(1)

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ
ΠΑΠΕΙ
ΜΑΘΗΜΑ: ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ
19/02/2014

Άσκηση 1 (12 Μονάδες)

Έστω το απλό κανονικό μοντέλο: $X_t = \mu + u_t$
$Var(X_t) = \sigma^2$, $t = 1, 2, 3, \ldots, T$

Αν $\sigma^2 = 4$, να κατασκευάσετε κατάλληλη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: \mu = \mu^*$ (vs) $H_1: \mu < \mu^*$ και να βρείτε την κατανομή της κάτω από την H_0 όπου $\mu^* \in \mathbb{R}$

Άσκηση 2 (38 Μονάδες)

Έστω $(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_T)$ ένα τυχαίο δείγμα όπου για κάθε τ.μ Y_t ακολουθεί εκθετική κατανομή

(a) Να γράψετε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας (Log Likelihood func) και να βρείτε τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των αγνώστων παραμέτρων του μοντέλου.

(B) Να μελετήσετε τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των αγνώστων παραμέτρων του μοντέλου ως προς την αμεροληψία, πλήρη αποτελεσματικότητα και συνέπεια.

ΔΕΔΟΜΕΝΟ: Αν μια τυχαία μεταβλητή Y_t ακολουθεί εκθετική κατανομή, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:
$f(Y_t;\theta) = \frac{e^{-Y_t/\theta}}{\theta}$, $\theta > 0$, $Y_t > 0$ και ισχύει $E(Y_t) = \theta$ και $E(Y_t^2) = 2\theta^2$

Άσκηση 3 (25 Μονάδες)

Έστω το κανονικό γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης:

$$Y_t = B_0 + B_1 \cdot X_t + B_2 Z_t + B_3 r_t + u_t$$

$$Var(Y_t / X_t = x_t, Z_t = z_t, R_t = r_t) = \sigma_t^2, \quad t = 1,2,3,4,\dots,T$$

για το οποίο ισχύουν όλες οι υποθέσεις του κλασικού γραμμικού μοντέλου παλινδρόμησης εκτός της υπόθεσης της ομοσκεδαστικότητας και της μη αυτοσυσχέτισης. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι υπάρχει αυτοσυσχέτιση και ετεροσκεδαστικότητα, δηλαδή $E(u_t u_s) \neq 0, t \neq s$ και $E(u_t^2) = \sigma_t^2$, άρα σε διανυσματική μορφή $E(UU') = \Sigma$ όπου Σ ένας μη διαγώνιος πίνακας. Αφού γράψετε το μοντέλο και τις υποθέσεις του σε διανυσματική μορφή, να βρείτε τις κατανομές των εκτιμητών ελαχίστων τετραγώνων των παραμέτρων B_0, B_1, B_2, B_3.

Άσκηση 4 (25 Μονάδες)

Ερευνητής για να μελετήσει τη σχέση μεταξύ πέντε οικονομικών μεταβλητών υιοθετεί το κλασικό γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης

$$y_t = b_0 + b_1 x_t + b_2 z_t + b_3 r_t + b_4 p_t + u_t, \quad t = 1,2,3,\dots,204$$

το δε αποτέλεσμα της εκτίμησης είναι:

$$\underset{(15.9333)}{y_t = -0,2379} + \underset{(0.0266)}{0,9631 x_t} + \underset{(0.0159)}{0.1852 z_t} - \underset{(75,5624)}{61,411 r_t} + \underset{(6.0169)}{0.8549 p_t} + u_t$$

$R^2 = 0,9214$, $s = 7,8822$, $RSS = 12363,82$

$\log L = -708.1132$, όπου τα τυπικά σφάλματα (standard errors) δίνονται εντός παρενθέσεων

Ο ερευνητής εκτιμά και τα ακόλουθα μοντέλα των οποίων τα αποτελέσματα είναι ως εξής:

- Πρώτον, $y_t = \underset{(0,5629)}{1,4798} + \underset{(0,0261)}{0,9664}\, r_t + \underset{(0,0157)}{0.1849}\, p_t + \tilde{u}_t$ $\quad R^2 = 0,9211$, $s = 7,0560$

$RSS = 12\,404,96$, $\log L = -708,4521$, τα τυπικά σφάλματα είναι στην παρένθεση (standard errors)

- Δεύτερον, $y_t - x_t = \underset{(11,7731)}{2,8191} + \underset{(0.0143)}{0,1761}\, r_t - \underset{(15,9248)}{0,7070}\, p_t + \tilde{v}_t$
$R^2 = 0.4320$, $s = 7,8880$, $RSS = 12506,42$, $\log L = -709,2829$

- Τρίτον, $y_t + 0,2379 = -\underset{(259,6859)}{498,1020}\, r_t + \underset{(0,0734)}{3,4962}\, p_t + \tilde{v}_t$
$R^2 = 0,02158$, $s = 27,6053$, $RSS = 153.934,2$, $\log L = -965,3318$

Να εξετάσετε τις πιο κάτω υποθέσεις αναφέροντας τα βασικά βήματα της διαδικασίας ελέγχου:

(i) $H_0: b_0 = 0.0$

(ii) $H_0: \sigma^2 = 64$, $H_1: \sigma^2 < 64$

(iii) $H_0: b_1 = 0,\ b_2 = 0$ (vs) $H_1: b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0$, αφού θεωρήσετε ότι ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας

Το επίπεδο σημαντικότητας είναι 5%

<u>Παράρτημα:</u> Έστω ο αντιστρέψιμος $p \times p$ πίνακας A ο οποίος μπορεί να γραφεί με την βοήθεια υποπινάκων ως εξής:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \text{ Τότε } A^{-1} = B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$B_{11} = A_{112}^{-1},\quad B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} A_{221}^{-1},\quad B_{21} = -A_{221}^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$B_{22} = A_{221}^{-1}, \text{ όπου } A_{112} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \text{ και}$$

$$A_{221} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

19/02/2014

Άσκηση 1

$$X_t = \mu + u_t \qquad Var(X_t) = \sigma^2, \; t = 1, 2, 3, \dots, T$$

Θεωρώ ότι η ελεγχοσυνάρτηση είναι: $\tau(\underset{\sim}{x}) = \dfrac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{T}}} \overset{\mu=\mu^*}{\sim} S_t(T-1)$

Απόδειξη

Έχουμε δεδομένα ότι $H_0: \mu = \mu^*$

$$\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{T}\right) \quad \text{και} \quad (T-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(T-1)$$

άρα $$t = \frac{\hat{\mu} - \mu^*}{\sqrt{Var(\hat{\mu})}} = \frac{\hat{\mu} - \mu^*}{\sqrt{\frac{s^2}{T}}} \quad (1)$$

Χρησιμοποιούμε το Λήμμα

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad \Rightarrow \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{T}}} \sim N(0, 1)$$

Επομένως η (1) γράφεται:

$$t = \frac{\hat{\mu} - \mu^*}{\sqrt{\frac{s^2}{T}}} = \frac{\dfrac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{T}}}}{\sqrt{\dfrac{1}{T-1}\left\{(T-1)\dfrac{s^2}{\sigma^2}\right\}}} \quad \left.\begin{matrix} \sim N(0,1) \\ \sim \chi^2(T-1) \end{matrix}\right\} \sim S_T(T-1)$$

Άσκηση 2

$Y_t \sim Exp(\theta)$ $\quad f(Y_t;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y_t}{\theta}}, \theta>0, \ y_t>0$

$\boxed{E(Y_t)=\theta}, \ E(Y_t^2) = 2\theta^2, Var(Y_t)=\theta^2$

$Var(Y_t) = E(Y_t^2) - (E(Y_t))^2 = 2\theta^2 - \theta^2$

$\Leftrightarrow \boxed{Var(Y_t) = \theta^2}$

(α) Βήμα 1ο: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(y_t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y_t}{\theta}} \quad t=1,2,\dots,T$$

Βήμα 2ο: Κατασκευάζουμε συνάρτηση Πιθανοφάνειας

$$L(\theta,y) = f(\underline{y};\theta) \overset{IID}{=\!=} f(Y_1;\theta)\cdot f(Y_2;\theta)\cdot \ldots \cdot f(Y_T;\theta)$$

$$= \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y_t}{\theta}} = \frac{1}{\theta^T}\cdot e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{t=1}^{T} y_t} = \theta^{-T} \cdot e^{-\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{\theta}}$$

Βήμα 3ο

$$\ell = \ln L(\theta;y) = -T\ln\theta - \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{\theta}$$

Βήμα 4ο: Συνθήκες 1ης τάξης (FOC)

$$\frac{d\ell}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow -\frac{T}{\theta} + \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{\theta^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{T}{\cancel{\theta}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{\theta^{\cancel{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

Βήμα 5ο: Συνθήκες 2ης τάξης (SOC)

$$\frac{d^2\ell}{d\theta^2} = \frac{T}{\theta^2} - \frac{2\sum_{t=1}^{T} y_t}{\theta^3} < 0$$ άρα έχουμε max

και $\boxed{\hat{\theta}_{ML} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t}$

(B) Έχουμε $E(Y_t)=\theta$ και $Var(Y_t)=\theta^2$

Αμεροληψία:

$$E(\hat{\theta})=E\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_t\right)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}E(Y_t)=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\theta=\frac{1}{\cancel{T}}\cancel{T}\cdot\theta=\theta$$, Άρα αμερόληπτος

Συνέπεια:

(i) $$\lim_{T\to\infty}E(\hat{\theta})=\lim_{T\to\infty}\theta=\theta$$

$$Var(\hat{\theta})=Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_t\right)=\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}Var(Y_t)$$

$$=\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\theta^2=\frac{1}{T^2}T\cdot\theta^2=\frac{\theta^2}{T}$$

(ii) $$\lim_{T\to\infty}Var(\hat{\theta})=\lim_{T\to\infty}\frac{\theta^2}{T}=0$$ Άρα είναι συνεπής

Πλήρη Αποτελεσματικότητα

$$I_T(\theta)=E\left\{-\frac{d^2\ln L(\theta)}{d\theta^2}\right\}=E\left\{-\frac{T}{\theta^2}+\frac{2}{\theta^3}\sum_{t=1}^{T}y_t\right\}$$

$$=-\frac{T}{\theta^2}+\frac{2}{\theta^3}\sum_{t=1}^{T}E(Y_t)=-\frac{T}{\theta^2}+\frac{2T\cancel{\theta}}{\theta^{\cancel{3}2}}$$

$$=-\frac{T}{\theta^2}+\frac{2T}{\theta^2}=\frac{2T-T}{\theta^2}=\frac{T}{\theta^2}$$

Όμως $CR(\theta)=I_t^{-1}(\theta)=\frac{\theta^2}{T}=Var(\hat{\theta})$

Άρα είναι πλήρη Αποτελεσματικός

Άσκηση 3

(4)

$$y_t = B_0 + B_1 \cdot X_t + B_2 Z_t + B_3 r_t + u_t$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & Z_1 & r_1 \\ 1 & X_2 & Z_2 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_T & Z_T & r_T \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix}$$

Κατανομή Εκτιμητών Ελαχίστων Τετραγώνων

1 Κατανομή $\hat{\sigma}^2_{LS} = \frac{1}{T} \hat{U}'\hat{U} = \frac{1}{T}(Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B})$

<u>Λήμμα</u>: Έστω $z \sim N(\mu, I_n)$. Τότε για πίνακα $\underset{n \times n}{A}$ συμμετρικό $(z-\mu)'A(z-\mu) \sim \chi^2(tr(A))$ αν και μόνο αν A ταυτοτικός

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 1 \end{pmatrix}$$

- $Var(z_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$
- $Cov(z_i, z_j)$, $i \neq j$

Σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα έχουμε:

$$\hat{\sigma}^2_{LS} = \frac{1}{T}\hat{U}'U = \frac{1}{T}U'MU \Rightarrow \frac{\hat{\sigma}^2_{LS}}{\sigma^2} = \frac{1}{T}\frac{U'}{\sigma}M\frac{U}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{\sigma}^2_{LS}}{\sigma^2} = \frac{1}{T}\varepsilon' M \varepsilon, \text{ όπου } \varepsilon = \frac{U}{c} \text{ με } \varepsilon \sim N(0, I_T)$$

$$\Rightarrow T \cdot \frac{\sigma^2_{LS}}{\sigma^2} = \varepsilon' M \cdot \varepsilon$$

- Εφόσον ο M είναι συμμετρικός και ταυτοτικός έχουμε

$$T\frac{\hat{\sigma}^2_{LS}}{\sigma^2} = \varepsilon' M \varepsilon \sim \chi^2(\underbrace{tr(M)}_{T-K})$$

Άρα $T \cdot \frac{\hat{\sigma}^2_{LS}}{\sigma^2} \sim \chi^2(T-K)$ με $K=4$

άρα $\sim \chi^2(T-4)$

2) Κατανομή $\hat{B}_{LS}$

$$\hat{B}_{LS} = (X'X)^{-1}X'Y \Rightarrow \hat{B}_{LS} = (X'X)^{-1}X'(XB+U) =$$
$$= (X'X)^{-1}X'XB + (X'X)^{-1}X'U = B + (X'X)^{-1}X'U$$

Άρα ο $\hat{B}_{LS}$ είναι γραμμική συνάρτηση του U και τα U_t είναι ανεξάρτητα.

- $$E(\hat{B}_{LS}) = E\left(B + (X'X)^{-1}X'U\right) = B + (X'X)^{-1}X'\cancelto{0}{E(U)} = B$$

- $$Var(B_{LS}) = E\left[(\hat{B} - E(\hat{B}))(\hat{B} - E(\hat{B}))'\right]$$
$$= E\left[(\cancel{B} + (X'X)^{-1}X'U - \cancel{B})(\cancel{B} + (X'X)^{-1}X'U - \cancel{B})'\right]$$
$$= E\left[((X'X)^{-1}X'U)((X'X)^{-1}X'U)'\right] = E\left[(X'X)^{-1}X'UU'X(X'X)^{-1}\right]$$
$$= (X'X)^{-1}X'\overset{=\Sigma}{E(UU')}\cdot X(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1}X'\Sigma X(X'X)^{-1}$$
$$= \Sigma(X'X)^{-1}\underbrace{X'X(X'X)^{-1}}_{I} = \Sigma(X'X)^{-1}$$

Άρα η κατανομή του $\hat{B}_{LS}$ είναι:

$$\hat{B}_{LS} \sim N\left(B, \Sigma(X'X)^{-1}\right)$$

Άσκηση 4

(i) $H_0 : b_0 = 0.0$

Κάνουμε Έλεγχο κατά Fisher

$$\tau = \frac{\hat{b}_0 - b_0}{\sqrt{Var(\hat{b}_0)}} \underset{a}{\overset{H_0}{\sim}} St\,(T-K), \text{ όπου } T = 204,\ K = 5$$

$$\tau^* = \frac{-0,2379 - 0}{15.9333} = -0,015$$

Υπολογίζω το p-value

$$p\text{-value} = P(|t| \geq t^*;\ H_0 \text{ is valid})$$

$$= 2P(t \geq t^*;\ H_0 \text{ is valid}) = 2 \cdot 0,4690 = 0,938$$

άρα p-value $> a = 0,05$ άρα η H_0 στηρίζεται ισχυρά

(ii) $H_0 : \sigma^2 = 64$, $H_1 : \sigma^2 < 64$

$$\tau = \frac{(T-K)}{\sigma^2} s^2 \underset{a}{\overset{H_0}{\sim}} X^2(T-K)$$

$$\tau^* = \frac{(204-5)}{64} \cdot (7,8822)^2 = 193,18$$

$$C_0 := \{ t^* : t^* > c \}$$

$$C_1 := \{ t^* : t^* \leq c \}$$

άρα $P(t \leq c;\ H_0 \text{ is valid}) = 0,05$

$$\Leftrightarrow 1 - P(t \geq c;\ H_0 \text{ is valid}) = 0,05$$

(7)

$\Leftrightarrow P(t \geq c;\ H_0 \text{ is valid}) = 0,95$

άρα $c = 77,9$

$t^* > c$ άρα δέχομαι την H_0

(iii) $H_0: b_1 = 0,\ b_2 = 0$ (vs) $b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0$

Θέλουμε $b_1 = 0$ και $b_2 = 0$ στο αρχικό μοντέλο

$y_t = b_0 + 0 \cdot x_t + 0 \cdot z_t + b_3 r_t + b_4 \cdot P_t + u_t$

$\Leftrightarrow y_t = b_0 + b_3 r_t + b_4 P_t + u_t$

άρα θα πάρουμε το 1^{o} Μοντέλο

Αφού ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας θα κάνουμε F-test

$$F = \frac{RRSS - URSS}{URSS} \cdot \frac{T-K}{m} \overset{H_0}{\underset{a}{\sim}} F(m, T-K) \qquad \begin{array}{l} m = 2 \\ T = 204 \\ K = 5 \end{array}$$

$$F^* = \frac{12.404,96 - 12.363,82}{12.363,82} \cdot \frac{204-5}{2} = 0,3311$$

$C_0 := \{F^* : F^* < c\},\ C_1 := \{F^* : F^* \geq c\}$

$P(F \geq c;\ H_0 \text{ is valid}) = a = 0,05$

$c = F(2,199) = 3,04$

άρα $F^* < c$

άρα αποδέχομαι την H_0