ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο $BCDE$, τέτοιο ώστε: $BE \parallel AM$ και $BE = \dfrac{AM}{2}$ Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

Πρόβλημα 2
Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p,m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m)+p=(m+1)^3.$$

Πρόβλημα 3
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z},\ y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x},\ z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}.$$

Πρόβλημα 4.
Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ...,20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

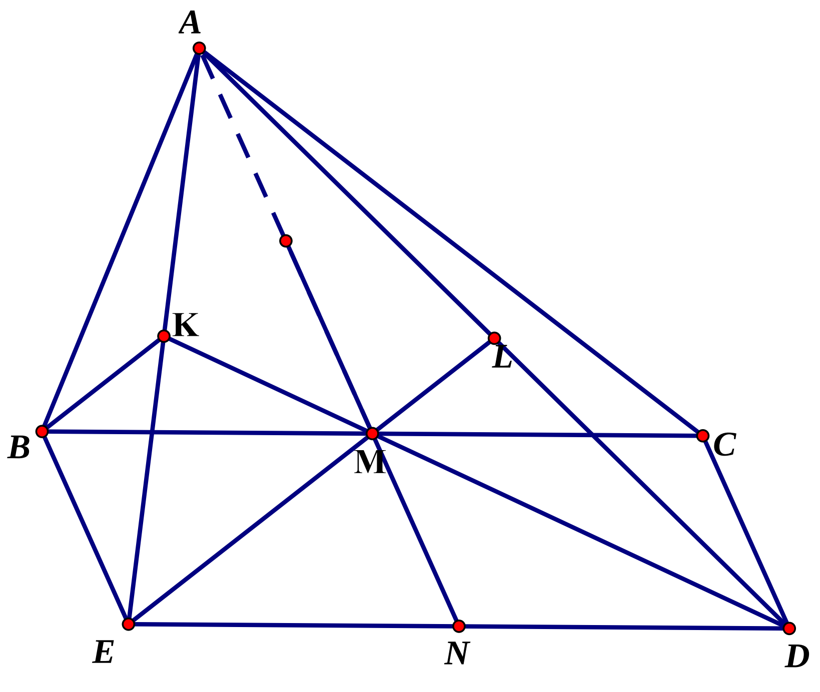
Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο BCDE, τέτοιο ώστε: $\mathrm{BE} \parallel \mathrm{AM}$ και $\mathrm{BE} = \dfrac{\mathrm{AM}}{2}$

Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

Λύση

Προεκτείνουμε την AM μέχρι να τμήσει την ED στο σημείο N. Τότε το τετράπλευρο $BMNE$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $EN = BM = MC = ND$. Άρα το N είναι το μέσον του ED. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $\dfrac{AM}{MN} = 2$ και το M είναι πάνω στη διάμεσο του τριγώνου EAD, οπότε το M είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου AED. Επομένως η ευθεία EM είναι η ευθεία της διαμέσου του τριγώνου AED που άγεται από την κορυφή E, οπότε θα τέμνει την πλευρά AD στο μέσο της.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 2

Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p,m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m)+p=(m+1)^3.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται

$$p(p+m+1)=(m+1)^3\ , \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει ότι ο πρώτος αριθμός p είναι διαιρέτης του $(m+1)^3$. Επομένως, αφού p πρώτος, έπεται ότι $p\,|\,(m+1)$, οπότε θα υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $m+1=kp$. Τότε, από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$p(p+kp)=(kp)^3 \Leftrightarrow k+1=k^3p \Rightarrow k^3\,|\,(k+1) \Rightarrow k\,|\,(k+1) \Rightarrow k=1.$$

Άρα είναι $p=2,\ m=1$ και $(p,m)=(2,1)$.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z},\ y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x},\ z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}.$$

Λύση

Για $x,y,z\in\mathbb{R}$, που ικανοποιούν την συνθήκη $xyz\neq 0$, το σύστημα γράφεται:

$$x^3yz=z^2-2y^2 \qquad (1)$$

$$y^3zx=x^2-2z^2 \qquad (2)$$

$$z^3xy=y^2-2x^2 \qquad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)=-\left(x^2+y^2+z^2\right) \Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)(xyz+1)=0.$$

Επειδή είναι $xyz\neq 0$ έχουμε $x^2+y^2+z^2>0$, οπότε από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι :

$$xyz=-1 \qquad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4) στο σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) έχουμε:

$$x^2=-z^2+2y^2 \qquad (5)$$

$$y^2=-x^2+2z^2 \qquad (6)$$

$$z^2=-y^2+2x^2 \qquad (7)$$

Από τις (5) και (6) λαμβάνουμε $y^2=z^2$, ενώ από τις (6) και (7) λαμβάνουμε $x^2=z^2$, οπότε:

$$x^2=y^2=z^2 \Leftrightarrow x=y=\pm z \text{ ή } x=-y=\pm z. \qquad (8)$$

Τελικά, από τις εξισώσεις (8) και (4) έχουμε τις λύσεις:

$$(x,y,z)=(-1,-1,-1),\ (x,y,z)=(1,1,-1),\ (x,y,z)=(1,-1,1),\ (x,y,z)=(-1,1,1).$$

Πρόβλημα 4.
Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ...,20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

Λύση
Το 1 μπορεί να βαφεί με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Το 2 μπορεί να βαφεί με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Τώρα όλοι οι άρτιοι πρέπει να πάρουν το χρώμα του 2, οπότε οι αριθμοί 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 παίρνουν το χρώμα του 2.
Επίσης όλοι οι αριθμοί που έχουν κοινό διαιρέτη με αυτούς παίρνουν το χρώμα του 2, δηλαδή οι αριθμοί 3,5,7,9,15 παίρνουν το χρώμα του 2.
Οι αριθμοί που απέμειναν (που είναι οι πρώτοι μεγαλύτεροι του 10, δηλαδή οι 11,13,17,19) μπορούν να βαφούν με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Επομένως, συνολικά ο χρωματισμός μπορεί να γίνει με $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^6 = 64$ τρόπους. Πρέπει όμως να αφαιρέσουμε και τις δύο περιπτώσεις που τους βάφουμε όλους μαύρους ή όλους άσπρους. Άρα έχουμε συνολικά 62 τρόπους.