ΤΜΗΜΑ: ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚ.

ΠΑΠΕΙ ΘΕΜΑΤΑ: ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2012

ΑΣΚΗΣΗ 1

(a) Έστω ότι η στοχαστική ανέλιξη $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_T)$ είναι στάσιμη και markov(2) και την από κοινού κατανομή είναι κανονική. Ξεκινώντας από την από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας κατασκευάστε το κατάλληλο μοντέλο παλινδρόμησης

(β) Έστω ότι η ανεξάρτητη στοχαστική ανέλιξη $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_T)$ όπου κάθε τυχαία μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση σ^2, $Y_t \sim N(0, \sigma^2)$, $t = 1, 2, \ldots, T$

(i) Να κατασκευάσετε το κατάλληλο μοντέλο παλινδρόμησης

(ii) Να βρείτε τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας του μοντέλου και τις κατανομές τους. Να εξετάσετε τους εκτιμητές ως προς την αμεροληψία, την συνέπεια και την πλήρη αποτελεσματικότητα

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω το κλασικό μοντέλο πολλαπλής παλινδρόμησης

$$Y_t = a + B X_t + \gamma p_t + \delta z_t + \theta r_t + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \quad u_t \sim N(0,1)$$

(a) Να βρείτε τους εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων των αγνώστων παραμέτρων του μοντέλου

(β) Να εξετάσετε αν οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων του μοντέλου είναι BLUE

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2012

ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1

(a) Ξεκινάμε από την από κοινού κατανομή

Με βάση την υπόθεση Markov(2)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_T; \phi) = f_T(x_T / x_{T-1}, x_{T-2}, \dots, x_1; \theta_T) \cdot$$
$$\cdot f_{T-1}(x_{T-1} / x_{T-2}, x_{T-3}, \dots, x_1; \theta_{T-1}) \cdot \ldots \cdot f_3(x_3 / x_2, x_1; \theta_3) \cdot$$
$$\cdot f_2(x_2 / x_1; \theta_2) \cdot f_1(x_1; \theta_1) = f_2(x_1, x_2; \theta_2)$$

↳ αυτή θεωρείται περιθώρια της αρχικής

$$\overset{Markov(2)}{=} f_T(x_T / x_{T-1}, x_{T-2}; \theta_T) \cdot f_{T-1}(x_{T-1} / x_{T-2}, x_{T-3}; \theta_{T-1}) \ldots$$
$$\ldots \cdot f_3(x_3 / x_2, x_1; \theta_3) \cdot f_2(x_1, x_2; \theta_2)$$

$$\overset{\text{Στασιμότητα}}{=} f(x_T / x_{T-1}, x_{T-2}; \theta) \cdot f(x_{T-1} / x_{T-2}, x_{T-3}; \theta) \ldots f(x_3 / x_2, x$$
$$\cdot f_2(x_1, x_2; \theta_2)$$

Άρα $f(x_T / x_{t-1}, x_{t-2}; \theta) \quad \forall\ t = 3, 4, \dots, T$

Έστω $X_t / X_{t-1}, X_{t-2} \sim N(B_0 + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2}, \sigma^2)$

$X_t = E(X_t / \sigma(X_{t-1}, X_{t-2})) + u_t$ ⇝ Στατιστικός Γεννεσιουργός Μηχανισμός

Αν βάλουμε αυτό που πρέπει στη θέση του δεσμευτικού μέσου θα φτιάξουμε το μοντέλο παλινδρόμησης.

$$X_t = B_0 + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + u_t$$ ⇝ Αυτοπαλίνδρομο Μοντέλο AR(2)

$$Var(X_t / \sigma(X_{t-1}, X_{t-2})) = \sigma^2$$

(B) $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ και $Y_t \sim N(0, \sigma^2)$
$t = 1, 2, \dots, T$

(i) Το μοντέλο είναι: $X_t = \mu + u_t = 0 + u_t = u_t$
και $Var(X_t) = \sigma^2$

(ii) $L(\sigma^2; \underset{\sim}{X}) \sim f(X_1, X_2, \dots, X_T; \mu, \sigma^2) \stackrel{(IID)}{=}$

$$= f(X_1; \sigma^2) \cdot f(X_2; \sigma^2) \cdot \dots \cdot f(X_T; \sigma^2)$$

$$= \prod_{t=1}^{T} f(X_t; \sigma^2) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{X_t^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^T \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-T/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$$

Άρα $\ln L = -\frac{T}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T} X_t^2$

$$= -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{T}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T} X_t^2$$

FOC

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{T}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{T} X_t^2$$

Θέλω $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0 \Leftrightarrow +\frac{T}{\cancel{2\sigma^2}} = \frac{1}{\cancel{2}(\sigma^2)^{\cancel{2}}}\sum_{t=1}^{T} X_t^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$$

$$\left((x)^{-2}\right)' = -2x^{-3}$$ (3)

<u>SOC</u> $$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial(\sigma^2)^2} = +\frac{T}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3}\sum_{t=1}^{T} x_t^2$$

$$= \frac{T}{2(\sigma^2)^2} - \frac{T}{(\sigma^2)^3}\underbrace{\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t^2\right)}_{\sigma^2} = \frac{T}{2(\sigma^2)^2} - \frac{T}{(\sigma^2)^{\cancel{3}\,2}}\cancel{\sigma^2}$$

$$= \frac{T}{2(\sigma^2)^2} - \frac{T}{(\sigma^2)^2} = -\frac{T}{(\sigma^2)^2} < 0$$

Άρα έχω max και $\hat{\sigma}_{ML} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t^2$

<u>Κατανομές</u>

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t)^2$$

Έχω $\frac{x_t - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

άρα $\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{x_t-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(T)$

Έχω $\frac{T}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2(T-1)$

οπότε $\frac{T}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2(T-1)$

<u>Αμεροληψία</u>

Πρέπει $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ για να είναι ο εκτιμητής αμερόληπτος

$$\frac{T}{\sigma^2}\cdot\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2(T-1) \Leftrightarrow E\left(\frac{T}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2\right) = T-1$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\sigma^2}E(\hat{\sigma}^2) = T-1 \Rightarrow E(\hat{\sigma}^2) = \frac{T-1}{T}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

άρα ο εκτιμητής δεν είναι αμερόληπτος

Συνέπεια

$$\lim_{T\to\infty} E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$

$$\lim_{T\to\infty} Var(\hat{\sigma}^2) = 0$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{T-1}{T}\sigma^2$$

άρα $\lim_{T\to\infty} \frac{T-1}{T}\sigma^2 = \lim_{T\to\infty}\left(1-\frac{1}{T}\right)\sigma^2 = (1-0)\sigma^2 = \sigma^2$

$\frac{T}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2(T-1)$ άρα $Var\left(\frac{T}{\sigma^2}\cdot\hat{\sigma}^2\right) = 2(T-1)$

$$\Leftrightarrow \frac{T^2}{(\sigma^2)^2} Var(\hat{\sigma}^2) = 2(T-1)$$

$$\Leftrightarrow Var(\hat{\sigma}^2) = \frac{2(T-1)}{T^2}(\sigma^2)^2$$

Άρα $\lim_{T\to\infty} Var(\hat{\sigma}^2) = \lim_{T\to\infty} 2\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^2}\right)(\sigma^2)^2$

$$= 2(0-0)(\sigma^2)^2 = 0$$

άρα ο σ^2 είναι συνεπής εκτιμητής.

Πλήρως Αποτελεσματικότητα

(5)

Έχω υπολογίσει ότι $CR(\sigma^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{T}$

Εδώ πρέπει να πάρω έναν αμερόληπτο εκτιμητή για

σ^2 άρα $s^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (x_t)^2$

άρα $\frac{T-1}{\sigma^2} s^2 \sim \chi^2(T-1) \Leftrightarrow Var\left(\frac{T-1}{\sigma^2} \cdot s^2\right) = 2(T-1)$

$\Leftrightarrow \frac{(T-1)^{\cancel{2}}}{(\sigma^2)^2} Var(s^2) = 2(\cancel{T-1}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Var(s^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{T-1}$

όμως $Var(s^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{T-1} > CR(\sigma^2)$

Συνεπώς το s^2 <u>Δεν</u> είναι πλήρως αποτελεσματικός εκτιμητής της παραμέτρου σ^2.

Άσκηση 2

$$Y_t = a + \beta X_t + \gamma p_t + \delta z_t + \theta r_t + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$$u_t \sim N(0,1)$$

(a) $\mathbf{Y} = X \cdot B + u$

όπου $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & p_1 & z_1 & r_1 \\ 1 & X_2 & p_2 & z_2 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_T & p_T & z_T & r_T \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \theta \end{pmatrix}$ $\quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix}$

Εκτίμηση Με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων

$Y = X \cdot B + u \Leftrightarrow u = Y - XB \quad (1)$

άρα $l(B) = \sum_{t=1}^{T} u_t^2 = u' \cdot u$

$$\min_{\beta} l(B) = \min_{B} u'u \overset{(1)}{=} \min_{B} (Y - XB)'(Y - XB)$$

$$= (Y' - B'X')(Y - XB) = Y'Y - Y'XB - B'X'Y + B'X'XB$$

$$= Y'Y - 2Y'XB + B'X'XB$$

FOC $\dfrac{\partial l}{\partial B} = 0 \Rightarrow -2X'Y + 2X'XB = 0$

$\Leftrightarrow -X'Y + X'XB = 0 \Leftrightarrow (X'X)'X'Y + (X'X)^{-1}(X'X)B = 0$

$\Leftrightarrow (X'X)^{-1}X'Y + IB = 0$

$$(=) -(X'X)^{-1}X'Y + B = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\hat{B}_{LS} = (X'X)^{-1}X'Y}$$

Διαισθητικά έχω: $\hat{\sigma}^2_{LS} = \frac{1}{T}\hat{u}'\hat{u}$

$$(=) \hat{\sigma}^2_{LS} = \frac{1}{T}(Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B})$$

(B) Αμεροληψία

$$\hat{B}_{LS} = (X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'(XB + u) =$$

$$= \underbrace{(X'X)^{-1}\cdot X'X}_{I}B + (X'X)^{-1}\cdot X'u = IB + (X'X)^{-1}\cdot X'u$$

$$= B + (X'X)^{-1}X'\cdot u$$

άρα $E(\hat{B}_{LS}) = E\left[(X'X)^{-1}X'Y\right] = E\left[B + (X'X)^{-1}\cdot X'u\right]$

$$= E(B) + E\left[(X'X)^{-1}\cdot X'u\right] =$$

$= B + (X'X)^{-1}\cdot X'\overbrace{E(u)}^{=0} = B$ άρα είναι αμερόληπτος

Συνέπεια

$\hat{B} = (X'X)^{-1}\cdot XY$ $\quad\quad \hat{B} \sim N(B, \sigma^2(X'X)^{-1})$

(a) $E(\hat{B}) = B$

άρα $\lim\limits_{T\to\infty} E(\hat{B}) = \lim\limits_{T\to\infty} B = B$

(B) $\lim_{T\to\infty} Var(\hat{B}) = \lim_{T\to\infty} \sigma^2 (X'X)^{-1} = \lim_{T\to\infty} \frac{\sigma^2}{T}\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}$

$= 0 \cdot Q^{-1} = 0$ αφού $\lim_{T\to\infty} \frac{X'X}{T} = Q \neq 0$

άρα ο $\hat{B}$ είναι συνεπής

Πλήρης Αποτελεσματικότητα

$$I_T(B, \sigma^2) = E\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} X'X & -\frac{1}{(\sigma^2)^2} X'u \\ -\frac{1}{(\sigma^2)^2} u'X & \frac{T}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} u'u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{X'X}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{T}{2(\sigma^2)^2} \end{pmatrix}$$

άρα $CR(B, \sigma^2) = I^{-1}(B, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \sigma^2 (X'X)^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{2(\sigma^2)^2}{T} \end{pmatrix}$

Άρα $CR(B) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$

$CR(\sigma^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{T}$

άρα $CR(B) = Var(\hat{B})$ άρα είναι πλήρως αποτελεσματικός

Με τις υποθέσεις του κλασσικού γραμμικού μοντέλου πολλαπλής παλινδρόμησης ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων $\hat{B}_{LS}$ είναι

<u>**BLUE**</u>

(1)

ΠΑΠΕΙ ΤΜΗΜΑ: ΧΡΗΜΑΤΟ. ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ 27/09/2013

Άσκηση 1 (32 Μονάδες)

Από κανονικό μοντέλο $X_t = \mu + u_t$, $Var(X_t) = \sigma^2$, $t = 1,2,3,..,T$

(α) Να βρείτε τις κατανομές των πιο κάτω εκτιμητών της παραμέτρου μ:

(i) $\hat{\mu}_1 = \frac{X_T}{T}$, $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_T)$, $\hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}(X_1 + X_3)$, $\hat{\mu}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$

(β) Να συγκρίνεται τους εκτιμητές της παραμέτρου μ με όρους αμεροληψίας, σχετικής αποτελεσματικότητας και συνέπειας

(γ) Να συγκρίνεται τους εκτιμητές της παραμέτρου σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \hat{\mu}_T)^2 \quad \text{και} \quad S^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \hat{\mu}_T)^2 \quad \text{με}$$

κριτήριο τη συμπεριφορά τους σε πεπερασμένα δείγματα.

Άσκηση 2 (32 Μονάδες)

Έστω το μοντέλο παλινδρόμησης $Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma e_t + \delta Z_t + u_t$ $t = 1,2,..,T$, για το οποίο ισχύουν όλες οι υποθέσεις του κλασικού γραμμικού μοντέλου (συμπεριλαμβανομένης και της κανονικότητας)

(α) Να βρείτε τις κατανομές των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE εκτιμητές) των αγνώστων παραμέτρων του μοντέλου (Σημείωση: Δεν χρειάζεται να δείξετε την διαδικασία εύρεσης των εκτιμητών)

(β) Να εξετάσετε τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας ως προς την συνέπεια.

(δ) Αν η δεσμευμένη διακύμανση είναι γνωστή και ισούται με μονάδα ($\sigma^2 = 1$), να ορίσετε ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο της υπόθεσης $H_0: a = a^*$, όπου $a^* \in \mathbb{R}$

Άσκηση 3 (36 Μονάδες)

Ερευνητής για να μελετήσει τη σχέση μεταξύ πέντε οικονομικών μεταβλητών υιοθετεί το κλασικό γραμμικό μοντέλο πολυδρόμησης $Y_t = a + BX_t + \gamma Z_t + \delta r_t + u_t$, $t = 1, 2, 3, \ldots, 201$ το δε αποτέλεσμα της εκτίμησης είναι:

$$Y_t = \underset{(0,398)}{0,198} - \underset{(0,015)}{1,101}\,X_t + \underset{(0,052)}{0,327}\,Z_t - \underset{(0,024)}{0,177}\,r_t + u_t \qquad S = 4,506514, \quad R^2 = 0,40042$$

$RSS = 4.000,943$, $\ln L = -22.000,3120$ όπου τα τυπικά σφάλματα (standard errors) δίνονται εντός παρενθέσεων

(α) Να εξετάσετε τις πιο κάτω υποθέσεις αναφέροντας τα βασικά βήματα της διαδικασίας ελέγχου.

(i) $H_0: B = -1,0$

(ii) $H_0: \sigma^2 = 5$, $H_1: \sigma^2 < 5$ Το επίπεδο σημαντικότητας είναι 5%

(iii) $H_0: \delta = 0$ (vs) $H_1: \delta > 0$

(β) Ο Ερευνητής εκτιμά και τα ακόλουθα επτά μοντέλα των οποίων τα αποτελέσματα δίνονται πιο κάτω:

(1ο) $$Y_t + X_t = \underset{(0,083)}{0,112} + \underset{(0,013)}{0,969}\,Z_t + \bar{u}_t, \quad \ln L = -29547,98$$

(2ο) $$Y_t = \underset{(0,051)}{0,083} + \hat{u}_t, \quad R^2 = 0,0009, \quad RSS = 48.760,1, \quad \ln L = -29022,20$$

(3ο) $$Y_t = \underset{(0,069)}{0,040} - \underset{(0,014)}{0,815}\,Z_t + \tilde{v}_t, \quad \ln L = -31.548,24$$

(4ο) $$Y_t - X_t = \underset{(0,62)}{-0,014} + \underset{(0,009)}{0,424}\,Z_t + \hat{v}_t$$

(5ο) $\hat{V}_t = -0{,}101 + 1{,}324 Z_t + \hat{\varepsilon}_t$, $R^2 = 0{,}000913$

$\qquad\;(0{,}062) \qquad (0{,}087)$ $\qquad$ $RSS = 349356{,}4$

(6ο) $\hat{V}_t = 0{,}004 - 0{,}633 X_t + 0{,}192 Z_t + 1{,}293 r_t + \hat{e}_t$

$\qquad\;(0{,}053) \quad (0{,}018) \qquad (0{,}005) \qquad (0{,}055)$

$R^2 = 0{,}203084$, $RSS = 278407{,}5$, $\ln L = -22.007{,}79$

(7ο) $Y_t = 0{,}083 - 0{,}233 X_t + \hat{u}_t$ $\quad R^2 = 0{,}0021$, $RSS = 389.602{,}1$

$\qquad\;(0{,}081) \qquad (0{,}016)$ $\qquad$ $\ln L = -26.999{,}20$

(i) $H_0: B = 1,\ \delta = 0$ (vs) $H_1: B \neq 1,\ \delta \neq 0$, αφού θεωρήστε ότι δεν ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας ($a = 1\%$)

(ii) H_0: « το απλό κανονικό μοντέλο είναι το κατάλληλο μοντέλο παλινδρόμησης », έναντι της H_1: « το απλό κανονικό μοντέλο ΔΕΝ είναι κατάλληλο μοντέλο παλινδρόμησης », αφού θεωρήστε ότι ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας (Για επίπεδο σημαντικότητας 5%)

(iii) $H_0: B = -1,\ \delta = 0$ έναντι της $H_1: B \neq -1,\ \delta \neq 0$ αφού θεωρήστε ότι δεν ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας ($a = 10\%$)

<u>Παράρτημα</u>: Έστω ο αντιστρέψιμος $p\times p$ πίνακας A ο οποίος μπορεί να γραφεί με την βοήθεια υποπινάκων ως εξής: $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

Τότε $B = A^{-1}$, όπου $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ και

$B_{11} = A_{11\cdot 2}^{-1}$, $\quad B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22\cdot 1}^{-1}$, $\quad B_{21} = -A_{22\cdot 1}^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$

$B_{22} = A_{22\cdot 1}^{-1}$, όπου $A_{11\cdot 2} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$ και

$$A_{22\cdot 1} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$$

Άσκηση 1

(α) Κατανομές εκτιμητών

(i) $\hat{\mu}_1 = \frac{X_T}{T}$

$$E(\hat{\mu}_1) = E\left(\frac{X_T}{T}\right) = \frac{1}{T} E(X_t) = \frac{1}{T} \mu = \frac{\mu}{T}$$

$$Var(\hat{\mu}_1) = Var\left(\frac{X_T}{T}\right) = \frac{1}{T^2} Var(X_T) = \frac{1}{T^2} \sigma^2 = \left(\frac{\sigma}{T}\right)^2$$

άρα $\hat{\mu}_1 \sim N\left(\frac{\mu}{T}, \left(\frac{\sigma}{T}\right)^2\right)$

(ii) $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_T)$

$$E(\hat{\mu}_2) = E\left[\frac{1}{2}(X_1 - X_T)\right] = \frac{1}{2}\left[E(X_1) - E(X_T)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \mu - \mu = 0$$

$$Var(\hat{\mu}_2) = Var\left(\frac{1}{2}(X_1 - X_T)\right) = \frac{1}{4} Var(X_1) - \frac{1}{4} Var(X_t)$$

$$= \frac{1}{4}\sigma^2 - \frac{1}{4}\sigma^2 = 0$$

$$\hat{\mu}_2 \sim N(0, 0)$$

(iii) $\hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}(X_1 + X_3)$

$$E(\hat{\mu}_3) = E\left[\frac{1}{2}(X_1 + X_3)\right] = \frac{1}{2}\left(E(X_1) + E(X_3)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \mu + \mu = \frac{2\mu}{2} = \mu$$

$$Var(\hat{\mu}_3) = Var\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_3)\right) = \frac{1}{4}\left[Var(X_1) + Var(X_3)\right] (2)$$

$$= \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{2\sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\hat{\mu}_3 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

(iv) $$\hat{\mu}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$$

$$E(\hat{\mu}_T) = E\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} E(X_t) = \frac{1}{\cancel{T}}\cancel{T}\mu = \mu$$

$$Var(\hat{\mu}_T) = Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right) = \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} Var(X_t)$$

$$= \frac{1}{T^2} T\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{T}$$ άρα $\hat{\mu}_T \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{T}\right)$

(B) Η <u>Αμεροληψία</u> ορίζεται ως $E(\hat{\mu}) = \mu$

άρα i, ii είναι μεροληπτικοί αφού $E(\hat{\mu}_1) = \frac{\mu}{T}$ και $E(\hat{\mu}_2) = 0$

ενώ οι (iii), (iv) είναι αμερόληπτοι

Για την <u>σχετική αποτελεσματικότητα</u> εξετάζουμε τους αμερόληπτους εκτιμητές. Άρα $\hat{\mu}_3$, $\hat{\mu}_4$

$$Var(\hat{\mu}_3) = \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{και} \quad Var(\hat{\mu}_4) = \frac{\sigma^2}{T}$$

Έχω $Var(\hat{\mu}_4) \leq Var(\hat{\mu}_3)$

Άρα ο εκτιμητής $\hat{\mu}_3$ είναι σχετικά αποτελεσματικότερος του $\hat{\mu}_4$

Συνέπεια

(i) $\lim\limits_{T\to\infty} E(\hat{\mu}_1) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{\mu}{T} = 0$ άρα ο $\hat{\mu}_1$ δεν είναι συνεπής

(ii) $\lim\limits_{T\to\infty} E(\hat{\mu}_2) = \lim\limits_{T\to\infty} 0 = 0$ άρα ο $\hat{\mu}_2$ δεν είναι συνεπής

(iii) $\lim\limits_{T\to\infty} E(\hat{\mu}_3) = \lim\limits_{T\to\infty} \mu = \mu$

$\lim\limits_{T\to\infty} Var(\hat{\mu}_3) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2}$, άρα ο $\hat{\mu}_3$ δεν είναι συνεπής

(iv) $\lim\limits_{T\to\infty} E(\hat{\mu}_4) = \lim\limits_{T\to\infty} \mu = \mu$

$\lim\limits_{T\to\infty} Var(\hat{\mu}_4) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{\sigma^2}{T} = 0$ άρα ο $\hat{\mu}_4$ είναι συνεπής

(γ) Ιδιότητες Πεπερασμένων Δειγμάτων $(T<\infty)$

(i) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t-\hat{\mu}_T)^2$ (ii) $\hat{s}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(X_t-\hat{\mu}_T)^2$

1 Αμεροληψία

(i) $\frac{T}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2(T-1) \Rightarrow E\left(\frac{T}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2\right) = T-1$

$\Rightarrow \frac{T}{\sigma^2}E(\hat{\sigma}^2) = T-1 \Rightarrow E(\hat{\sigma}^2) = \frac{T-1}{T}\sigma^2 \neq \sigma^2$

άρα ο εκτιμητής δεν είναι αμερόληπτος

(ii) $\frac{T-1}{\sigma^2} s^2 \sim \chi^2(T-1)$

$E\left(\frac{T-1}{\sigma^2} s^2\right) = T-1 \Rightarrow \frac{T-1}{\sigma^2} E(s^2) = T-1 \Leftrightarrow E(s^2) = \sigma^2$

Άρα αμερόληπτος

(2) Σχετική Αποτελεσματικότητα

Επειδή και οι 2 εκτιμητές μου δεν είναι αμερόληπτοι
δεν μπορούμε να συγκρίνουμε την σχετική τους αποτελεσματικότητα

(3) Πλήρη Αποτελεσματικότητα

ο $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu}_T)^2$ δεν είναι αμερόληπτος άρα

αναγκαστικά θα δουλέψουμε με τον s^2

Έχουμε αποδείξει ότι $CR(\sigma^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{T}$

$\frac{T-1}{\sigma^2} s^2 \sim \chi^2(T-1) \Leftrightarrow Var\left(\frac{T-1}{\sigma^2} \cdot s^2\right) = 2(T-1)$

$\Leftrightarrow \frac{(T-1)^{\cancel{2}}}{(\sigma^2)^2} Var(s^2) = 2(\cancel{T-1}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Var(s^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{T-1} > CR(\sigma^2)$

Συνεπώς το s^2 <u>Δεν</u> είναι πλήρως αποτελεσματικός
εκτιμητής της παραμέτρου σ^2

(4) Εκτιμητής Ελαχίστου Μέσου Σφάλματος Τετραγώνου (MSE - Mean Square Error)

Εδώ έχουμε ένα μεροληπτικό ($\hat{\sigma}^2$) και έναν αμερόληπτο
(s^2) οπότε θα συγκρίνω το μέσο σφάλμα τετραγώνου.

$$MSE(\hat{\sigma}^2) = E\left[\hat{\sigma}^2 - \sigma^2\right]^2 = Var(\hat{\sigma}^2) + b(\hat{\sigma}^2)^2 \qquad (5)$$

όπου $b(\hat{\sigma}^2) = E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 \iff$

$$\iff b(\hat{\sigma}^2) = \frac{T-1}{T}\sigma^2 - \sigma^2 = \left(\frac{T-1}{T} - 1\right)\sigma^2$$

$$= \frac{\cancel{T}-1-\cancel{(T)}}{T}\sigma^2 \iff \boxed{b(\hat{\sigma}^2) = -\frac{\sigma^2}{T}}$$

$$\frac{T}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2(T-1) \Rightarrow Var\left(\frac{T}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2\right) = 2(T-1)$$

$$\iff \frac{T^2}{(\sigma^2)^2} Var(\hat{\sigma}^2) = 2(T-1) \iff$$

$$\iff Var(\hat{\sigma}^2) = \frac{2(T-1)(\sigma^2)^2}{T^2}$$

Άρα $MSE(\hat{\sigma}^2) = \frac{2(T-1)(\sigma^2)^2}{T^2} - \frac{\sigma^4}{T} =$

$$= \frac{2(T-1)\cdot(\sigma^2)^2 - T\sigma^2}{T^2} \leq MSE(s^2)$$

Άρα ο εκτιμητής $\hat{\sigma}^2$ είναι εκτιμητής ελαχίστου σφάλματος τετραγώνου αφού $MSE(\hat{\sigma}^2) \leq MSE(s^2)$

Άσκηση 2

$$Y_t = a + B X_t + \gamma \rho_t + \delta z_t + u_t \,,\ t = 1, 2, \dots, T$$

(a) $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & \rho_1 & z_1 \\ 1 & X_2 & \rho_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_T & \rho_T & z_T \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix}$

(i) $\hat{B}_{ML} = (X'X)^{-1} X'Y$ (ii) $\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{T} \hat{u}'\hat{u} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma^2_{ML} = \frac{1}{T} (Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B})$$

Κατανομή $\hat{\sigma}^2_{ML}$

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{T} (Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B})$$

Λήμμα Έστω $Z \sim N(\mu, I_n)$. Τότε για πίνακα $A_{n\times n}$ συμμετρικό: $(Z-\mu)'A(Z-\mu) \sim \chi^2(tr(A))$ αν και μόνο αν ο A είναι ταυτοτικός

$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$

- $Var(Z_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$
- $Cov(Z_i, Z_j) = 0$ για $i \neq j$

Έτσι από το παραπάνω Λήμμα έχουμε:

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{T} \hat{U}'\hat{U} = \frac{1}{T} U'MU \quad \left(\begin{matrix} Z \sim N(\mu, I_T) \\ U \sim N(0, \sigma^2 I_T) \end{matrix} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{\sigma}^2_{ML}}{\sigma^2} = \frac{1}{T} \frac{U'}{\sigma} \cdot M \frac{U}{\sigma} \Rightarrow \frac{\hat{\sigma}^2_{ML}}{\sigma^2} = \frac{1}{T} \mathcal{E}' M \mathcal{E}$$

όπου $\mathcal{E} = \frac{U}{\sigma}$ και $\mathcal{E} \sim N(0, I_T)$

$$\Rightarrow T \cdot \frac{\sigma^2_{ML}}{\sigma^2} = \varepsilon' M \varepsilon$$

Εφόσον ο M είναι συμμετρικός και ταυτοτικός έχω ότι:

$$T \frac{\hat{\sigma}^2_{ML}}{\sigma^2} = \varepsilon' M \varepsilon \sim X^2(\underbrace{tr(M)}_{\to T-K})$$

Άρα $\quad T \dfrac{\hat{\sigma}^2_{ML}}{\sigma^2} \sim X^2(T-K) \qquad$ Εδώ $K=4$

άρα $\quad T \dfrac{\hat{\sigma}^2_{ML}}{\sigma^2} \sim X^2(T-4)$

Κατανομή $\hat{B}_{ML}$

$$\hat{B}_{ML} = (X'X)^{-1} X'Y \Rightarrow \hat{B}_{LS} = (X'X)^{-1} X'(XB+U) =$$

$$= (X'X)^{-1} X'XB + (X'X)^{-1} X'U = B + (X'X)^{-1} X'U$$

Άρα $E(\hat{B}_{ML}) = E\left[B + (X'X)^{-1} \cdot X'U\right] = B + (X'X)^{-1} \cdot X' \overset{=0}{E(U)}$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(\hat{B}_{ML}) = B}$$

$$Var(\hat{B}) = E\left[(\hat{B} - E(\hat{B}))(\hat{B} - E(\hat{B}))'\right] =$$

$$= E\left[\cancel{B} + (X'X)^{-1} \cdot X'U - \cancel{B})(\cancel{B} + (X'X)^{-1} \cdot X'U - \cancel{B})'\right.$$

$$= E\left[((X'X)^{-1} X'U)((X'X^{-1} X'U)'\right]$$

$$= E\left[(X'X)^{-1} X'UU'X(X'X)^{-1}\right]$$

$$= (X'X)^{-1} X' \underbrace{E(UU')}_{=\sigma^2 I} \cdot X(X'X)^{-1} =$$

$$= (X'X)^{-1} X' \sigma^2 I X (X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1} \underbrace{X'X (X'X)^{-1}}_{I} = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

Άρα $\hat{B}_{ML} \sim N(B, \sigma^2 (X'X)^{-1})$

(B) Συνέπεια

(i) $\hat{B}_{ML}$

- $\lim_{T\to\infty} E(\hat{B}) = \lim_{T\to\infty} B = B$

- $\lim_{T\to\infty} Var(\hat{B}) = \lim_{T\to\infty} \sigma^2 (X'X)^{-1} = \lim_{T\to\infty} \frac{\sigma^2}{T} \left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}$

$= 0 \cdot Q^{-1} = 0$ Αφού $\lim_{T\to\infty} \frac{X'X}{T} = Q \neq 0$

Άρα ο $\hat{B}_{ML}$ είναι συνεπής

(ii) $\hat{\sigma}^2_{ML}$

Έχω $\frac{T \hat{\sigma}^2_{ML}}{\sigma^2} \sim \chi^2(T-4)$

άρα $E\left(\frac{T \hat{\sigma}^2_{ML}}{\sigma^2}\right) = T-4 \Leftrightarrow \boxed{E(\hat{\sigma}^2_{ML}) = \frac{T-4}{T}\sigma^2}$

$Var\left(\frac{T \hat{\sigma}^2_{ML}}{\sigma^2}\right) = 2(T-4) \Rightarrow \frac{T^2}{(\sigma^2)^2} Var(\hat{\sigma}^2_{ML}) = 2(T-4)$

$\Leftrightarrow \boxed{Var(\hat{\sigma}^2_{ML}) = \frac{2(T-4)}{T^2}(\sigma^2)^2}$

• $\lim_{T\to\infty} E(\hat{\sigma}^2_{ML}) = \lim_{T\to\infty} \frac{T-4}{T}\sigma^2 = \lim_{T\to\infty}\left(1-\frac{4}{T}\right)\sigma^2$

$= (1-0)\sigma^2 = \sigma^2$

• $\lim_{T\to\infty} Var(\hat{\sigma}^2_{ML}) = \lim_{T\to\infty} \frac{2(T-4)}{T^2}(\sigma^2)^2 =$

$= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{2}{T} - \frac{8}{T^2}\right)(\sigma^2)^2 = 0$

Άρα ο $\hat{\sigma}^2_{ML}$ είναι συνεπής

(γ) Κατά Fisher $H_0: a = a^*$ με $a^* \in \mathbb{R}$

$t = \frac{\hat{a} - a^*}{\sqrt{\hat{Var}(\hat{a})}} \overset{H_0}{\sim} S_t$, όπου $\sqrt{\hat{Var}(\hat{a})} = SE$

τυπικό σφάλμα του a

Άσκηση 3

(α) Θα κάνουμε έλεγχο κατά Fisher

(i) Βήμα 1ο $H_0: B = -1,0$

Βήμα 2ο

$\tau = \frac{\hat{B} - B}{\sqrt{\hat{Var}(\hat{B})}} \sim S_t(T-K)$, όπου $T = 201$, $K = 4$

άρα $\tau^* = \frac{-1,101 + 1}{0,015} = -6,733$

Βήμα 3ο

Υπολογίζω το p-value

$$p\text{-value} = P\left(|t| \geq t^* ; H_0 \text{ is valid}\right)$$
$$= 2\, P\left(t \geq t^* ; H_0 \text{ is valid}\right)$$
$$= 2 \cdot P\left(t \geq -6,733 ; H_0 \text{ is valid}\right)$$
$$= 2 \cdot 0,001 = 0,002$$ άρα η H_0 δεν στηρίζεται

(ii) Κατά Neyman - Pearson

Βήμα 1ο

$H_0: \sigma^2 = 5$ έναντι $H_0: \sigma^2 < 5$

Βήμα 2ο

$$\tau = \frac{(T-K)\, s^2}{\sigma^2} \overset{H_0}{\underset{a}{\sim}} \chi^2(T-K)$$

$$\tau^* = \frac{(201-5)\cdot(4,506514)^2}{5} = 796,09$$

Βήμα 3ο

$C_0 := \{\tau^* : \tau^* > c\}$, $C_1 := \{\tau^* : \tau^* \leq c\}$

άρα $P\left(t \leq c ; H_0 \text{ is valid}\right) = a = 0,05$

$\Leftrightarrow 1 - P\left(t > c ; H_0 \text{ is valid}\right) = 1 - 0,05$

$\Leftrightarrow P\left(t > c ; H_0 \text{ is valid}\right) = 0,95$

άρα $c = -124$

Βήμα 4ο

Άρα $\tau^* > c$ Άρα δέχομαι την H_0

(iii) Κατά Neyman - Pearson

Βήμα 1ο $H_0 : \delta = 0$ έναντι $H_1 : \delta > 0$

Βήμα 2ο

$$\tau = \frac{\hat{\delta} - \delta}{\sqrt{\hat{Var}(\hat{\delta})}} \overset{H_0}{\underset{a}{\sim}} S_t(T-K)$$

Άρα $\tau^* = \dfrac{-0,177 - 0}{0,024} = -7,375$

Βήμα 3ο

$C_0 := \{\tau^* : \tau^* < c\}$, $C_1 := \{\tau^* : \tau^* \geq c\}$

άρα $P(t \geq c ; H_0 \text{ is valid}) = a = 0,05$

άρα $c = 1,645$

Βήμα 4ο

$\tau^* < c$

Άρα δέχομαι την H_0

(B)(i) <u>Βήμα 1ο</u> $H_0: B=1,\ \delta=0$ (vs) $H_1: B\neq 1,\ \delta\neq 0$

$T = 201,\quad m = 2,\quad k=5$

Αφού $B=1$ και $\delta=0$ το αρχικό μου μοντέλο γίνεται:

$$Y_t = a + 1X_t + \gamma Z_t + 0\cdot r_t + u_t$$

$\Leftrightarrow Y_t - X_t = a + \gamma Z_t + u_t$ Άρα θα πάρω το 4ο Μοντέλο

Αφού δεν μου δίνονται στοιχεία γι' αυτό το μοντέλο προφανώς θα δουλέψω με Βοηθητικό μοντέλο και θα κάνω Έλεγχο Πολλαπλασιαστή Lagrange (Lagrange Multiplier Test)

Η Βοηθητική μου είναι το 6ο Μοντέλο

$$\hat{v}_t = 0,004 - 0,633X_t + 0,192Z_t + 1,293r_t + \hat{e}_t$$

<u>Βήμα 2ο</u>

$$LM = T\cdot R^2 \overset{H_0}{\sim} X^2_{(m)}$$

$$LM^* = 201\cdot(0,2030811)^2 = 40,82$$

<u>Βήμα 3ο</u>

$C_0 := \{LM^* : LM^* < c\}$ $C_1 := \{LM^* : LM^* \geq c\}$

$P(LM \geq c;\ H_0 \text{ is valid}) = a = 0,01$

$X^2(2)$ $c = 9,21$

Βήμα 4ο

Παρατηρώ ότι: $LM^* = 40{,}82 > c = 9{,}21$

Άρα απορρίπτω την H_0

(ii) Βήμα 1ο $Y_t = \mu + u_t$ Είναι το απλό κανονικό μοντέλο

$H_0: \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$ (vs) $H_1: \beta \neq 0, \gamma \neq 0, \delta \neq 0$

Αφού $\beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$ έχω: $T = 201, m = 3, k = 5$

$Y_t = a + 0 \cdot x_t + 0 \cdot Z_t + 0 \cdot r_t + u_t$

$\Leftrightarrow Y_t = a + u_t$ Άρα θα πάρω το 2ο Μοντέλο

Αφού ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας θα κάνω F-test

URSS = 4.000,943, RRSS = 48.760,1

Βήμα 2ο

$$F = \frac{RRSS - URSS}{URSS} \cdot \left(\frac{T-K}{m}\right) \underset{a = 5\%}{\overset{H_0}{\sim}} F(m, T-K) \quad \begin{pmatrix} m = 3 \\ T = 201 \\ k = 4 \end{pmatrix}$$

$$F^* = \frac{48.760{,}1 - 4.000{,}943}{4.000{,}943} \cdot \left(\frac{201 - 4}{3}\right) = 734{,}62$$

Βήμα 3ο

$C_0 := \{F^* : F^* < c\}$, $C_1 := \{F^* : F^* \geq c\}$

$P(F \geq c; H_0 \text{ is valid}) = a = 0{,}05$

$F(3, 196)$ άρα $c = 2{,}60$

Βήμα 4ο

Άρα $F^* > c$ άρα απορρίπτω την H_0 και δέχομαι την H_1.

(iii) Βήμα 1ο $H_0: B=-1,\ \delta=0$ (vs) $H_1: B\neq -1,\ \delta\neq 0$

Το αρχικό μοντέλο γίνεται: $Y_t = a - X_t + \gamma \cdot Z_t + 0 \cdot r_t + u_t$

$\Leftrightarrow Y_t + X_t = a + \gamma Z_t$ άρα το 1ο Μοντέλο

Αφού δεν ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας θα κάνω έλεγχο λόγου πιθανοφάνειας (Likelihood Ratio Test)

Βήμα 2ο

$$LR = -2(\ln L^R - \ln L^u) \overset{H_0}{\sim} X^2(m) \quad m=2$$

$a=10\%$ $\quad T=201$

$$LR^* = -2(-29.547,98 + 22.000,3120) = 15.095,336 \quad a=0,1$$

Βήμα 3ο

$C_0 := \{LR^* : LR^* < c\}$, $C_1 := \{LR^* : LR^* \geq c\}$

$P(LR \geq c;\ H_0 \text{ is valid}) = a = 0,1$

$X^2(2)$, $c = 4,61$

Βήμα 4ο

άρα $LR^* > c$ άρα απορρίπτω την H_0 και δέχομαι την H_1.