Ευκλείδης Β' Λυκείου 1993-1994

ΜΕΡΟΣ Α

1. Δύο ίσα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ πλευράς 10 τοποθετούνται έτσι ώστε η κορυφή Ε να βρίσκεται στο κέντρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Το εμβαδό του μέρους του επιπέδου που καλύπτεται κατ' αυτόν τον τρόπο είναι

α) 75 β) 10 γ) 125 δ) 150 η) 175

2. Τρεις κύβοι με όγκο 1, 8, 27 είναι κολλημένοι μεταξύ τους στις έδρες τους. Η ελάχιστη δυνατή επιφάνεια του σχηματιζόμενου στερεού έχει εμβαδό

α) 36 β) 56 γ) 70 δ) 72 η) 74

3. Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί, συμβολίζουμε με m(x,y) τον μικρότερο από τους x, y και αντίστοιχα με M(x,y) τον μεγαλύτερο από τους x, y.

Αν $\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$ τότε $M\{M[\alpha,m(\beta,\gamma)]\ ,m[\delta,m(\alpha,\varepsilon)]\} =$

α) α β) β γ) γ δ) δ ε) ε

4. Σ' ένα σάκο υπάρχουν μπλε και κόκκινοι βόλοι. Αν αφαιρέσουμε από τον σάκο ένα κόκκινο βόλο, τότε το ένα έβδομο των υπόλοιπων βόλων είναι κόκκινοι. Αν, αντί του κόκκινου βόλου αφαιρέσουμε από τον σάκο δύο μπλε βόλους, τότε το ένα πέμπτο των υπόλοιπων βόλων είναι κόκκινοι.

Πόσοι βόλοι υπήρχαν στο σάκο;

α) 8 β) 22 γ) 36 δ) 57 η) 71

5. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις 8 και $2\sqrt{2}$ έχει το ίδιο κέντρο μ' ένα κύκλο ακτίνας 2.

Το κοινό εμβαδό των δύο γεωμετρικών σχημάτων είναι

α) 2π β) $2\pi+2$ γ) $4\pi-4$ δ) $2\pi+4$ η) $2\pi-2$

6. Μέσα σ' ένα κουτί υπάρχουν:

μία σφαίρα σημαδεμένη με τον αριθμό 1

δύο σφαίρες σημαδεμένες με τον αριθμό 2

τρεις σφαίρες σημαδεμένες με τον αριθμό 3 ...

και πενήντα σφαίρες σημαδεμένες με τον αριθμό 50.

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός σφαιρών που πρέπει να τραβήξουμε τυχαία από το κουτί για να είμαστε σίγουροι ότι θα υπάρχουν δέκα σφαίρες σημαδεμένες με τον ίδιο αριθμό;

α) 10 β) 51 γ) 415 δ) 451 η) 501

7. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. με λόγο $\lambda \neq 1$ και οι αριθμοί α, 2β, 3γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., τότε ο λόγος λ ισούται με

α) $\frac{1}{4}$ β) $\frac{1}{3}$ γ) $\frac{1}{2}$ δ) 2 η) 4

8. Εννέα καρέκλες σε ευθεία γραμμή πρόκειται να καλυφθούν από 6 μαθητές και 3 καθηγητές Α, Β, Γ. Οι καθηγητές φθάνουν πριν από τους μαθητές και αποφασίζουν να επιλέξουν τις καρέκλες τους έτσι, ώστε κάθε καθηγητής να έχει αμέσως δεξιά του και αμέσως αριστερά του μαθητή.

Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι καθηγητές να διαλέξουν τις καρέκλες τους;

α) 12, β) 36, γ) 60, δ) 84, η) 630.

9. Αν α, β είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$|\alpha|\beta + \beta^3 = 0$ και $|\alpha| + \beta = 3$,

τότε ο πλησιέστερος ακέραιος στον αριθμό α – β είναι

α) –3 β) –1 γ) 2 δ) 3 η) 5

10. Αν ρίξουμε ν ζάρια, η πιθανότητα να πάρουμε άθροισμα 1994 είναι θετική και ισούται με την πιθανότητα να πάρουμε ως άθροισμα κάποιο αριθμό Α.

Η μικρότερη δυνατή τιμή του Α είναι

α) 333 β) 335 γ) 337 δ) 339 η) 341

ΜΕΡΟΣ Β

1. Έστω β>3, β ακέραιος, μία βάση την οποία χρησιμοποιούμε για την παράσταση αριθμών (στο δεκαδικό σύστημα β=10).

Να αποδειχτεί ότι ο αριθμός που έχει παράσταση 131 στη βάση β δεν μπορεί να είναι τετράγωνο ακέραιου αριθμού.

2. Μία κοινή εσωτερική εφαπτομένη δύο κύκλων τέμνει τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων αυτών στα σημεία Α και Δ. Η ευθεία ΑΔ συναντά τους κύκλους στα σημεία Β και Γ.

Να αποδειχτεί ότι ΑΒ=ΓΔ.

3. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x τέτοιοι, ώστε ο αριθμός

$A = [(x^2+3)^{\frac{1}{2}} + x]^{\frac{1}{3}} - [(x^2+3)^{\frac{1}{2}} - x]^{\frac{1}{3}}$ να είναι ακέραιος.

Ευκλείδης Β' Λυκείου 1995-1996

1. Έστω πολυώνυμο $P(x)=x^{\nu}+(\nu-1)x^{\nu-1}+\nu,\ \nu\in\mathbb{N},\ \nu\neq 0.$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει ν, ώστε $P(2)=3\cdot 2^{\nu-1}+1.$

β) Να αποδείξετε ότι $P(1)=2\cdot P(1-\nu).$

2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=2\hat{B}$, ΑΔ-διχοτόμος, Ε το μέσο της ΑΓ και η ΔΕ είναι παράλληλη προς την ΑΒ.

Να βρεθούν οι γωνίες του ΑΒΓ.

3. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ευθείες ε και ε_1 που διέρχονται από το Α και τέμνουν τις ΒΔ, ΓΔ, ΒΓ στα Ε, Ζ, Η και Κ, Λ, Μ αντίστοιχα.

Αν $AE=\lambda\cdot AK,\ (\lambda>0)$, να δειχτεί ότι: $\dfrac{(EZ)(EH)}{(K\Lambda)(KM)}=\lambda^2.$

4. Σε 14 κουτιά υπάρχουν 25 σοκολάτες και είναι γνωστό ότι κάθε κουτί περιέχει 1 ή 2 ή 3 σοκολάτες. Ακόμα γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των κουτιών με μια σοκολάτα είναι μεγαλύτερος του 6 και ότι ο αριθμός των σοκολατών στα κουτιά με 2 ή 3 σοκολάτες είναι μεγαλύτερος από 17.

Να προσδιορίσετε πόσα κουτιά περιέχουν μία, δύο ή τρεις σοκολάτες.

Ευκλείδης Β' Λυκείου 1996-1997

1. Έστω οι αριθμοί α, β, γ, δ τοποθετημένοι στις θέσεις:

α	β
γ	δ

Κάνουμε την παρακάτω κίνηση: Είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας γραμμής, είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας στήλης.

Να δειχτεί ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο

0	0
0	0

αν και μόνο αν $\alpha+\delta=\beta+\gamma$.

2. Να λυθεί στο σύνολο των ακεραίων το σύστημα $\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=155 \\ x+y+z=21 \end{matrix}\right\}$.

3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Ε, η διχοτόμος της $A\hat{E}\Gamma$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η ΒΖ τέμνει τον κύκλο στο Κ και τη ΓΕ στο Λ.

Να δειχτεί ότι $\frac{KZ}{K\Lambda}=\frac{AZ}{A\Gamma}\cdot\frac{EB}{E\Lambda}$.

4. Έστω το σύνολο $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu\}$, $\alpha_i\geq 0$, $i=1,2,\dots,\nu$. Για κάθε i, j υπάρχει κ, $(1\leq i,j,\kappa\leq\nu)$ ώστε $\alpha_\kappa=\frac{1}{2}|\alpha_i-\alpha_j|$.

Να δειχτεί ότι $\alpha_i=0$ για όλα τα i.

Ευκλείδης Β' Λυκείου 1997-1998

1. Έστω α,β ∈ N^* και $A=\dfrac{\alpha^3+1}{\beta+1}+\dfrac{\beta^3+1}{\alpha+1}\in N^*$.

Να δειχτεί ότι οι αριθμοί $\dfrac{\alpha^3+1}{\beta+1}$, $\dfrac{\beta^3+1}{\alpha+1}$ είναι φυσικοί.

2. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ= $\sqrt{2}$ ΑΔ. Με διάμετρο την ΓΔ γράφουμε ημικύκλιο στο εξωτερικό του ΑΒΓΔ και συνδέουμε τυχαίο σημείο Μ του ημικυκλίου με τα Α, Β. Έστω Κ, Λ οι τομές των ΜΑ, ΜΒ με την ΓΔ.

Να δειχτεί ότι $ΔΛ^2 + ΔΚ^2 = ΑΒ^2$.

(Η άσκηση αυτή κατασκευάστηκε από τον P. Fermat και λύσεις έδωσαν οι L.Euler, R Simson κ.α.)

3. Να δειχτεί ότι ο αριθμός $A=\underbrace{11...1}_{\nu\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}2\underbrace{11...1}_{\nu\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}$ είναι σύνθετος για κάθε ν ∈ N^*.

4. Έστω $0\le\alpha,\beta,\gamma,\delta\le1$ και $0\le x,y,z,w\le\frac{1}{2}$ ώστε α+β+γ+δ=x+y+z+w=1 (1).

Να δειχτεί ότι αx+βy+γz+δw ≤ $\min\left\{\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\alpha+\gamma}{2,}\dfrac{\alpha+\delta}{2},\dfrac{\beta+\gamma}{2},\dfrac{\beta+\delta}{2},\dfrac{\gamma+\delta}{2}\right\}$.

Ευκλείδης Β' Λυκείου 1998-1999

1. Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ με f(1)=1999 και ισχύει $f(1)+f(2)+...+f(\nu)=\nu^2 f(\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.
Να υπολογιστεί ο f(1999).

2. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι ν, για τους οποίους η εξίσωση
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\nu}{x+y}$, $xy(x+y)\neq 0$ έχει ακέραιες λύσεις.

3. Για $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu \in P$ ονομάζουμε άθροισμα Cesaro τον αριθμό $C_\nu=\frac{s_1+s_2+...=s_\nu}{\nu}$, όπου $s_\kappa=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa$.

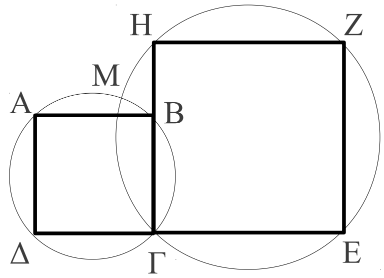
Το άθροισμα Cesaro των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{99}$ είναι 1000.

Να υπολογιστεί το άθροισμα Cesaro των αριθμών $1, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{99}$.

4. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρο. Από το Θ παίρνουμε ευθεία που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα.
Να δειχτεί ότι $\left(\frac{BK}{AK}\right)^4+\left(\frac{\Gamma\Lambda}{A\Lambda}\right)^4\geq\frac{1}{8}$.

Ευκλείδης Β' Λυκείου 1999-2000

1. Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΕΖΗ είναι τετράγωνα και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι τους τέμνονται στα Γ και Μ.



Να δειχτεί ότι:

1) Τα σημεία Δ, Μ και Η είναι συνευθειακά.

2) Τα σημεία Μ, Β και Ε είναι συνευθειακά.

2. Να δειχτεί ότι $2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-5\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6\geq 0$ για όλους τους πραγματικούς x, y με xy≠0.

3. Έστω κύκλος (Ο,R) και χορδή του ΒΓ μήκους α<2R. Σημείο Α κινείται στο τόξο ΒΓ έτσι ώστε $B\hat{A}\Gamma<90^o$.

Να προσδιορίσετε τη θέση του Α, για την οποία η παράσταση $AB^2+A\Gamma^2$ γίνεται μέγιστη και να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης.

4. Ο εξαψήφιος αριθμός $\overline{\alpha 2000\beta}$ είναι πολλαπλάσιο του 99.

Να βρεθούν τα ψηφία α και β.

Ευκλείδης Β' Λυκείου 2000-2001

1. Έστω κύκλος (O,R), μια διάμετρός του ΑΒ και ένα σημείο του Γ διαφορετικό των Α, Β. Θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Β και Γ αντιστοίχως, οι οποίες τέμνονται στο Ρ. Η κάθετος από το Γ προς τη διάμετρο ΑΒ την τέμνει στο Δ, ενώ η ευθεία ΑΡ τέμνει την ευθεία ΓΔ στο Ε.

Να υπολογιστεί ο λόγος $\frac{ΓΕ}{ΓΔ}$.

2. Για x,y,z>0 να αποδειχτεί ότι:

α) $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \le x+y$

β) $f(x,y,z) = \frac{x^3}{x^2+xy+y^2} + \frac{y^3}{y^2+yz+z^2} + \frac{z^3}{z^2+zx+x^2} \le x+y+z.$

3. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=3α και τα σημεία του Γ και Θ με ΒΓ=α, ΒΘ=2α. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΒΓΔΕ και ΒΘΗΖ εκατέρωθεν του ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΒ, ΔΖ και ΕΗ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

4. Δύο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:

Πάνω σε ένα κύκλο δίνονται 100 διαφορετικά σημεία και οι δύο μαθητές διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο γράφουν μια χορδή, διαφορετική κάθε φορά, με άκρα δύο οποιαδήποτε από τα 100 δεδομένα σημεία. Το παιχνίδι τελειώνει όταν καθένα από τα 100 σημεία χρησιμοποιηθεί ως άκρο χορδής μία τουλάχιστον φορά. Νικητής είναι ο μαθητής ο οποίος θα γράψει τη χορδή με την οποία τελειώνει το παιχνίδι.

Αν ο μαθητής Α αρχίσει πρώτος, ποιος από τους δύο μαθητές έχει στρατηγική νίκης; (δηλαδή ποιος από τους δύο μαθητές μπορεί να παίξει έτσι, ώστε να νικήσει, ανεξαρτήτως του πως θα παίξει ο άλλος;)

Ευκλείδης Β' Λυκείου 2001-2002

1. Να βρείτε όλες τις τιμές του α $\in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα $(\Sigma):\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2+2x\le 1 \\ x-y+\alpha=0 \end{array}\right\}$ έχει μοναδική λύση και για τις τιμές αυτές να το λύσετε.

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$. Από σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρνουμε δύο ευθείες που χωρίζουν το τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία τρίγωνα ίσα μεταξύ τους.

Να δειχτεί ότι:

1) Το σημείο Δ είναι εσωτερικό σημείο της πλευράς ΑΒ, δηλαδή δεν είναι ένα από τα άκρα του.

2) $\hat{B}=30^o$.

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}<90^o$. Φέρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ κάθετο και ίσο προς την πλευρά ΑΒ καθώς και ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ κάθετο και ίσο προς την πλευρά ΑΓ, έτσι ώστε $\Delta\hat{A}E<90^o$.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το Α και το μέσον της ΒΕ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ.

4. Στην Ε.Μ.Ε. γίνονται μαθήματα προετοιμασίας για τις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες για τους 20 μαθητές που προκρίνονται στην τελική φάση. Διδάσκονται 4 μαθήματα: Γεωμετρία, Θεωρία αριθμών, Συνδυαστική, Άλγεβρα.

Δήλωσαν συμμετοχή: στη Γεωμετρία 15 μαθητές, στη Θεωρία αριθμών 13, στη Συνδυαστική 14 και στην Άλγεβρα 19 μαθητές.

Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον μαθητής δήλωσε συμμετοχή και στα 4 μαθήματα.

Ευκλείδης Β' Λυκείου 2002-2003

1. Για τους ακέραιους α, β ισχύει $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι το α+β είναι τέλειο τετράγωνο.

β) Να βρείτε τα ζεύγη (α,β) των ακεραίων που ικανοποιούν την (1).

2. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε 25 σημεία με συντεταγμένες (κ,λ), όπου κ,λ ∈ {0, 1, 2, 3, 4}.

Να προσδιορίσετε το πλήθος των τετραγώνων που κατασκευάζονται με κορυφές 4 από τα 25 δεδομένα σημεία.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^o)$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΓΕ. Έστω Μ το μέσο της ΑΒ και ΜΔ=u, ΜΕ=v.

Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ, ως συνάρτηση των u, v.

4. Αν ισχύει $2\alpha^6-2\alpha^4+\alpha^2=\dfrac{3}{2}$, να δειχτεί ότι $\alpha^8>1$.

Ευκλείδης Β' Λυκείου 2003-2004

1. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την εξίσωση
$(E):\ (9x^2-3x+3)(4y^2+12y+29)=55.$

2. Έστω α, β θετικοί ακέραιοι με $1\leq\beta\leq\alpha.$ Θεωρούμε και τους αριθμούς
$A=\left(\sqrt{\alpha^2+\beta}-\alpha\right)^2$, $B=\left(\sqrt{\alpha^2+\beta}+\alpha\right)^2$.

Να δειχτεί ότι:

1) Ο αριθμός $\sqrt{\alpha^2+\beta}$ είναι άρρητος.

2) Ο αριθμός Α είναι άρρητος με 0<Α<0,25.

3) Ο αριθμός Β είναι άρρητος με δεκαδικό μέρος μεγαλύτερο του 0,75.

3. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α και σημεία Δ, Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα, έτσι ώστε $\Gamma\Delta=\frac{\alpha}{3}$, Ε μέσον της ΓΑ και $ZA=\frac{3\alpha}{3}$.

Να βρεθεί η γωνία $\Delta\hat{E}Z$.

4. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΒΓ<ΑΒ<2ΒΓ. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ παίρνουμε τα σημεία Μ, Ρ και Ν, αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΜΒ=ΓΡ=ΔΝ=ΑΒ –ΒΓ.

1) Να βρεθεί η γωνία $P\hat{A}N$.

2) Να αποδείξετε ότι $N\hat{M}\Gamma>\frac{\pi}{4}$.

Ευκλείδης Β' Λυκείου 2004-2005

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Δ. Από το Α φέρνουμε κάθετη προς τη ΒΔ που τέμνει τη ΒΔ στο Ε και τη ΒΓ στο Ζ. Η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΖ στο σημείο Ι.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Delta$.

β) Το τετράπλευρο ΒΖΔΙ είναι ρόμβος.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ>ΑΓ και η κάθετος από το Γ προς τη διάμεσο ΑΔ την τέμνει στο Ε και ισχύει $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}E$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

3. Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις σχέσεις: $(\Sigma):\ \begin{cases} x+y+z=16 \\ x^2+y^2+z^2=96 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι και οι τρεις ανήκουν στο διάστημα $\left[\frac{8}{3},\frac{26}{3}\right]$.

β) Αν $x,y,z\in\mathbb{Z}$ με $x\leq y\leq z$, να βρείτε τις τριάδες (x,y,z) που είναι λύσεις του (Σ).

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ=α<ΓΑ=β<ΑΒ=γ. Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν να ελαττωθούν και οι τρεις πλευρές κατά το ίδιο μήκος, έτσι ώστε να γίνουν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

Ευκλείδης Β' Λυκείου 2005-2006

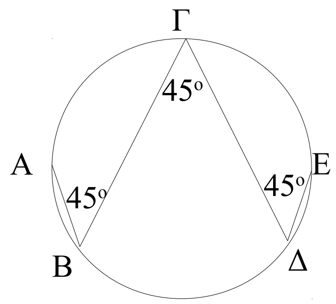
1. Υπάρχει θετικός ακέραιος ν τέτοιος ώστε:

α) Ο 3ν είναι τέλειος κύβος, ο 4ν τέλεια τέταρτη δύναμη και ο 5ν τέλεια πέμπτη δύναμη;

β) Ο 3ν είναι τέλειος κύβος, ο 4ν τέλεια τέταρτη δύναμη, ο 5ν τέλεια πέμπτη δύναμη και ο 6ν τέλεια έκτη δύναμη;

2. Να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w για τους οποίους ισχύει:

$\sqrt{x-y}+\sqrt{y-z}+\sqrt{z-w}+\sqrt{x+w}=x+2$.



3. Οι κορυφές Α, Β, Γ, Δ, Ε μιας τεθλασμένης γραμμής βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο όπως στο σχήμα.

Είναι $A\hat{B}\Gamma=B\hat{\Gamma}\Delta=\Gamma\hat{\Delta}E=45^o$.

Να δειχτεί ότι $AB^2+\Gamma\Delta^2=B\Delta^2+\Delta E^2$.

4. Μια πραγματική συνάρτηση f είναι ορισμένη στο Ρ και ισχύει:

$f(x+1)\cdot f(x)+f(x+1)+1=f(x)$, για κάθε x ∈ Ρ.

Να δειχτεί ότι για κάθε x ∈ Ρ ισχύουν:

α) $f(x)\neq -1$

β) $f(x)\neq 0$

γ) f(x+4)=f(x).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right)\left(1 - x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ.

2. Θεωρούμε τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 90^\circ$ και προεκτείνουμε τη χορδή ΑΒ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=ΑΒ. Ονομάζουμε Δ το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ από το Γ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Α προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι: ΚΒ= 2ΚΑ.

3. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha+\beta}} \geq \alpha^\alpha \beta^\beta .$$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν είναι ΜΚ= x, ΜΛ= y, να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$S = x^2 + y^2$$

και τη θέση του σημείου Μ για την οποία λαμβάνεται αυτό.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 + 2 = 3\sqrt{3x-2}.$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα "τουρνουά" ποδοσφαίρου συμμετέχουν n ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμό. Αν στο τέλος του "τουρνουά" ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός n των ομάδων που συμμετείχαν.

Πρόβλημα 3

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 13 = 0,$$

τότε να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό m που είναι τέτοιος ώστε:

$$x + y + z + m \leq 0.$$

Πρόβλημα 4.

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ$, $\mathrm{A\Delta} = \alpha$ και $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma} = 2\alpha$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\Delta\mathrm{A} + \mathrm{A\Gamma} < \Delta\mathrm{B} + \mathrm{B\Gamma}$.

(ii) Να βρείτε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ για το οποίο το άθροισμα $\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M\Gamma}$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Για το σημείο Μ που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$x^2 + 4y^2 = 4a^2$$

$$ax - y = 2a,$$

έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε, να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x + y + z$ και $S_2 = xy + yz + zx$, όπου $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = 6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1 S_2 - 6$. ***Μονάδες 4***

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$. ***Μονάδες 1***

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ , ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1 < k < 30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$70^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$x^3 + y^3 = 65z^3$$
$$x^2y + xy^2 = 20z^3$$
$$x - y + 2z = 10.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC , K τυχόν σημείο στο εσωτερικό του και τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AH_2\,H_3$ τέμνει την ημιευθεία AK στο σημείο K_1, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $BH_1\,H_3$ τέμνει την ημιευθεία BK στο σημείο K_2 και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $CH_1\,H_2$ τέμνει τη ημιευθεία CK στο σημείο K_3 . Να αποδείξετε ότι τα σημεία K_1, K_2, K_3, H και K είναι ομοκυκλικά , δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο, όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x + 1 - 2|x| = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δύο διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιες τιμές του α οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left(|x|-1\right)^2 = 2x+\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 8 \\ x^2+y^2+z^2 &= 26 \\ xy+xz &= \left(yz+1\right)^2. \end{aligned}$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1 \le \frac{\left(\alpha^3+\beta^3\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\left(\beta^3+\gamma^3\right)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\left(\gamma^3+\alpha^3\right)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ (με $ΑΒ < ΑΓ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Από το σημείο Α φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r = ΟΜ$ (Μ είναι το μέσο της ΒΓ). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Τ, τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ν και το κύκλο (c) στο σημείο $Ν_1$ (θεωρούμε $ΒΝ<ΒΜ$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ, τέμνει την ΒΓ στο σημείο Κ και το κύκλο (c) στο σημείο $Κ_1$ (θεωρούμε $ΓΚ<ΓΜ$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ΒΝ_1, ΓΚ_1$ και ΑΜ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a \neq 0$ για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{2a+ax}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2a+6}{x^3-4x},$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες με διαφορά 4.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν y ακέραιος και $x \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (x,y) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c} 1+y-\left|x^2-3x+1\right|>0 \\ y-2+\left|x-2\right|<0 \end{array}\right\}. \qquad (\Sigma)$$

Να παραστήσετε γραφικά στο Καρτεσιανό επίπεδο Oxy, το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x,y)$, όπου (x,y) λύση του συστήματος (Σ).

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Μ. Ο κύκλος $c_1(\mathrm{M},\mathrm{AM})$ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \mathrm{AB}$.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{x^2+ax+b}$, όπου a,b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 4b$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ