

Αρχιμήδης Μικροί 1994-1995

Θεωρούμε τους αριθμούς

$$A = (2^0 + 8^{21} : 16^{15} + 6 \cdot 27^{10} : 81^7)^{63} \text{ και } B = (2^{2^5} : 2^{5^2} + 1)^{54}$$

Ποιος είναι μεγαλύτερος;

2. Θεωρούμε 6 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Έστω α το άθροισμα των τριών πρώτων και β το άθροισμα των τριών άλλων. Είναι δυνατόν να ισχύει $\alpha \cdot \beta = 19951995$;

3. Στα τετράγωνα ενός 3×3 πίνακα είναι γραμμένα τα ψηφία 0 (σχήμα 1). Λαμβάνουμε ένα 2×2 τετράγωνο του πίνακα και στους αριθμούς που υπάρχουν προσθέτουμε το 1.

Να εξετάσετε, αν μετά από μερικές φορές ο πίνακας μπορεί να γίνει όπως στο σχήμα 2.

0	0	0
0	0	0
0	0	0

σχήμα 1

4	9	5
10	18	12
7	13	6

σχήμα 2

4. Τρεις σφαίρες από χρυσάφι έχουν ακτίνες x , $2x$, $3x$.

Αν η μικρή σφαίρα αξίζει 5.400.000 δραχμ., να βρεθεί πόσο αξίζουν συνολικά οι δύο μικρές.

Αρχιμήδης Μικροί 1995-1996

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x^2+2x+1)^2+(x^2+3x+2)^2+(x^2+4x+3)^2+\dots+(x^2+1996x+1995)^2=0$$

2. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία Δ, E, Z, H, Θ είναι τα μέσα των $B\Gamma, A\Delta, B\Delta, E\Delta$ και EZ αντιστοίχα. Αν I είναι η τομή των $BE, A\Gamma$ και K η τομή των $H\Theta, A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) $AK=3\Gamma K$

β) $HK=3H\Theta$

γ) $BE=3EI$

δ) $(E\Theta H)=\frac{1}{32}(AB\Gamma)$ (Το εμβαδόν του τριγώνου $E\Theta H$ είναι το ένα τριακοστό δεύτερο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$)

3. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης: $2x^4-2x^2y^2+y^4-8x^2+18$.

4. α) Αν το κλάσμα $\frac{\alpha \cdot \nu + \beta}{\gamma \cdot \nu + \delta}$ απλοποιείται με το 2, να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$ είναι άρτιος. (Τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$ είναι φυσικοί αριθμοί και ο $\gamma \nu + \delta$ διαφορετικός από το μηδέν.)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει πρώτος αριθμός p και φυσικός αριθμός n ώστε να ισχύει $n^2+n+p=1996$.

1. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Δ . Οι μεσοκάθετοι των $B\Delta$ και $\Gamma\Delta$ τέμνουν τη $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα.

α) Να δειχτεί ότι $BE=EZ=Z\Gamma$.

β) Να βρεθεί τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το εμβαδό του τριγώνου $B\Delta E$.

2. Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί n ώστε η $A=n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 6n$ να είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

3. Να εξετάσετε αν μπορούμε να ξαναγράψουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 σε μια σειρά ώστε:

α) Το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών αριθμών στη νέα σειρά να μην υπερβαίνει το 16.

β) Το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών αριθμών στη νέα σειρά να μην υπερβαίνει το 15.

4. Δίνονται 10 ομόκεντροι κύκλοι και 10 ακτίνες τους.

Στα σημεία που οι ακτίνες τέμνουν τον εσωτερικό κύκλο γράφουμε διαδοχικά και με τη φορά των δεικτών του ρολογιού τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Στον επόμενο κύκλο γράφουμε με την ίδια διαδικασία τους αριθμούς 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Συνεχίζουμε μέχρι το δέκατο κύκλο που γράφουμε τους αριθμούς 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100. Με τη διάταξη αυτή οι αριθμοί 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 βρίσκονται στην ίδια ακτίνα και ομοίως και για τις άλλες ακτίνες.

Σε 50 από τους 100 αριθμούς που διαθέτουμε βάζουμε το πρόσημο "πλην" φροντίζοντας ώστε:

α) σε κάθε ακτίνα να υπάρχουν ακριβώς 5 "πλην" και

β) σε κάθε έναν από τους κύκλους να υπάρχουν ακριβώς 5 "πλην".

Να δειχτεί ότι το άθροισμα των 100 αριθμών που προκύπτουν είναι μηδέν.

Αρχιμήδης Μικροί 1997-1998

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους θετικούς αριθμούς x, y, z, t, w για τους οποίους ισχύει:

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{t + \frac{1}{w}}}} = \frac{1998}{115}$$

2. Αν $a_1, a_2, \dots, a_n$ θετικοί, να αποδείξετε ότι :

$$\frac{(1 + 3a_1 + a_1^2)(1 + 3a_2 + a_2^2) \dots (1 + 3a_n + a_n^2)}{a_1 a_2 \dots a_n} \geq 2^{2n}$$

3. Έστω n πρώτος με $n \neq 2$ και $n \neq 5$. Να αποδείξετε ότι μεταξύ των n πρώτων όρων της ακολουθίας

$$1, 11, 111, \dots, \underbrace{11\dots1}_{n \text{ μονάδες}}$$

υπάρχει ένας που διαιρείται με τον n .

4. Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και ευθεία (ε) που εφάπτεται στον (O, ρ) στο σημείο A . Μία ευθεία παράλληλη στην OA τέμνει τον (O, ρ) στα σημεία B, Γ και την (ε) στο Δ (το Γ βρίσκεται ανάμεσα στα B, Δ) και E το αντιδιαμετρικό του Γ ως προς το O . Φέρνουμε την EA που τέμνει την $B\Delta$ στο Z .

α) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΓEZ είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι $2A\Delta = EB$.

γ) Να αποδείξετε ότι $AB = KO$, όπου K το μέσον της ΓZ .

δ) Αν είναι $\rho = 2,5$ και $(A\Delta) = 1,5$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου EBZ .

Αρχιμήδης Μικροί 1998-1999

1. Να αποδειχθεί ότι εάν a και β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $a^{2000} + \beta^{2000} = a^{1998} + \beta^{1998}$, τότε θα ισχύει $a^2 + \beta^2 \leq 2$.
2. Έστω n σταθερός θετικός ακέραιος αριθμός και έστω χ, ψ θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\chi\psi = n\chi + n\psi$. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του χ συναρτήσει του n .
3. Έστω $AB\Gamma$ ισόπλευρο τρίγωνο και σημεία Δ επί της πλευράς AB , E επί της $A\Gamma$, Δ_1 και E_1 επί της $B\Gamma$ ώστε $\Delta B + B\Delta_1 = AB$. Να προσδιοριστεί η μικρότερη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ΔE_1 και $E\Delta_1$.
4. Ως εναλλακτικό άθροισμα ενός συνόλου $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ πραγματικών αριθμών με $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, ορίζουμε τον αριθμό $\Sigma_A = a_k - a_{k-1} + a_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} \cdot a_1$
(π.χ. αν $A = \{1, 2, 5, 7\}$, τότε $\Sigma_A = 7 - 5 + 2 - 1 = 3$)
Θεωρούμε τα εναλλακτικά αθροίσματα όλων των υποσυνόλων του συνόλου $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ τα οποία και αθροίζουμε. Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του τελικού αθροίσματος;

Αρχιμήδης Μικροί 1999-2000

1. Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία στο επίπεδο. Βρείτε ευθεία του επιπέδου από την οποία τα τρία σημεία να απέχουν ίσες αποστάσεις. Πόσες τέτοιες ευθείες του επιπέδου υπάρχουν;

2. Για τον τριψήφιο αριθμό $\overline{a\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$ γνωρίζουμε ότι:

α) το ψηφίο των εκατοντάδων ισούται με το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων και των μονάδων

β) $\beta(\gamma+1)=52-4\alpha$

Να βρεθεί ο αριθμός.

3. Σε προηγούμενη Μαθηματική Ολυμπιάδα για ένα από τα προβλήματα που τέθηκαν, στο οποίο η μέγιστη βαθμολογία ήταν 5, είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Ο μέσος όρος των βαθμών των αγοριών ήταν 4 , ο μέσος όρος των βαθμών των κοριτσιών ήταν 3,25 και ο μέσος όρος των βαθμών του συνόλου των μαθητών ήταν 3,6.

Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια πήραν μέρος, αν ο αριθμός των μαθητών ήταν μεταξύ 30 και 50.

4. Τέσσερις μαθητές αποφάσισαν να αγοράσουν βιβλία Μαθηματικών, έτσι ώστε :

α) καθένας θα αγοράσει 3 βιβλία διαφορετικά μεταξύ τους

β) κάθε δύο από τους τέσσερις μαθητές θα αγοράσουν ένα μόνο ίδιο βιβλίο.

Να βρείτε το μέγιστο και τον ελάχιστο αριθμό διαφορετικών βιβλίων που μπορούν να αγοράσουν συνολικά οι τέσσερις μαθητές.

1. Αν $\alpha, \beta, \chi, \psi$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta=1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y}} \leq \alpha x + \beta y.$$

Τότε ισχύει η ισότητα:

2. Οι αριθμοί μ, ν είναι ακέραιοι.

α) Να βρεθούν τα ζεύγη (μ, ν) που επαληθεύουν την εξίσωση $\mu^3 - 4\mu\nu^2 = 8\nu^3 - 2\mu^2\nu$.

β) Από τα ζεύγη που θα βρείτε να προσδιορίσετε εκείνα που ικανοποιούν την εξίσωση $\mu + \nu^2 = 3$.

3. Έχουμε να ζυγίσουμε 8 σώματα διαφορετικού βάρους με μία ζυγαριά χωρίς σταθμά, δηλαδή με αυτήν μπορούμε μόνο να συγκρίνουμε τα βάρη δύο σωμάτων.

α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ζυγίσεων που πρέπει να κάνουμε για να προσδιορίσουμε το βαρύτερο σώμα;

β) Πόσες επιπλέον ζυγίσεις θα χρειαστούμε για να προσδιορίσουμε το δεύτερο σε βάρος σώμα;

4. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρουμε το ύψος $A\Delta$ και τις διχοτόμους AE, BZ που τέμνονται στο I . Από το I φέρουμε την $I\Theta$ κάθετη προς την $A\Gamma$. Επιπλέον φέρουμε την ευθεία $\chi'\chi$ κάθετη στην $A\Gamma$. Η προέκταση της $E\Theta$ τέμνει την $\chi'\chi$ στο K .

Να αποδείξετε ότι $AK=A\Delta$.

Αρχιμήδης Μικροί 2001-2002

1. Προς το εξωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ πλευράς a κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με $\angle \hat{A} \Delta = 90^\circ$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔA και ΓB προεκτείνονται τέμνονται στο σημείο E .

α) Να υπολογίσετε τη $\angle \hat{B} \Gamma$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ συναρτήσει της πλευράς a .

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του $B\Delta$ συναρτήσει του a .

2. Στον διαγωνισμό ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ της Ε.Μ.Ε. συμμετέχουν αγόρια και κορίτσια που χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στους "μικρούς" και τους "μεγάλους". Τα αγόρια που λαμβάνουν μέρος στον φετινό ΑΡΧΙΜΗΔΗ αποτελούν το 55% αυτών που συμμετέχουν. Ο λόγος του πλήθους των "μικρών" αγοριών προς το πλήθος των "μεγάλων" αγοριών ισούται με το λόγο του πλήθους των "μικρών" προς το πλήθος των "μεγάλων".

Να βρεθεί ο λόγος του πλήθους των "μικρών" αγοριών προς το πλήθος των "μικρών κοριτσιών".

3. Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς α, β, γ με $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ για τους οποίους ισχύει ότι : $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - \alpha\beta\gamma = 2$.

4. Να αποδείξετε ότι $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2002 < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$.

Αρχιμήδης Μικροί 2002-2003

1. Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακεραίου n για τις οποίες ο αριθμός $A = n^3 - n^2 + n - 1$ είναι πρώτος.

2. Να προσδιορίσετε τετραψήφιο αριθμό $\overline{xyzw}$, ο οποίος έχει την ιδιότητα : Αν του προσθέσουμε το άθροισμα των ψηφίων του, προκύπτει ο αριθμός 2003.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Το ύψος του AH και η μεσοκάθετος ε της πλευράς AB τέμνονται στο σημείο M . Η κάθετη προς την ευθεία ε στο σημείο M τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $BM\Delta$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Σ , να αποδείξετε ότι:

α) $B\Sigma // AM$.

β) το τετράπλευρο $AMB\Sigma$ είναι ρόμβος.

4. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους οι οποίοι μπορούν να παρασταθούν ως κλάσματα της μορφής $\frac{\mu\nu+1}{\mu+\nu}$, όπου μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι.

Αρχιμήδης Μικροί 2003-2004

1. Οι αριθμοί 203 και 298 διαιρούμενοι με το θετικό αριθμό x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 13. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

2. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα μέσα K και Λ των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Delta$, αντίστοιχα. Η κάθετη από το B προς την AK τέμνει την AK στο E και την $\Gamma\Lambda$ στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AKZ\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να αποδείξετε ότι $2(ABKZ) = (AB\Gamma\Delta)$

γ) Αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς a , να υπολογίσετε το εμβαδόν του ισοσκελούς τραπεζίου $AKZ\Lambda$ ως συνάρτηση της πλευράς $B\Gamma = a$.

3. Αν οι x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$.

4. Να προσδιορίσετε τον ρητό αριθμό $\frac{a}{\beta}$, όπου a, β θετικοί ακέραιοι, με τον ελάχιστο παρονομαστή, που είναι τέτοιος ώστε $\frac{52}{303} < \frac{a}{\beta} < \frac{16}{91}$.

1. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Gamma\Delta$, $AB=a$, $\Gamma\Delta=2a$ και $\Delta B \perp B\Gamma$. Έστω M το μέσον της $\Gamma\Delta$, O το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου $ABM\Delta$, K το σημείο τομής των ευθειών ΔA , ΓB και Λ το σημείο τομής των ευθειών KO και AB . Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $ABM\Delta$ είναι ρόμβος

β) το τρίγωνο $\Gamma\Delta K$ είναι ισοσκελές

γ) η ευθεία $\Delta\Lambda$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα KB στο μέσον του.

2. Αν σε τριψήφιο θετικό ακέραιο A προσθέσουμε το πενταπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων του, προκύπτει ο αριθμός 840. Να βρεθεί ο αριθμός A .

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(v) = \frac{2v+1+\sqrt{v(v+1)}}{\sqrt{v+1}+\sqrt{v}}$, όπου ο v είναι θετικός ακέραιος.

α) να αποδείξετε ότι: $f(1) = 2\sqrt{2} - 1$

β) Να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\Sigma = f(1) + f(2) + \dots + f(100)$.

4. Δίνεται κύκλος C κέντρου O και ακτίνας R καθώς και σημείο A εκτός αυτού με $AO = d$. Να προσδιορίσετε σημεία B , Γ και Δ πάνω στο κύκλο C έτσι ώστε να σχηματίζεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

Αρχιμήδης Μικροί 2005-2006

1. Έστω P εσωτερικό σημείο ενός ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών PA , PB και $P\Gamma$.

2. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x,y) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$2x^y - y = 2005$$

3. Να αποδειχθεί ότι, μεταξύ 27 οποιωνδήποτε διαφορετικών θετικών ακεραίων μικρότερων του 100, υπάρχουν πάντοτε δύο που δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.

4. Οι πραγματικοί αριθμοί x, y είναι τέτοιοι ώστε $x^2 + xy + y^2 = 1$. Θέτουμε $K = x^3y + xy^3$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του K .

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω I το σημείο τομής των διχοτόμων του. Η διχοτόμος AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο C του τριγώνου $B\Gamma I$ στο σημείο N με $N \neq I$.

Να προσδιορίσετε:

- α) τις γωνίες του τριγώνου $B\Gamma N$ συναρτήσει των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$
- β) το κέντρο του κύκλου C .

2. Αν ο αριθμός $4n+3$, όπου n ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 11, να βρείτε :

- α) τη μορφή του αριθμού n
- β) το υπόλοιπο της διαίρεσης του n^4 με το 11.

3. Έστω $A = \sqrt{\kappa^2 + 24}$ και $B = \sqrt{\kappa^2 - 9}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου αριθμού κ που είναι τέτοιες ώστε η διαφορά $A-B$ να είναι ακέραιος αριθμός.

4. Καθένας από τους 50 μαθητές μιας τάξης έστειλε τα Χριστούγεννα κάρτες σε 25 ακριβώς συμμαθητές του. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τους 50 μαθητές της τάξης πήραν ο ένας την κάρτα του άλλου.

1. Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς διαιρέτες των αριθμών:

α) $A=p^k$, όπου p πρώτος θετικός ακέραιος και k θετικός ακέραιος

β) $B=p^k \cdot q^l$, όπου p, q πρώτοι θετικοί ακέραιοι διαφορετικοί μεταξύ τους και k, l θετικοί ακέραιοι

γ) $\Gamma=1944$

2. Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z είναι μικρότεροι του 2 και τέτοιοι ώστε $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{3}{2} < \frac{1+y^2}{x+2} + \frac{1+z^2}{y+2} + \frac{1+x^2}{z+2} < 3$$

3. Να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του θετικού ακεραίου x για την οποία ο αριθμός $A = 2^{182} + 4^x + 8^{700}$ είναι τέλειο τετράγωνο.

4. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = a$, $AB = 2a$, $B\Gamma = 3a$ και $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$. Έστω E και Z τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Φέρουμε τη ZI κάθετη προς τη βάση $B\Gamma$ (το σημείο I πάνω στη $B\Gamma$). Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

β) Το μέσο O της EZ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$.

γ) Οι ευθείες AZ και ΔI τέμνονται επί της ευθείας BO .

1. Αν ο αριθμός

$$K = \frac{9n^2 + 31}{n^2 + 7}$$

είναι ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου n .

2. Από την κορυφή A ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε ημιευθεία $A\chi$ που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Δ . Πάνω στην $A\chi$ παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $BA = BE$.

Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{AEG}$.

3. Θεωρούμε τους αριθμούς

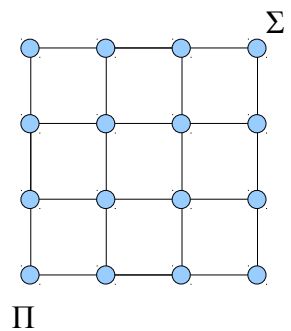
$$A = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \dots \cdot \frac{595}{598} \cdot \frac{597}{600} \quad \text{και} \quad B = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \cdot \dots \cdot \frac{596}{599} \cdot \frac{598}{601}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $A < B$

β) $A < \frac{1}{5990}$

4. Το διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζει τους δρόμους που συνδέουν τη πλατεία μιας πόλης (σημείο Π) με το σχολείο (σημείο Σ). Στη πλατεία βρίσκονται k μαθητές και ξεκινούν με προορισμό το σχολείο έχοντας τη δυνατότητα να κινούνται (στο σχεδιάγραμμα) μόνο προς τα δεξιά και προς τα άνω. Αν οι μαθητές είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οποιαδήποτε διαδρομή (με σκοπό να φτάσουν στο σχολείο, να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του k έτσι, ώστε οπωσδήποτε δύο τουλάχιστον μαθητές να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.



1. Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή $80κ + 3λ$, όπου $κ, λ \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

2. Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με πλευρές $ΑΒ = α$ και $ΒΓ = β$. Έστω $Ο$ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά $ΒΑ$ προς το μέρος του $Α$ κατά τμήμα $ΑΕ = ΑΟ$ και την διαγώνιο $ΔΒ$ προς το μέρος του $Β$ κατά τμήμα $ΒΖ = ΒΟ$.

Αν το τρίγωνο $ΕΖΓ$ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $β = α\sqrt{3}$

β) $ΑΖ = ΕΟ$

γ) $ΕΟ \perp ΖΔ$.

3. Αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 3 και οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν γινόμενο 1, να αποδείξετε ότι:

$$(ax + b)(ay + b)(az + b) \geq 27.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

4. Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 ενός επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία ϵ_2 να έχει την ίδια απόσταση a από τις ϵ_1 και ϵ_3 . Τοποθετούμε 5 σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και M_5 πάνω στις ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 , έτσι ώστε σε κάθε ευθεία να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν με κορυφές τρία από τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και M_5 με κατάλληλη τοποθέτησή τους πάνω στις ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 , σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $M_1, M_2, M_3 \in \epsilon_2, M_4 \in \epsilon_1$ και $M_5 \in \epsilon_3$.

(β) $M_1, M_2 \in \epsilon_1, M_3, M_4 \in \epsilon_3$ και $M_5 \in \epsilon_2$.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
28^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011
Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 120^\circ$, στο οποίο η διάμεσος AD είναι κάθετη προς την πλευρά AB και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$ στο σημείο E . Οι ευθείες BA και $E\Gamma$ τέμνονται στο Z . Να αποδείξετε ότι:
(α) $ZD \perp BE$, (β) $ZD = B\Gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς $y = \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ και υποθέτουμε $x > y$. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς $x - y$, καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους x, y για τους οποίους λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν ο αριθμός $3n+1$, όπου n ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

(α) του n με το 7,

(β) του n^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου m , $m > 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 3 \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία

1. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (C) . Ο κύκλος $C_1(A, AB)$ τέμνει την $B\Gamma$ στο Δ και τον κύκλο (C) στο E . Να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Delta A E}$.

2. Για τις διάφορες τιμές του ρητού a να λυθεί η εξίσωση $\|x-4|-2x+8\|=ax+4$.

3. Οι θετικοί ακέραιοι μ, ν με $\mu > \nu$ ικανοποιούν τη σχέση $EΚΤ(\mu, \nu) + ΜΚΔ(\mu, \nu) = \mu + \nu$.

α) Να δείξετε ότι ο ν διαιρεί τον μ .

β) Αν επιπλέον ισχύει $\mu - \nu = 10$, να βρείτε όλα τα ζεύγη (μ, ν) .

4. Πάνω σε ένα επίπεδο Π δίνεται ευθεία (ε) και πάνω στην (ε) δίνονται δυο σημεία A_1, A_2 . Θεωρούμε ακόμη και δυο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία A_3, A_4 του επιπέδου Π , που δεν ανήκουν στην ευθεία (ε) . Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, ώστε να σχηματίζεται ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία A_1, A_2, A_3, A_4 :

α) όταν τα σημεία A_3, A_4 ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία (ε)

β) όταν τα σημεία A_3, A_4 ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία (ε) .