Αρχιμήδης Μεγάλοι 1996-1997

1. Έστω μια ακολουθία θετικών αριθμών για την οποία:

i) $\frac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_\nu}=\frac{1}{4}$ για κάθε ν φυσικό διαφορετικό του 0.

ii) $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}+\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=1$ για κάθε $|n - \nu|\neq 1$

Να αποδείξετε:

α) ότι η α_ν αποτελεί γεωμετρική πρόοδο.

β) ότι υπάρχει t>0, ώστε $\sqrt{\alpha_{\nu+1}}\leq\frac{1}{2}\alpha_\nu+t$

2. Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται στο Η. Έστω ακόμα ΑΙ και ΑΘ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α.

Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΗ να αποδείξετε ότι:

α) Η ΜΝ είναι κάθετη στην ΕΖ.

β) Αν η ΜΝ τέμνει τις ΑΙ, ΑΘ στα Κ, Λ τότε ΚΛ = ΑΗ.

3. Δίνονται 81 φυσικοί αριθμοί των οποίων των οποίων οι πρώτοι διαιρέτες ανήκουν στο σύνολο {2, 3, 5}.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 4 αριθμοί, από τους 81, που το γινόμενό τους είναι τέταρτη δύναμη φυσικού αριθμού.

4. Να ορίσετε το πλήθος των συναρτήσεων f, με f: {1, 2, ..., ν} $\rightarrow$ {1995, 1996} οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη: ο αριθμός f(1) + f(2) + ... + f(ν) είναι περιττός.

Αρχιμήδης Μεγάλοι 1996-1997

1. Έστω P σημείο στο εσωτερικό ή στις πλευρές ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ. Να προσδιοριστεί, για τις διάφορες θέσεις του P, το μέγιστο και το ελάχιστο της παράστασης:

$$f(P) = A\hat{B}P + B\hat{\Gamma}P + \Gamma\hat{\Delta}P + \Delta\hat{A}P .$$

2. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,∞)

β) $f(x) > -\frac{1}{x}$, για κάθε x>0

γ) $f(x)\, f\left[f(x) + \frac{1}{x}\right] = 1$ για κάθε x>0.

Να υπολογίσετε το f(1).

3. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{13}{x^2} + \frac{1996}{y^2} = \frac{z}{1997}$$

4. Έστω p πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές το οποίο έχει 13, διαφορετικές μεταξύ τους ακέραιες ρίζες. Να αποδείξετε ότι αν n ακέραιος αριθμός με p(n) ≠ 0, τότε $|p(n)| \geq 7(6!)^2$.

Επίσης να δοθεί παράδειγμα πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές και με 13, διαφορετικές μεταξύ τους ακέραιες ρίζες τέτοιο ώστε: για κάποιο $n \in Z$ να είναι $|p(n)| = 7(6!)^2$.

Αρχιμήδης Μεγάλοι 1999-2000

1. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = α, ΑΔ = β. Ευθεία ε που περνά από το κέντρο Ο του ορθογωνίου τέμνει την πλευρά ΑΔ στο σημείο Ε, Έτσι ώστε $\frac{AE}{E\Delta}=\frac{1}{2}$.

Αν το Μ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ε στο εσωτερικό του ορθογωνίου, να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των α και β, έτσι ώστε οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές ΑΔ, ΑΒ, ΔΓ, ΒΓ, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

2. Να προσδιορίσετε τον πρώτο αριθμό ρ, αν ο αριθμός $1 + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

3. Να βρεθεί ο μέγιστος θετικός πραγματικός αριθμός κ, για τον οποίο ισχύει:

$$\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(3x^2+y^2\right)}}\leq\frac{1}{\kappa}$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y.

4. Για τα υποσύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_{2000}$ του συνόλου Μ, ισχύει ότι $|A_i|>\frac{2}{3}|M|$, για κάθε i = 1, 2, ..., 2000, όπου με |Χ| συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Χ.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει στοιχείο α του Μ το οποίο ανήκει σε τουλάχιστον 1334 από τα υποσύνολα A_i.

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2000-2001

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Οι ΒΔ, ΓΕ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ και η ΔΕ τέμνει το τόξο ΑΒ, που δεν περιέχει το Γ, στο σημείο Κ. Αν είναι $KA_1 \perp B\Gamma$, $KB_1 \perp A\Gamma$, $K\Gamma_1 \perp AB$ και το σημείο Δ απέχει από τις πλευρές ΒΑ και ΒΓ απόσταση ίση με x, ενώ το Ε απέχει από τις πλευρές ΓΑ, ΒΓ απόσταση ίση με y, τότε:

α) να εκφράσετε τα μήκη των τμημάτων KA_1, KB_1, $K\Gamma_1$ συναρτήσει των x, y και του λόγου $\lambda = \frac{K\Delta}{E\Delta}$.

β) να αποδείξετε ότι $\frac{1}{KB} = \frac{1}{KA} + \frac{1}{K\Gamma}$.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α, β τέτοιοι ώστε το γινόμενο $(15\alpha+\beta)\cdot(\alpha+15\beta)$ να είναι μια δύναμη με βάση το 3 και εκθέτη ακέραιο.

3. Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε f(1) = 3 και

$$f(m+n)+f(m-n)-m+n-1=\frac{f(2m)+f(2n)}{2}$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους m, n με m≥n.

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

4. Στον πίνακα είναι γραμμένοι όλοι οι αριθμοί από 1 ως 500.

Δυο μαθητές παίζουν το εξής παιχνίδι:

Με τη σειρά ο ένας μετά τον άλλο διαγράφουν από ένα αριθμό. Το παιχνίδι τελειώνει όταν στον πίνακα απομείνουν δυο αριθμοί. Νικητής είναι ο Β, αν το άθροισμα των αριθμών που απομένουν διαιρείται με το 3, διαφορετικά νικητής είναι ο Α.

Αν αρχίζει πρώτος ο Α, έχει ο μαθητής Β στρατηγική νίκης;

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2001-2002

1. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ με $\beta\gamma \neq 0$ ισχύει ότι $\frac{1-\gamma^2}{\beta\gamma} \geq 0$.

Να αποδείξετε ότι $10(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma^3) \geq 2\alpha\beta + 5\alpha\gamma$.

2. Ένας φοιτητής του Ε. Μ. Πολυτεχνείου διάβαζε το περασμένο καλοκαίρι για τις επαναληπτικές εξετάσεις ενός μαθήματος επί 37 μέρες, σύμφωνα με τους εξής κανόνες:

α) Κάθε μέρα διάβαζε μια τουλάχιστον ώρα.

β) Κάθε μέρα διάβαζε ακέραιο αριθμό ωρών, χωρίς να ξεπερνάει τις 12 ώρες.

γ) Συνολικά έπρεπε να διαβάσει το πολύ 60 ώρες

Να αποδείξετε ότι υπήρξαν κάποιες διαδοχικές μέρες, κατά τη διάρκεια των οποίων διάβασε συνολικά 13 ώρες.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} > 10^o$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 10^o$. Θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, έτσι ώστε $A\hat{\Gamma}E = 10^o$, και σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, έτσι ώστε $\Delta\hat{B}A = 15^o$. Έστω $Z \neq A$ είναι σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΕΓ.

Να αποδείξετε ότι: $Z\hat{B}A > Z\hat{\Gamma}A$

4. α) Για τους μη μηδενικούς αριθμούς p, q, r, a ισχύει ότι $pq = ra^2$, όπου ο r είναι πρώτος και οι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή $(p,q) = 1$.

Να αποδείξετε ότι ένας από τους αριθμούς p, q είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει πρώτος φυσικός αριθμός p, που είναι τέτοιος ώστε ο αριθμός $p(2^{p+1} - 1)$ να είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2002-2003

1. Αν a, b, c, d είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και

$$a^3 + b^3 + 3ab = c + d = 1$$

να αποδείξετε ότι

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^3 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^3 + \left(d+\frac{1}{d}\right)^3 \geq 40$$

2. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα

$$x^2 + y^2 - z(x + y) = 2$$

$$y^2 + z^2 - x(y + z) = 4$$

$$z^2 + x^2 - y(z + x) = 8$$

3. Δίνεται κύκλος C κέντρου K και ακτίνας r, σημείο A πάνω στον κύκλο και σημείο P στο εξωτερικό του κύκλου C. Από το σημείο P θεωρούμε μεταβλητή ευθεία ε η οποία τέμνει τον κύκλο C στα B και Γ. Αν H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο T του επιπέδου του κύκλου C τέτοιο ώστε το άθροισμα

$$HA^2 + HT^2$$

να είναι σταθερό (ανεξάρτητο από τη θέση της ευθείας ε).

4. Στο σύνολο Σ των σημείων του επιπέδου Π ορίζουμε μια πράξη *, δηλαδή μια απεικόνιση της μορφής

$$* : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \Sigma$$

η οποία απεικονίζει κάθε διατεταγμένο ζεύγος σημείων (X , Y) στο σημείο

$$X * Y = Z,$$

που είναι το συμμετρικό του X ως προς κέντρο συμμετρίας το Y.

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ στο επίπεδο Π. Είναι δυνατόν με διαδοχικές εφαρμογές της πράξης * στο σύνολο των τριών κορυφών {Α, Β, Γ} να λάβουμε την τέταρτη κορυφή Δ;

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2003-2004

1. Να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του θετικού πραγματικού αριθμού Μ για την οποία αληθεύει η ανισότητα

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq M(xy + yz + zx)^2$$

για κάθε x, y, z $\in \mathbb{R}$.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί x_1, x_2, ..., x_m, όπου $m \geq 2$, τέτοιοι ώστε

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m \text{ και } \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \ldots + \frac{1}{x_m^3} = 1 .$$

3. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Α εκτός αυτού. Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία ε, διαφορετική της ευθείας ΑΟ, που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ, με το Β μεταξύ των Α και Γ. Στη συνέχεια φέρουμε τη συμμετρική ευθεία της ε, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ΑΟ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Ε και Δ, με το Ε μεταξύ των Α και Δ.

Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΒΓΔΕ διέρχονται από σταθερό σημείο, δηλαδή τέμνονται στο ίδιο πάντοτε σημείο ανεξάρτητα από τη θέση της ευθείας ε.

4. Έστω Μ ένα υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών με 2004 στοιχεία. Αν γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει στοιχείο του Μ το οποίο να ισούται με το άθροισμα δυο άλλων στοιχείων του Μ, να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή την οποία μπορεί να πάρει το μεγαλύτερο από τα στοιχεία του Μ.

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2004-2005

1. Να προσδιορίσετε πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές τέτοιο ώστε $P(2) = 12$ και $P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Δίνεται η ακολουθία (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $a_1 = 1$ και $a_\nu = a_{\nu-1} + \frac{1}{\nu^3}$, $\nu = 2, 3, \ldots$.

α) Να αποδείξετε ότι $a_\nu < \frac{5}{4}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

β) Αν ε είναι δεδομένος θετικός πραγματικός αριθμός, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό $\nu_0 > 0$ που είναι τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει

$$|a_{\nu+1} - a_\nu| < \varepsilon$$

3.Έστω κυρτή γωνία $x\hat{O}y$. Εντός αυτής θεωρούμε τις ημιευθείες Ox_1, Oy_1 έτσι ώστε $x\hat{O}x_1 = y_1\hat{O}y < \frac{x\hat{O}y}{3}$. Πάνω στις ημιευθείες Ox_1, Oy_1 θεωρούμε σταθερά σημεία Κ, Λ, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΟΚ = ΟΛ. Αν τα σημεία Α και Β κινούνται πάνω στις πλευρές Ox και Oy, αντίστοιχα, έτσι ώστε $A \neq O$, $B \neq O$ και το εμβαδόν του πολυγώνου ΟΑΚΛΒ να παραμένει σταθερό, να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΟΑΒ διέρχονται από σταθερό σημείο, διαφορετικό του Ο.

4. Δίνεται ότι ο αριθμός k είναι θετικός ακέραιος και ότι η εξίσωση

$$x^3 + y^3 - 2y(x^2 - xy + y^2) = k^2(x - y) \qquad (1)$$

έχει μια λύση (x_0,y_0), με $x_0,y_0 \in \mathbb{Z}^*$ και $x_0 \neq y_0$. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση (1) έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων (x,y) με $x, y \in \mathbb{Z}$ και $x \neq y$.

β) είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε 11 επιπλέον διαφορετικές λύσεις (X,Y) της εξίσωσης (1), με $X, Y \in \mathbb{Z}^*$ και $X \neq Y$, όπου οι X, Y είναι συναρτήσεις των x_0,y_0.

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2005-2006

1. Πόσοι διαφορετικοί πενταψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί υπάρχουν, που το καθένα από τα ψηφία τους, εκτός του τελευταίου, είναι μεγαλύτερο ή ίσο του επόμενου ψηφίου τους;

2. Έστω n ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση

$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3n$$

δεν έχει λύσεις στο σύνολο των θετικών ρητών αριθμών.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Λ, Μ, Ν των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε η ΑΛ να είναι διχοτόμος της γωνίας Α και οι ΒΝ και ΓΜ να διέρχονται από ένα κοινό σημείο Σ της ΑΛ. Αν η γωνία ΑΛΒ ισούται με τη γωνία ΑΝΜ, να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΝΛ είναι ορθή.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες

α) $f(x + y + z) \leq 3(xy + yz + zx)$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z και

β) υπάρχει φυσικός αριθμός ν και συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$g(g(x)) = x^{2\nu+1} \text{ και } f(g(x)) = (g(x))^2$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2006-2007

1. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν για τους οποίους ο αριθμός $2007 + 4^{\nu}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

2. Αν α, β, γ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha+\gamma-\beta)^4}{\alpha(\alpha+\beta-\gamma)}+\frac{(\alpha+\beta-\gamma)^4}{\beta(\beta+\gamma-\alpha)}+\frac{(\beta+\gamma-\alpha)^4}{\gamma(\alpha+\gamma-\beta)}\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha .$$

3. Σε κυκλικό δακτύλιο με ακτίνες R και R-2r, όπου R= 11r, τοποθετούμε κύκλους ακτίνας r εφαπτόμενους των κύκλων που ορίζουν το δακτύλιο και ανά δυο μη επικαλυπτόμενους. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό των κύκλων που μπορούμε να τοποθετήσουμε μέσα στο δακτύλιο. (Δίνεται ότι $9{,}94<\sqrt{99}<9{,}95$)

4. Σε κάθε τετράγωνο μιας σκακιέρας 2007x2007 τοποθετούμε έναν από τους αριθμούς 1 ή -1. Συμβολίζουμε με A_i το γινόμενο των αριθμών της i-γραμμής, i = 1, 2, ..., 2007, και με B_j το γινόμενο της j-στήλης, j = 1, 2, ..., 2007. Να αποδείξετε ότι:

$$A_1 + A_2 + ... + A_{2007} + B_1 + B_2 + ... + B_{2007} \neq 0.$$

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2007-2008

1. Έστω x, y $\in$(0, 1) μεταβλητοί πραγματικοί αριθμοί και θεωρούμε τους αριθμούς a = x + ym και b = y + xm όπου a, b, m θετικοί ακέραιοι. Αν όλα τα ζεύγη ακεραίων που προκύπτουν καθώς τα x, y μεταβάλλονται είναι 119, να βρεθεί ο m.

2. Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση $x^8+2^{2^x+2}=p$, όπου p είναι πρώτος αριθμός.

3. Έστω Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα R=1. Αν Σ είναι η τομή των ευθειών που ορίζουν τα τμήματα ΗΚ και ΒΓ και επιπλέον ισχύει ΚΣ·ΚΗ = 1, να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου ΑΒΗΓΑ.

4. Αν a_1, a_2, ..., a_n είναι θετικοί ακέραιοι και k, t είναι ο ελάχιστος και ο μέγιστος από αυτούς αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\right)^{\frac{t\cdot n}{k}}\geq \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n\,.$$

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2008-2009

1 Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$A=\sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με περίκεντρο Ο και A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, Γ_2 έτσι ώστε: $\overline{OA_2}=\lambda\cdot\overline{OA_1}$, $\overline{OB_2}=\lambda\cdot\overline{OB_1}$ και $\overline{O\Gamma_2}=\lambda\cdot\overline{O\Gamma_1}$ με $\lambda > 0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες AA_2, BB_2, $\Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

3. Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \leq 1.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

4. Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 των οποίων οι εικόνες A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο O(0,0) και ακτίνα r>0. Αν w είναι μία λύση της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1w^2 + z_3w + z_5 = 0 \quad (I)$$

$$z_2w^2 + z_4w + z_6 = 0 \quad (II)$$

να αποδείξτε ότι:

α) Το τρίγωνο $A_1A_3A_5$ είναι ισόπλευρο

β) $|z_1 - z_2|+|z_2 - z_3|+|z_3 - z_4|+|z_4 - z_5|+|z_5 - z_6|+|z_6 - z_1|=3|z_1 - z_4|=3|z_2 - z_5|=3|z_3 - z_6|$.

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2009-2010

1. Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y.$$

2. Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x και y έχουν άθροισμα 2α, όπου α > 0, να αποδείξετε ότι:

$$x^3 y^3 \left(x^2 + y^2\right)^2 \leq 4\alpha^{10}.$$

Για ποιες τιμές των x και y αληθεύει η ισότητα;

3. Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω I το έκκεντρό του. Οι προεκτάσεις των AI, BI και CI τέμνουν το περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D, E και F αντίστοιχα. Οι κύκλοι με διάμετρο ID, IE και IF τέμνουν τις πλευρές BC, AC και AB στα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2 και C_1, C_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξτε ότι τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 είναι ομοκυκλικά.

4. Στο επίπεδο θεωρούμε k + n διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες, όπου k ακέραιος με k >1 και n θετικός ακέραιος, οι οποίες ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Από τις ευθείες αυτές, k είναι παράλληλες μεταξύ τους ενώ οι υπόλοιπες n τέμνονται ανά δύο και δεν υπάρχει κάποια από αυτές που να είναι παράλληλη με τις k παράλληλες ευθείες. Όλες οι παραπάνω ευθείες τεμνόμενες διαμερίζουν το επίπεδο σε χωρία (π.χ τριγωνικά, πολυγωνικά και μη φραγμένα).

Δύο χωρία θεωρούνται διαφορετικά, αν δεν έχουν κοινά σημεία ή αν έχουν κοινά σημεία μόνο στο σύνορό τους. Ένα χωρίο θα το ονομάζουμε "καλό" όταν βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες.

Αν σε ένα σχηματισμό, το ελάχιστο πλήθος των "καλών" χωρίων είναι 176 και το μέγιστο πλήθος τους είναι 221, να βρεθούν τα k, n.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
28η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Θέματα μεγάλων τάξεων

.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση

$$x^3y^2(2y-x)=x^2y^4-36.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}_1(40,1)$, $\mathrm{A}_2(40,2)$, $\ldots$, $\mathrm{A}_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{OA}_1,\mathrm{OA}_2,\ldots,\mathrm{OA}_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλαδή δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα άκρα του) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i=1,2,3,\ldots,40$. Επίσης, ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{OA}_1,\mathrm{OA}_2,\ldots,\mathrm{OA}_{40}$, θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν περιέχει ένα τουλάχιστον "*καλό*" σημείο. Να υπολογισθεί το πλήθος των "*καλών*" σημείων και το πλήθος των "*καλών*" ευθυγράμμων τμημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a,b,c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετη (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L. Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Τέλος η EN τέμνει τη μεσοκάθετη (μ) στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

$$MZ\perp BC \Leftrightarrow (CA=CB \quad \text{ή} \quad Z\equiv O),$$

δηλαδή ότι "η MZ είναι κάθετη στην BC, αν, και μόνο αν, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA=CB$ ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$".

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες και 30 λεπτά — ***Καλή επιτυχία***

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2011-2012

1. Δυο θετικοί ακέραιοι p, q που είναι πρώτοι μεταξύ τους, ικανοποιούν τη σχέση

$$p+q^2=(n^2+1)p^2+q\ ,$$

όπου n θετικός ακέραιος, παράμετρος. Να βρείτε τα ζεύγη (p,q).

2. Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα P(x), Q(x) με πραγματικούς συντελεστές του ελάχιστου δυνατού βαθμού ώστε:

$$P(x^2)+Q(x)=P(x)+x^5Q(x)\,,x\in\mathbb{R}$$

3. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ, εγγεγραμμένο στον κύκλο C(O,R) και η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον κύκλο (C) στο σημείο Κ. Ο κύκλος (C_1) έχει κέντρο O_1 πάνω στην ΟΑ, διέρχεται από τα σημεία Α, Δ και τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ,Ν είναι τα μέσα των ΖΓ, ΒΕ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

α) οι ευθείες ΖΕ, ΔΜ, ΚΓ συντρέχουν σε κάποιο σημείο Τ

β) οι ευθείες ΖΕ, ΔΝ, ΚΒ συντρέχουν σε κάποιο σημείο Σ

γ) η ΟΚ είναι μεσοκάθετος της ΤΣ.

4. Το ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά A_1Ε έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του, A_1A_ν, έχει μήκος ν-1. Ξεκινάμε από το σημείο A_1 και κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή δεξιά). Υπολογίστε (συναρτήσει του ν ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία Β, Γ, Δ, Ε, όπου ν ακέραιος μεγαλύτερος του 3.