστε $BE=\Gamma Z=\frac{1}{2}A\Delta$ και τα Ε, Ζ να βρίσκονται σε διαφορετικό ημιεπίπεδο από το Α ως προς τη ΒΓ.

1) Να δειχτεί ότι ΑΕ=ΑΖ.

2) Αν είναι Ε(ΑΒΓ) =κ^2, να προσδιορίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΕΖ και ΑΚΛ, όπου Κ, Λ είναι τα σημεία τομής των ΑΕ και ΑΖ με τη ΒΓ, αντίστοιχα.

4. Έστω $A=2\left(\lambda^2+\mu^2\right)-(\lambda+\mu)^2-4$ και $B=\lambda^2-\lambda\mu+\lambda+\mu-2,\ \lambda,\mu\in P$

Να λύσετε την εξίσωση (Ε): Α x=Β, ως προς x, για τις διάφορες τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ και μ.

Ευκλείδης Ά Λυκείου 2005-2006

1. Έστω ότι οι ακέραιοι α και α+2 είναι πρώτοι με α>3.

Να δειχτεί ότι ο αριθμός α+4 είναι σύνθετος.

2. Οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει α+β=λ.

Να δειχτεί ότι $\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{1}{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\beta+\lambda} < \frac{3}{2\lambda}$.

3. Δίνεται σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Πόσα σημεία Δ υπάρχουν στο επίπεδο του τριγώνου τέτοια ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ να έχει άξονα συμμετρίας διαφορετικό από πλευρά του τριγώνου;

4. Έστω Α και Β δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα των οποίων η ένωση είναι το σύνολο Σ= {1, 2, 3, 4, 5}.

Να αποδειχτεί ότι ένα τουλάχιστον από τα Α και Β περιέχει τουλάχιστον τη διαφορά δύο στοιχείων του.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ και η παράσταση

$$\mathrm{K} = \frac{\alpha|\delta-\gamma| + \alpha|\delta-\varepsilon| + \varepsilon|\beta-\alpha| + \varepsilon|\beta-\gamma|}{|\beta-\alpha| + |\beta-\gamma| + |\delta-\gamma| + |\delta-\varepsilon|}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι: $\beta < \mathrm{K} < \delta$.

(ii) Αν είναι

$$x = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta),\ y = (\alpha+\gamma)(\beta+\delta),\ z = (\alpha+\delta)(\beta+\gamma),$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς x, y, z.

2. Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ υπάρχει σημείο Μ τέτοιο ώστε $\widehat{\mathrm{MB\Gamma}} = \widehat{\mathrm{M\Gamma B}}$ και πάνω στις ΜΒ και ΜΓ υπάρχουν σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ και $\widehat{\mathrm{MA\Delta}} = \widehat{\mathrm{MAE}}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

3. Αν είναι $x, y > 0$ και $x^3 + y^2 \le 64$, να αποδείξετε ότι:

$$x^4 + y^3 < 512.$$

4. Έχουμε κέρματα και χαρτονομίσματα των 1, 10 και 100 ευρώ. Είναι δυνατόν με 1000 ακριβώς από αυτά να σχηματίσουμε το ποσό των 50000 ευρώ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K} = (x+y)^3 - (x-y)^3 - 6x^2y - y^3$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύει ότι

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x-a)^3 - (x-b)^3 - x^3 = 0.$$

.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB} = 2\alpha$ και $\mathrm{A\Delta} = \alpha$. Να αποδείξετε ότι το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ έχει την ιδιότητα:

το άθροισμα $\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M\Gamma}$ είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

Πρόβλημα 4

Αν οι αριθμοί x, y, z είναι τέτοιοι ώστε $x > 0, y+1 > 0, z+2 > 0$ και $x + y + z = 3$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \le 3.$$

Για ποιες τιμές των x, y, z ισχύει η ισότητα;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α, για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

Μονάδες 2

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$ είναι άρρητος.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x + 1 - 2|x| = \alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.
Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1, B_1, C_1 τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του A, B, C. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC, AC, AB θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, C_2, αντίστοιχα, και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A_1, A_2, (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1, C_2.
Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1), (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1), (\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3 - y^3 = 26z^3$$
$$x^2y - xy^2 = 6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z. ***Μονάδες 3***

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x + 2y + 3z = 8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z.

Μονάδες 2

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α, β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

Μονάδες 3

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x = \sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Μονάδες 2

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x| - 2\right)^2 = x^2 + 4\alpha ,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία (ε) που διέρχεται από την κορυφή του Α και είναι παράλληλη προς τη πλευρά ΒΓ . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{B}}$ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Δ και έστω Ε το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή Α . Από το Α τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την ΕΒ η οποία τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Μ και τη ΒΓ στο σημείο Κ . Να αποδείξετε ότι: $\text{AB} = \text{BK} = \text{K}\Delta = \Delta\text{A}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + \beta + \gamma = 2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2 .$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\le\frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{\left[(1+ax)^2-(a+x)^2\right]}{1-a^2}=\frac{ab}{(a-b)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a,b με $ab(a-b)(1-a^2)\neq 0$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=90^\circ$ και $\hat{A}<45^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΒΓ και ΑΓ, αντίστοιχα, και σημείο Μ διαφορετικό από το Α στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΒΜ τέμνει την ευθεία ΔΕ στο Ζ και την ευθεία ΑΓ στο Θ, να αποδείξετε ότι:

(α) $B\hat{M}Z=\hat{A}$.

(β) Η ευθεία ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{B}E$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Αν υπάρχουν ακέραιοι x,y,a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2+(y^2-a^2)x+y(y-a)^2=0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ