ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΘΕΜΑΤΑ

Άσκηση 1 (Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων)

Απλό κανονικό Μοντέλο

$X_t = \mu + u_t$ και $Var(X_t) = \sigma^2$

$\Leftrightarrow u_t = X_t - \mu \Rightarrow u_t^2 = (X_t - \mu)^2$

άρα $l(\mu) = \sum_{t=1}^{T} u_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \mu)^2$

(FOC)

- $\frac{dl(\mu)}{d\mu} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{t=1}^{T} (X_t - \mu) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} (X_t - \mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} X_t - \sum_{t=1}^{T} \mu = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} \mu = \sum_{t=1}^{T} X_t \Leftrightarrow T\mu = \sum_{t=1}^{T} X_t \Leftrightarrow \boxed{\hat{\mu}_{LS} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} X_t}$

(SOC)

- $\frac{d^2 l(\mu)}{d\mu^2} = \left(-2 \sum_{t=1}^{T} (X_t - \mu)\right)' = \left(-2 \sum_{t=1}^{T} X_t + 2 \sum_{t=1}^{T} \mu\right)'$

$= 0 + \left(2 \sum_{t=1}^{T} \mu\right)' = (2T\mu)' = 2T > 0$ Άρα έχω ελάχιστο

Επομένως ο $\hat{\mu}_{ML}$: είναι ο εκτιμητής που ελαχιστοποιεί την απόσταση του όρου σφάλματος

Άσκηση 2 (Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας)

Απλό Κανονικό Μοντέλο Παλινδρόμησης

$$X_t = \mu + u_t$$

$$Var(X_t) = \sigma^2$$

Συνάρτηση Πιθανοφάνειας: $L(\theta; \underset{\sim}{x})$, όπου $\underset{2\times 1}{\theta} = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$

ή

$$L(\mu, \sigma^2; x)$$

$$L(\mu, \sigma^2; \underset{\sim}{x}) \sim f(x_1, x_2, \dots, x_T; \mu, \sigma^2) \overset{IID}{=}$$

$$= f(x_1; \mu, \sigma^2) \cdot f(x_2; \mu, \sigma^2) \cdot \ldots \cdot f(x_T; \mu, \sigma^2)$$

$$= \prod_{t=1}^{T} f(x_t; \mu, \sigma^2) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_t-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^T \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2}$$

Άρα $L(\mu, \sigma^2; \underset{\sim}{x}) = (2\pi\sigma^2)^{-T/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2}$

$$\ln L = -\frac{T}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2 \cdot \overbrace{\ln e}^{=1}$$

$$= -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{T}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2$$

$$\max_{\mu,\sigma^2} \ln L(\mu,\sigma^2; \underset{\sim}{x}) \qquad \theta = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$$

(FOC)
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} \\[2ex] \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2)\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)$$

Θέτω
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 \iff \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^{T} x_t - \frac{1}{\sigma^2} T\mu = 0$$

$$\iff \frac{T\mu}{\cancel{\sigma^2}} = \frac{1}{\cancel{\sigma^2}}\sum_{t=1}^{T} x_t \iff \boxed{\hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t}$$

- $$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2$$

Θέτω
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0 \iff \frac{T}{\cancel{2\sigma^2}} = \frac{1}{2(\sigma^2)^{\cancel{2}}}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2$$

$$\iff \boxed{\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2}$$

(soc) $$H = \frac{\partial \ln L}{\partial\theta\partial\theta'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu\partial\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma^2\partial\mu} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial(\sigma^2)^2} \end{pmatrix} < 0$$

(4)

Ο Hessian πίνακας είναι συμμετρικός άρα $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu\partial\sigma^2} = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma^2\partial\mu}$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^{T} x_t - \frac{T\mu}{\sigma^2}$$

άρα $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu^2} = -\frac{T}{\sigma^2}$

$\mu = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \Rightarrow \sum_{t=1}^{T} x_t = T\mu$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu\partial\sigma^2} = -\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{T} x_t + \frac{T\mu}{(\sigma^2)^2} = -\frac{T\mu}{(\sigma^2)^2} + \frac{T\mu}{(\sigma^2)^2} = 0$$

άρα $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma^2\partial\mu} = 0$

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$ όπου $x = \sigma^2$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial(\sigma^2)^2} = +\frac{T}{2(\sigma^2)^2} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(\sigma^2)^3}\underbrace{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2}_{= T\sigma^2}$$

$$= \frac{T}{2(\sigma^2)^2} - \frac{T\cancel{\sigma^2}}{(\sigma^2)^{\cancel{3}\,2}} = \frac{T}{2(\sigma^2)^2} - \frac{T}{(\sigma^2)^2} = \frac{T}{2(\sigma^2)^2} - \frac{2T}{2(\sigma^2)^2}$$

$$= -\frac{T}{2(\sigma^2)^2}$$

Άρα ο Hessian γίνεται:

$$H(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = \begin{pmatrix} -\frac{T}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & -\frac{T}{2(\sigma^2)^2} \end{pmatrix}$$

Για να είναι αρνητικά ορισμένος θα πρέπει να ισχύει:
$|H_1| < 0, |H_2| > 0, |H_3| < 0$
$|H_4| > 0 \dots$

$$|H_1| = -\frac{T}{\sigma^2} < 0$$

$$|H_2| = \left(-\frac{T}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{T}{2(\sigma^2)^2}\right) - 0 = \frac{T^2}{2(\sigma^2)^3} > 0$$

άρα έχουμε max

Άσκηση 3 (Κατανομές Εκτιμητών)

Απλό κανονικό Μοντέλο $x_t, t=1,2,\dots,T$
$x_t \sim N(\mu, \sigma^2)$
$x_t = \mu + u_t$, $Var(x_t) = \sigma^2$

(a) $\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t$

$$E(\hat{\mu}) = E\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t\right] = \frac{1}{T} E\left(\sum_{t=1}^{T} x_t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} E(x_t)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mu = \frac{1}{\cancel{T}} \cancel{T} \cdot \mu = \mu$$

$$Var(\hat{\mu}) = Var\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t\right] = \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} Var(x_t) =$$

$$= \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} \sigma^2 = \frac{1}{T^{\cancel{2}}} \cancel{T}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{T}$$

άρα $\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{T}\right)$

(B) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu)^2$ • $\frac{x_t - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Άρα $\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{x_t - \hat{\mu}}{\sigma}\right] \sim X^2(T-1)$ • $\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{x_t - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim X^2(T)$

$$\frac{T}{\sigma^2} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu}) = \frac{T}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2$$

άρα $\frac{T}{\sigma^2} \cdot \hat{\sigma}^2 \sim X^2(T-1)$: είναι το πιο κοντινό αποτέλεσμα ως προς το σ^2

<u>Οπότε:</u> $\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{T}\right)$

$$\frac{T}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 \sim X^2(T-1)$$

Άσκηση 4 (Αμεροληψία – Συνέπεια – Πλήρη Αποτελεσματικότητα)

<u>Αμεροληψία</u>

(α) $E(\hat{\mu}) = E\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t\right) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} E(x_t) =$

$= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mu = \frac{1}{\cancel{T}} \cancel{T}\mu = \mu$ άρα είναι αμερόληπτος

(B) $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ για να είναι ο εκτιμητής σ^2 αμερόληπτος

$\frac{T}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2 \sim X^2(T-1)$ άρα $E\left(\frac{T}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2\right) = T-1$

$\Leftrightarrow \frac{T}{\sigma^2} E(\hat{\sigma}^2) = T-1 \Rightarrow E(\hat{\sigma}^2) = \frac{T-1}{T} \sigma^2 \neq \sigma^2$

άρα ο εκτιμητής δεν είναι αμερόληπτος

Αν είχαμε $s^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu)^2$

άρα $\frac{T-1}{\sigma^2} s^2 \sim X^2(T-1)$: κατανομή του s^2

Για να είναι αμερόληπτος πρέπει $E(s^2) = \sigma^2$

Έχουμε $\frac{T-1}{\sigma^2} s^2 \sim X^2(T-1)$ άρα $E\left(\frac{T-1}{\sigma^2} s^2\right) = T-1$

$\Leftrightarrow \frac{T-1}{\sigma^2} E(s^2) = T-1 \Leftrightarrow E(s^2) = \sigma^2$ άρα αμερόληπτος

Συνέπεια (Ικανές Συνθήκες)

(α) $\lim_{T\to\infty} E(\hat{\mu}) = \mu$ (1), $\lim_{T\to\infty} Var(\hat{\mu}) = 0$ (2)

άρα $\lim_{T\to\infty} \mu = \mu$

και $\lim_{T\to\infty} Var(\hat{\mu}) = \lim_{T\to\infty} \frac{\sigma^2}{T} = 0$

αφού ισχύουν και οι 2 συνθήκες τότε το $\hat{\mu}$ είναι συνεπής εκτιμητής της παραμέτρου μ

(β) $\lim_{T\to\infty} E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ (1), $\lim_{T\to\infty} Var(\hat{\sigma}^2) = 0$ (2)

άρα $E(\hat{\sigma}^2) = \frac{T-1}{T} \sigma^2$

άρα $\lim_{T\to\infty} \left(\frac{T-1}{T}\right)\sigma^2 = \lim_{T\to\infty} \left(1 - \frac{1}{T}\right)\sigma^2 = (1-0)\sigma^2$

$= \sigma^2$

$$Var\left(\frac{T}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2\right) = 2(T-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{T^2}{(\sigma^2)^2} Var(\hat{\sigma}^2) = 2(T-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Var(\hat{\sigma}^2) = 2 \cdot \frac{T-1}{T^2} (\sigma^2)^2$$

Άρα $\lim\limits_{T\to\infty} Var(\hat{\sigma}^2) = \lim\limits_{T\to\infty} 2 \frac{(T-1)}{T^2} (\sigma^2)^2$

$$= \lim_{T\to\infty} 2\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^2}\right)(\sigma^2)^2 = 2(0-0)(\sigma^2)^2 = 0$$

Άρα ο $\hat{\sigma}^2$ είναι συνεπής εκτιμητής

Πλήρης Αποτελεσματικότητα

Ένας αμερόληπτος εκτιμητής είναι πλήρως αποτελεσματικός αν η διακύμανσή του ισούται με το όριο Cramer-Rao.

(a) $CR(\theta) = I_T^{-1}(\theta)$, όπου $\theta := \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$ 2×1

$$I_T(\theta) = E\left\{-\frac{\partial^2 \ln f(\underset{\sim}{x};\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right\} = E\left\{-\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\right\}$$

$$= E\left\{(-1)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu\,\partial\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma^2\,\partial\mu} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial(\sigma^2)^2} \end{pmatrix}\right\}$$ Εσσιανός Πίνακας

$$= E\left\{(-1)\begin{pmatrix} -\frac{T}{\sigma^2}, & -\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu) \\ -\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu), & \frac{T}{2(\sigma^2)^2}-\frac{1}{(\sigma^2)^3}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} E\left(\frac{T}{\sigma^2}\right) & E\left(\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)\right) \\ E\left[\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)\right] & E\left[-\frac{T}{2(\sigma^2)^2}+\frac{1}{(\sigma^2)^3}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2\right] \end{pmatrix}$$

$$E\left(\frac{T}{\sigma^2}\right) = \frac{T}{\sigma^2}, \quad E\left(\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)\right) = \frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{T}E(x_t-\mu)$$

$$= \frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{T}\left[E(x_t)-E(\mu)\right] = \frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{t=1}^{T}\mu-\mu = 0$$

$$E\left[-\frac{T}{2(\sigma^2)^2}+\frac{1}{(\sigma^2)^3}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2\right] = E\left(-\frac{T}{2(\sigma^2)^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(\sigma^2)^3}E\left[\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2\right] = -\frac{T}{2(\sigma^2)^2}+\frac{1}{(\sigma^2)^3}\sum_{t=1}^{T}E(x_t-\mu)^2$$

$$= -\frac{T}{2(\sigma^2)^2}+\frac{1}{(\sigma^2)^3}\sum_{t=1}^{T}\sigma^2 = -\frac{T}{2(\sigma^2)^2}+\frac{1}{(\sigma^2)^3}\cdot T\sigma^2$$

$$= \frac{T}{2(\sigma^2)^2}$$

ἄρα $I_T(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{T}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{T}{2(\sigma^2)^2} \end{pmatrix}$ Πληροφορία κατά Fisher

$\theta := \binom{\mu}{\sigma^2}$

άρα $CR(\theta) = I_T^{-1}(\theta)$

$$I_T^{-1}(\theta) = \frac{1}{\frac{T}{\sigma^2}\cdot\frac{T}{2(\sigma^2)^2} - 0\cdot 0}\begin{pmatrix} \frac{T}{2(\sigma^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{T}{\sigma^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2(\sigma^3)^2}{T^2}\begin{pmatrix} \frac{T}{2(\sigma^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{T}{\sigma^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{T} & 0 \\ 0 & \frac{2(\sigma^2)^2}{T} \end{pmatrix}$$

άρα $CR(\mu) = \frac{\sigma^2}{T}$ και $CR(\sigma^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{T}$

(α) $\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{T}\right)$ άρα $Var(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{T} = CR(\mu) = \frac{\sigma^2}{T}$

Άρα ο $\hat{\mu}$ είναι πλήρως αποτελεσματικός εκτιμητής.

(β) Για τον εκτιμητή σ^2

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \hat{\mu}) \to$ Δεν είναι αμερόληπτος

$s^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \hat{\mu}) \to$ Είναι αμερόληπτος

$$CR(\sigma^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{T}$$

$$\frac{T-1}{\sigma^2}s^2 \sim \chi^2(T-1) \Rightarrow Var\left(\frac{T-1}{\sigma^2}\cdot s^2\right) = 2(T-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(T-1)^2}{(\sigma^2)^2}Var(s^2) = 2(T-1) \Leftrightarrow Var(s^2) = \frac{2\cancel{(T-1)}}{(T-1)^{\cancel{2}}}(\sigma^2)^2$$

$$\Leftrightarrow Var(s^2) = \frac{2(\sigma^2)^2}{T-1} > CR(\sigma^2)$$

Συνεπώς το s^2 <u>Δεν</u> είναι πλήρως αποτελεσματικός εκτιμητής της παραμέτρου σ^2

Άσκηση 5 (Απλό κανονικό Μοντέλο)

$$X_t = \mu + u_t \qquad \{X_t,\ t=1,2,\dots,T\}$$
$$Var(X_t) = 1 \qquad X_t \sim N(\mu, 1)$$

Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας

$L(\theta; \underset{\sim}{X})$, όπου $\theta = (\mu)$ άρα $L(\mu, \underset{\sim}{X})$

$$L(\mu, \underset{\sim}{X}) \sim f(x_1, x_2, \dots, X_T; \mu) \overset{(IID)}{=} f(x_1;\mu) \cdot f(x_2;\mu) \cdot \dots f(x_t;\mu)$$

$$= \prod_{t=1}^{T} f(x_t;\mu) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_t-\mu)^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^T e^{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2}$$

$$= (2\pi)^{-T/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2}$$

άρα $\ln L(\mu; X) = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^2$

FOC $\dfrac{d\ln L}{d\mu} = -\frac{2}{2}(-1)\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu) = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu) = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} X_t - T\mu = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t}$$

SOC $\dfrac{d^2\ln L}{d\mu^2} = -T < 0$ άρα έχω max

Αμεροληψία

$$E(\hat{\mu}) = E\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} E(X_t) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mu = \frac{1}{T}T\mu = \mu$$ άρα είναι αμερόληπτος

Πλήρως Αποτελεσματικότητα

$$I_T(\theta) = E\left\{-\frac{d^2 \ln f(\underset{\sim}{X};\mu)}{d^2\mu}\right\} = E\left\{\frac{-d^2 \ln L(\mu)}{d^2\mu}\right\}$$

$$= E\left[(-1)\frac{d^2 \ln L}{d\mu^2}\right] = (-1)(-T) = T$$

άρα $I_T^{-1}(\mu) = \frac{1}{T}$

$$Var(\hat{\mu}) = Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right) = \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} Var(X_t)$$

$$= \frac{1}{T^{\cancel{2}}}\cancel{T} = \frac{1}{T}$$

άρα $Var(\hat{\mu}) = CR(\mu) = \frac{1}{T}$

Άρα πλήρως αποτελεσματικός

Άσκηση 6 (Μοντέλο Bernoulli)

$$Y_t = \theta + u_t \qquad \{Y_t, t = 1, 2, \dots, T\}$$

$$Var(Y_t) = \theta(1-\theta) \qquad Y_t \sim Be(\theta)$$

Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας

$$L(\theta, \underset{\sim}{y}) = f(\underset{\sim}{y};\theta) \overset{IID}{=\!=} f(y_1;\theta)\cdot f(y_2;\theta)\cdots f(y_T;\theta)$$

$$= \prod_{t=1}^{T} \theta^{y_t}(1-\theta)^{1-y_t} = \theta^{\sum_{t=1}^{T} y_t}(1-\theta)^{\sum_{t=1}^{T}(1-y_t)}$$

άρα $\ln L(\theta; y) = \sum_{t=1}^{T} y_t \ln\theta + \sum_{t=1}^{T}(1-y_t)\ln(1-\theta)$

FOC

$$\frac{d\ln L}{d\theta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{\theta} - \frac{1}{1-\theta}\sum_{t=1}^{T}(1-y_t)$$

Θέτω $\frac{d\ln L}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\theta}\sum_{t=1}^{T} y_t = \frac{1}{1-\theta}\sum_{t=1}^{T}(1-y_t)$

$$\Leftrightarrow (1-\theta)\sum_{t=1}^{T} y_t = \theta\sum_{t=1}^{T}(1-y_t)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} y_t - \theta\sum_{t=1}^{T} y_t = \theta\left(\sum_{t=1}^{T} 1 - \sum_{t=1}^{T} y_t\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} y_t - \cancel{\theta\sum_{t=1}^{T} y_t} = \theta T - \cancel{\theta\sum_{t=1}^{T} y_t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\hat{\theta}_{ML} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t}$$

$$\underline{\underline{\text{SOC}}} \quad \frac{d^2 \ln L}{d\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}\sum_{t=1}^{T} y_t - \frac{1}{(1-\theta)^2}\sum_{t=1}^{T}(1-y_t) < 0$$

άρα έχω max.

$$E(Y_t) = \sum_{y=0}^{1} y_t f(Y_t;\theta) = \sum_{y=0}^{1} Y_t \cdot \left[\theta^{Y_t}(1-\theta)^{1-y_t}\right] =$$

$$= 0\left(\theta^0 (1-\theta)^{1-0}\right) + 1\left(\theta^1 \cdot (1-\theta)^{1-1}\right) = \theta$$

$$Var(Y_t) = \sum_{Y=0}^{1} \left(Y_t - E(Y_t)\right)^2 \cdot f(Y_t;\theta) =$$

$$= (0-\theta)^2 \cdot \left[\theta^0 (1-\theta)^{1-0}\right] + (1-\theta)^2\left[\theta^1 (1-\theta)^{1-}\right]$$

$$= \theta^2(1-\theta) + \theta(1-\theta)^2 = \theta(1-\theta)\left(\cancel{\theta} + 1 - \cancel{\theta}\right) = \theta(1-\theta)$$

<u>Αμεροληψία</u>

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} E(Y_t) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\theta = \frac{1}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T} \cdot \theta = \theta \quad \text{άρα αμερόληπτος}$$

$$Var(\hat{\theta}) = Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t\right) = \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} Var(Y_t) =$$

$$= \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\theta(1-\theta) = \frac{1}{T^{\cancel{2}}}\cancel{T}\left[\theta(1-\theta)\right] = \frac{\theta(1-\theta)}{T}$$

Συνέπεια

$$\lim_{T\to\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{T\to\infty} \theta = \theta$$

$$\lim_{T\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{T\to\infty} \frac{\theta(1-\theta)}{T} = 0$$

Άρα είναι συνεπής

Πλήρως Αποτελεσματικότητα

$$I_T(\theta) = E\left\{ -\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2} \right\} =$$

$$= E\left\{ -\left(-\frac{1}{\theta^2} \sum_{t=1}^{T} Y_t - \frac{1}{(1-\theta)^2} \sum_{t=1}^{T} (1-y_t) \right) \right\}$$

$$= E\left(\frac{1}{\theta^2} \sum_{t=1}^{T} y_t + \frac{1}{(1-\theta)^2} \sum_{t=1}^{T} (1-y_t) \right)$$

$$= \frac{1}{\theta^2} \sum_{t=1}^{T} E(Y_t) + \frac{1}{(1-\theta)^2} \sum_{t=1}^{T} E(1-y_t)$$

$$= \frac{1}{\theta^{\cancel{2}}} T\cancel{\theta} + \frac{1}{(1-\theta)^2} (T - T\theta) =$$

$$= \frac{T}{\theta} + \frac{T\cancel{(1-\theta)}}{(1-\theta)^2} = \frac{T(1-\theta) + T\theta}{\theta(1-\theta)} = \frac{T - \cancel{T\theta} + \cancel{T\theta}}{\theta(1-\theta)}$$

$$= \frac{T}{\theta(1-\theta)}, \text{ Όμως } CR(\theta) = I_t^{-1}(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{T} = Var(\hat{\theta})$$

άρα είναι πλήρως αποτελεσματικός

3ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1

(α) (i) $H_0: b_2 = -0,1$

Κάνουμε Έλεγχο κατά Fisher

$$\tau = \frac{\hat{b}_2 - b_2}{\sqrt{Var(\hat{b}_2)}} \underset{\sigma}{\overset{H_0}{\sim}} St(T-k) \quad , \text{όπου } \begin{array}{l} T=130 \\ k=5 \end{array}$$

$$\tau^* = \frac{0,623+0,1}{0,190} = 3,8052$$

Υπολογίζω το p-value

$$p\text{-value} = P(|t| \geq t^* ; H_0 \text{ is valid})$$

$$= 2P(t \geq t^*; H_0 \text{ is valid}) = 2 \cdot 0,00003 = 0,00006$$

άρα απορρίπτουμε την Ho ή η Ho δεν στηρίζεται

(ii) $H_0 \; b_4 = 0 \quad H_1 : b_4 < 0$

Κάνουμε έλεγχο κατα Neyman-Pearson

$$\tau = \frac{\hat{b}_4 - b_4}{\sqrt{Var(\hat{b}_4)}} \overset{H_0}{\sim} St(T-k)$$

$$\tau^* = \frac{0,222-0}{0,131} = 1,6946$$

$C_0 = \{ \tau^*: \tau^* > c \}$ (17)

$C_1 = \{ \tau^*: \tau^* \leq c \}$

άρα $P(t \leq c;\, H_0 \text{ is valid}) = a = 0,05$

$\Leftrightarrow 1 - P(t \geq c;\, H_0 \text{ is valid}) = 0,05$

$\Leftrightarrow P(t \geq c;\, H_0 \text{ is valid}) = 0,95$

άρα $c = -1,645$

Άρα $t^* > c$ άρα αποδέχομαι την H_0

(iii) $H_0: \sigma^2 = 25$ $H_1: \sigma^2 > 25$

$$\tau = \frac{(T-K)s^2}{\sigma^2} \overset{H_0}{\sim} \chi^2(T-K)$$

$$\tau^* = \frac{(130-5)\cdot(22,74)^2}{25} = 2.585,54$$

$C_0 = \{ \tau^*: \tau^* < c \}$

$C_1 = \{ \tau^*: \tau^* \geq c \}$

άρα $P(t \geq c;\, H_0 \text{ is valid}) = a = 0,05$

άρα $c = 124$

άρα $c \leq \tau^*$ άρα απορρίπτω την H_0

και δέχομαι την H_1

(B) (i) $H_0: b_0 = 0,\ b_2 = 1$ (vs) $H_1: b_0 \neq 0,\ b_2 \neq 1$

Ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας άρα F-test

Αφού $b_0 = 0$ και $b_2 = 1$

Έχω $Y_t = 0 + b_1 X_t + 1 \cdot Z_t + b_3 r_t + b_4 \cdot w_t + \hat{u}_t$

$\Leftrightarrow Y_t - Z_t = b_1 \cdot X_t + b_3 r_t + b_4 \cdot w_t + \hat{u}_t$

Άρα θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο (1)

F-test

$$F = \frac{RRSS - URSS}{URSS} \cdot \frac{T-K}{m} \overset{H_0}{\sim} F(m, T-K) \qquad m = 2,\ T = 130,\ K = 5$$

$$F^* = \frac{53.232{,}45 - 51.196{,}48}{51.196{,}48} \cdot \frac{130-5}{2} = 2{,}4855$$

$C_0 = \{F^* : F^* < c\}$, $C_1 = \{F^* : F^* \geq c\}$

$P(F \geq c;\ H_0 \text{ is valid}) = a = 0{,}05$ $\quad F(2, 125)$

$c = 3{,}07$ άρα $F^* < c$

άρα αποδέχομαι την H_0

(ii) $H_0: b_0 = -0,2$, $b_2 = 0$ (vs) $H_1: b_0 \neq -0,2$, $b_2 \neq 0$ (19)

Δεν ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας άρα Wald-test

Αφού $b_0 = -0,2$ και $b_2 = 0$

Έχω $Y_t = -0,2 + b_1 X_t + 0 \cdot Z_t + b_3 r_t + b_4 w_t + \hat{u}_t$

$\Leftrightarrow Y_t + 0,2 = b_1 X_t + b_3 r_t + b_4 w_t + \hat{u}_t$

Άρα θα πάρουμε το μοντέλο (3)

<u>Wald - Test</u>

$$W = \frac{RRSS - URSS}{URSS}(T-K) \overset{H_0}{\underset{a}{\sim}} X^2(m)$$

$m = 2$, $T = 130$
$K = 5$

$$w^* = \frac{52.932,45 - 51.196,28}{51.196,28}(130-5) = 4,24$$

$C_0 := \{ w^* : w^* < c \}$, $C_1 := \{ w^* : w^* \geq c \}$

$P(w \geq c ; H_0 \text{ is valid}) = a = 0,05$

$c = 5,99$ άρα $w^* < c$

Άρα αποδέχομαι την H_0.

Άσκηση 2

(a) (i) $H_0 : b_4 = 0{,}0$

Κάνουμε Έλεγχο κατά Fisher

$$\tau = \frac{\hat{b}_4 - b_4}{\sqrt{\hat{Var}(\hat{b}_4)}} \overset{H_0}{\underset{a}{\sim}} St\,(T-K) \quad \text{όπου } T = 105,\ K = 5$$

$$\tau^* = \frac{-57{,}271 - 0}{75{,}226} = -0{,}7613$$

Υπολογίζω το p-value

$$\text{p-value} = P(|t| \geq t^* ; H_0 \text{ is valid})$$

$$= 2 \cdot P(t \geq t^* ; H_0 \text{ is valid})$$

$$= 2 \cdot P(t \geq -0{,}7613 ; H_0 \text{ is valid}) = 2 \cdot P(t \leq 0{,}7613 ; H_0 \text{ is valid})$$

$= 2 \cdot (1 - 0{,}78) = 2 \cdot 0{,}22 = 0{,}44$ Άρα η H_0 στηρίζεται ισχυρά

(ii) $H_0 : b_3 = -1$, $H_1 : b_3 > -1$

Κάνουμε Έλεγχο Neyman - Pearson

$$\tau = \frac{\hat{b}_3 - b_3}{\sqrt{Var(\hat{b}_3)}} \overset{H_0}{\underset{a}{\sim}} St\,(T-K)$$

Άρα $$\tau^* = \frac{-0{,}005 + 1}{0{,}014} = 71{,}07$$

$C_0 := \{ \underset{\sim}{X} : \tau^* < c \}, \quad C_1 := \{ \underset{\sim}{X} : \tau^* \geq c \}$

Άρα $P(t \geq c; H_0 \text{ is valid}) = a = 0{,}05$

Άρα $c = 1{,}658$

Άρα $c < \tau^*$ Επομένως απορρίπτουμε την

H_0 και δεχόμαστε την H_1

(iii) $H_0 : \sigma^2 = 9 \quad H_1 : \sigma^2 > 9$

$$\tau = \frac{(T-K)s^2}{\sigma^2} \underset{a}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2(T-K)$$

$$\tau^* = \frac{(105-5)\cdot(7{,}88)^2}{9} = 717{,}5353$$

$C_0 := \{ \underset{\sim}{X} : \tau^* < c \}, \quad C_1 := \{ \underset{\sim}{X} : \tau^* \geq c \}$

Άρα $P(t \geq c; H_0 \text{ is valid}) = a = 0{,}05$

άρα $c = 124$

άρα $c \leq \tau^*$ άρα απορρίπτω την H_0

και δέχομαι την H_1

(B)(i) $H_0: b_3=0,\ b_4=0$ (vs) $H_1: b_3 \neq 0,\ b_4 \neq 0$

Αφού ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας έχω f-test

Αφού $b_3=0$ και $b_4=0$

Έχω $Y_t = B_0 + B_1 \cdot X_t + B_2 \cdot Z_t + 0 \cdot P_t + 0 \cdot r_t + \hat{u}_t$

$\Leftrightarrow Y_t = B_0 + B_1 X_t + B_2 \cdot Z_t$

Άρα θα χρησιμοποιήσουμε το 1ο Μοντέλο

F-test

$$F = \frac{RRSS - URSS}{URSS} \cdot \frac{T-K}{m} \overset{H_0}{\sim} F(m, T-K) \qquad m=2,\ T=105,\ K=5$$

$$F^* = \frac{12.404,96 - 1237,09}{1237,09} \cdot \frac{(105-5)}{2} = 451,3766$$

$$C_0 := \{F^* : F^* < c\},\quad C_1 := \{F^* : F^* \geq c\}$$

$$P(F \geq c;\ H_0 \text{ is valid}) = a = 0,05$$

$F(2,100)$

$c = 3,09$ άρα $F^* > c$

άρα απορρίπτουμε την H_0 και δεχόμαστε την H_1

(ii) $H_0: b_0 = 0,\ b_3 = -2$ (vs) $H_1: b_0 \neq 0,\ b_3 \neq -2$

Ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας άρα F-test

Αφού $b_0 = 0$ και $b_3 = -2$

Έχω $Y_t = 0 + b_1 \cdot X_t + b_2 \cdot Z_t - 2 \cdot P_t + b_4 \cdot r_t + \hat{u}_t$

ή $Y_t + 2P_t = b_1 \cdot X_t + b_2 Z_t + b_4 \cdot r_t + \hat{u}_t$

Άρα το 2º μοντέλο

$$F = \frac{RRSS - URSS}{URSS} \cdot \frac{T-K}{m} \overset{H_0}{\sim} F(m, T-K) \qquad \begin{matrix} m = 2 \\ T = 105 \\ K = 5 \end{matrix}$$

$$F^* = \frac{12.357{,}09 - 1.237{,}09}{1.237{,}09} \cdot \frac{105-5}{2}$$

$$= 449{,}44$$

$$C_0 := \{F^* : F^* < c\},\quad C_1 := \{F^* : F^* \geq c\}$$

$$P(F \geq c;\ H_0 \text{ is valid}) = a = 0{,}05$$

$F(2, 100)$

$c = 3{,}09$ άρα $F^* > c$

Άρα απορρίπτουμε την H_0 και δεχόμαστε την H_1

(iii) $H_0: b_3 = 0, b_2 = 1$ (vs) $H_1: b_3 \neq 0, b_2 \neq 1$

Δεν ισχύει η υπόθεση της κανονικότητας άρα Wald-test

Έχω $b_3 = 0$ και $b_2 = 1$

$$Y_t = b_0 + b_1 X_t + 1 \cdot Z_t + 0 \cdot P_t + b_4 \cdot r_t + \hat{u}_t$$

$$\Leftrightarrow Y_t - Z_t = b_0 + b_1 \cdot X_t + b_4 r_t + \hat{u}_t$$

Άρα δεν υπάρχει μοντέλο

(iv) $H_0: b_0 = 0, b_1 = 1$ (vs) $H_1: b_0 \neq 0, b_1 \neq 1$

Κάνω Wald-test

άρα $Y_t = 0 + 1 \cdot X_t + b_2 \cdot Z_t + b_3 \cdot P_t + b_4 \cdot r_t + \hat{u}_t$

$$\Leftrightarrow Y_t - X_t = b_2 \cdot Z_t + b_3 \cdot P_t + b_4 \cdot r_t + \hat{u}_t$$

Άρα το 3ο Μοντέλο

$$W = \frac{RRSS - URSS}{URSS}(T-K) \overset{H_0}{\underset{a}{\sim}} \chi^2(m) \qquad m=2,\ T=105,\ K=5$$

$$W^* = \frac{12.367,19 - 1237,09}{1.237,09} \cdot (105-5) = 899,7$$

$$C_0 := \{W^* : W^* < c\}, \quad C_1 := \{W^* : W^* \geq c\}$$

$$P(W \geq c;\ H_0 \text{ is valid}) = a = 0,05$$

$c = 5,99$ άρα $W^* > c$

Άρα απορρίπτω την H_0 και δέχομαι την H_1