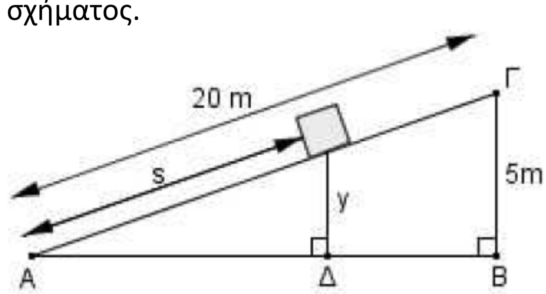
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9^{Ο} – ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Άσκηση 1 (2_18997)

Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί προς τα πάνω στη ράμπα του παρακάτω σχήματος.



(α) Να αποδείξετε ότι για το ύψος y, που απέχει το κουτί από το έδαφος κάθε χρονική στιγμή, ισχύει ότι: $y=\frac{s}{4}$, όπου s το μήκος που έχει διανύσει το κουτί πάνω στη ράμπα.

(β) Όταν το κουτί απέχει από το έδαφος 2m, να βρείτε:

(i) Το μήκος s που έχει διανύσει το κουτί στη ράμπα.

(ii) Την απόσταση του σημείου Δ από την άκρη της ράμπας Α.

Άσκηση 2 (2_19001)

Τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι α=8, β=6 και γ=5.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

(β) Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς ΑΒ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ.

Άσκηση 3 (2_19005)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$ τέμνει την πλευρά ΒΓ σε σημείο Δ, τέτοιο ώστε: $\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma}}=\frac{3}{4}$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AB}=\frac{3}{4}\mathrm{A\Gamma}$.

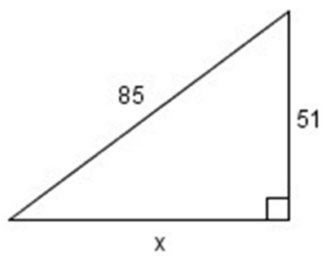
(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι: $\mathrm{B\Gamma}=\frac{5}{4}\mathrm{A\Gamma}$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 4 (2_19008)

(α) Ποιες από τις παρακάτω τριάδες θετικών αριθμών μπορούν να θεωρηθούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(i) 3, 4, 5, (ii) 3λ, 4λ, 5λ με $\lambda>0$, (iii) 4, 5, 6.

(β) Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να αποδείξετε ότι, το μήκος x είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4.



Άσκηση 5 (2_19041)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{A}=90^o\right)$ με ύψος ΑΔ και ΑΓ=8, $\Delta\Gamma=\frac{32}{5}$.

Να υπολογίσετε τα μήκη των παρακάτω τμημάτων:
(α) ΒΓ, (ii) ΑΒ, (γ) ΑΔ.

Άσκηση 6 (2_19042)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α=7, β=4 και $\mu_\beta=\sqrt{33}$.

(α) Να αποδείξετε ότι: γ=5.
(β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του.

Άσκηση 7 (2_19045)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=6, ΒΓ=9 και $\widehat{B}=60^o$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $A\Gamma=3\sqrt{7}$.
(β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του.
(γ) Να υπολογίσετε την προβολή της ΑΒ πάνω στη ΒΓ.

<u>ΘΕΜΑ 4^{ο}</u>

<u>Άσκηση 1 (4_18985)</u>

Σε κύκλο κέντρο Ο θεωρούμε δύο χορδές του ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε ένα σημείο Μ.

(α) Αν το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

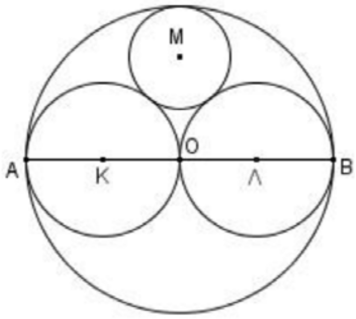
(i) Όταν η χορδή ΑΒ είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, τότε: $\mathrm{AM}\cdot\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}^2$,

(ii) Όταν η χορδή ΑΒ δεν είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, ισχύει η σχέση: $\mathrm{AM}\cdot\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(β) Αν για τις χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε σημείο Μ ισχύει ότι: $\mathrm{AM}\cdot\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ.

<u>Άσκηση 2 (4_19006)</u>

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μια διάμετρος του ΑΒ. Με διαμέτρους τα τμήματα ΟΑ και ΟΒ γράφουμε τους κύκλους κέντρων Κ και Λ αντίστοιχα. Ένας τέταρτος κύκλος κέντρου Μ και ακτίνας ρ εφάπτεται εξωτερικά των κύκλων κέντρων Κ και Λ και εσωτερικά του κύκλου κέντρου Ο.

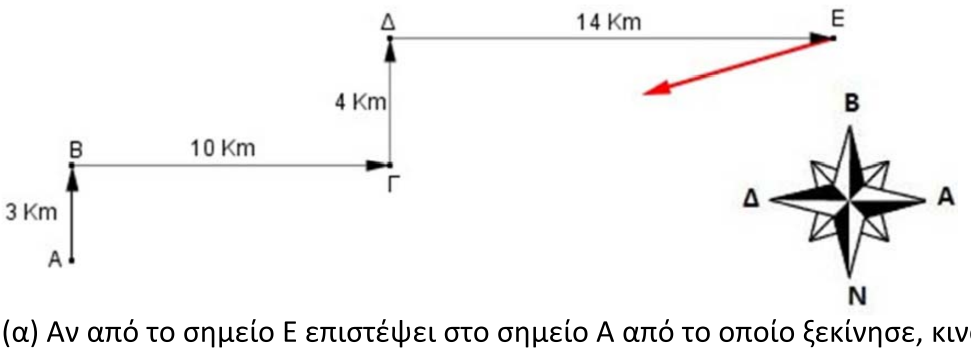


(α) Να εκφράσετε τις διακέντρους ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των αντίστοιχων κύκλων ως συνάρτηση των ακτίνων τους, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\rho=\dfrac{R}{3}$.

<u>Άσκηση 3 (4_19009)</u>

Ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε.



(α) Αν από το σημείο Ε επιστέψει στο σημείο Α από το οποίο ξεκίνησε, κινούμενο ευθύγραμμα, να βρείτε την απόσταση ΑΕ που θα διανύσει.

(β) Τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

<u>Άσκηση 4 (4_19025)</u>

Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι διαγώνιοι του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Μ, το οποίο είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\Delta B^2 = 4MA \cdot M\Gamma$, (β) $AB^2 + A\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma$,

(γ) $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + A\Delta^2 = 2A\Gamma^2$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο: ΛΥΣΕΙΣ – 2ο ΘΕΜΑ

Άσκηση 1 (2_18997)

(α) Τα τρίγωνα $A\hat{E}\Delta$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι όμοια διότι:
(i) η $\hat{A}$ κοινή (ii) $\hat{\Delta} = \hat{B} = 90^\circ$

$$\frac{E\Delta}{B\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} \Leftrightarrow \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{E\Delta}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{S}{20} = \frac{y}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5S = 20y \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}S}$$

(β) (i) Αν $y = 2$. Άρα $2 = \frac{1}{4}S \Leftrightarrow \boxed{S = 8 \text{ μ}}$

(ii) Από το Π.Θ στο $A\hat{E}\Delta$ έχουμε

$$A\Delta^2 = AE^2 - E\Delta^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 64 - 4 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 60$$

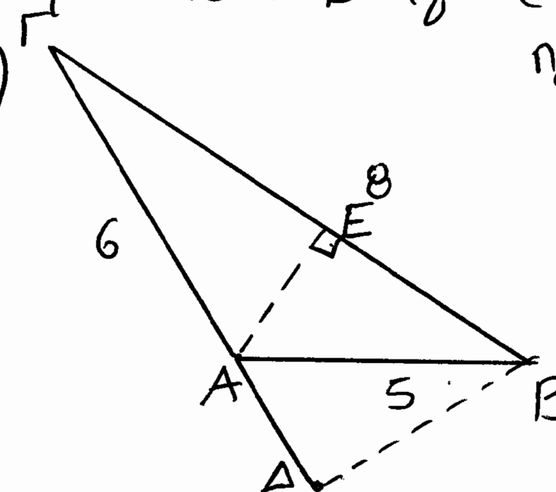
$$\Leftrightarrow \boxed{A\Delta = 2\sqrt{15} \text{ μ}}$$

Άσκηση 2 (2_19001)

(α) $a^2 = 8^2 = 64$, $\beta^2 + \gamma^2 = 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$

Άρα $a^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$ άρα αμβλυγώνιο.

(β)



Προβολή AB πάνω στην ΑΓ

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2 \cdot A\Gamma \cdot A\Delta$$

$$\Leftrightarrow 64 = 25 + 36 + 2 \cdot 6 \cdot A\Delta$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot A\Delta = 3 \Leftrightarrow \boxed{A\Delta = \frac{1}{4}}$$

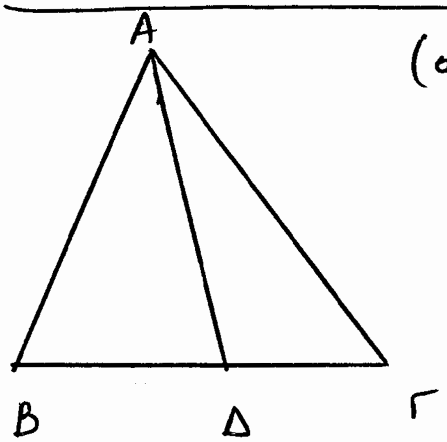
Η προβολή της ΑΒ πάνω στην ΒΓ

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot BE$$

$$\Leftrightarrow 36 = 25 + 64 - 2\cdot 8 \cdot BE$$

$$\Leftrightarrow 16\cdot BE = 53 \Leftrightarrow \boxed{BE = \frac{53}{16}}$$

Άσκηση 3 (2_19005)



(α) Από το Θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου έχουμε:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \boxed{AB = \frac{3}{4}A\Gamma}$$

(β) Επειδή $AB = \frac{3}{4}A\Gamma$ άρα $AB < A\Gamma$

και αφού $B\Gamma = \frac{5}{4}A\Gamma$ άρα $B\Gamma > A\Gamma$. Επομένως $AB < A\Gamma < B\Gamma$

Έτσι $B\Gamma^2 = \left(\frac{5}{4}A\Gamma\right)^2 = \frac{25}{16}A\Gamma^2$

$$AB^2 + A\Gamma^2 = \left(\frac{3}{4}A\Gamma\right)^2 + A\Gamma^2 = \frac{9}{16}A\Gamma^2 + A\Gamma^2 = \frac{25}{16}A\Gamma^2$$

Άρα ισχύει το αντίστροφο του Π.Θ αφού $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

Άσκηση 4 (2_19008)

(α) (i) $5^2 = 25$, $3^2 + 4^2 = 25$ είναι ορθογώνιο αφού ισχύει το αντίστροφο

(ii) $(5\lambda)^2 = 25\lambda^2$, $(3\lambda)^2 + (4\lambda)^2 = 25\lambda^2$ είναι ορθογώνιο

(iii) $6^2 = 36$, $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$ άρα δεν είναι ορθογώνιο.

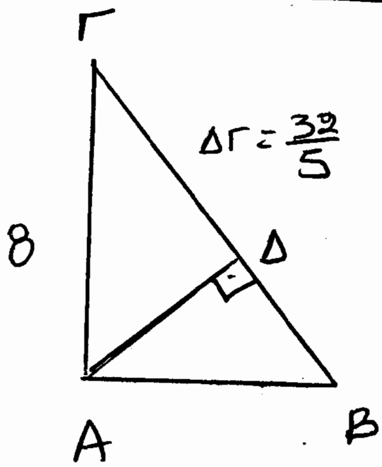
(β) Από το ΠΘ έχουμε: $85^2 = 51^2 + x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 85^2 - 51^2 \Leftrightarrow x^2 = (85-51)(85+51)$

$\Leftrightarrow x^2 = 34 \cdot 136 = 2 \cdot 17 \cdot 8 \cdot 17 = 16 \cdot 17^2$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 4 \cdot 17}$. Άρα το x είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4.

Άσκηση 5 (2_19041)



(α) Έχουμε $AΓ^2 = BΓ \cdot ΓΔ$

$\Leftrightarrow 64 = BΓ \cdot \frac{32}{5} \Leftrightarrow \boxed{BΓ = 10}$

(β) $AB^2 = BΓ^2 - AΓ^2 \Leftrightarrow AB^2 = 100 - 64$

$\Leftrightarrow \boxed{AB = 6}$

(γ) $ΔB = BΓ - ΔΓ = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5}$

άρα $AΔ^2 = ΔΓ \cdot ΔB \Leftrightarrow AΔ^2 = \frac{32}{5} \cdot \frac{18}{5} \Leftrightarrow AΔ^2 = \frac{2 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 9}{25}$

$\Leftrightarrow AΔ = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3}{5} \Leftrightarrow \boxed{AΔ = \frac{24}{5}}$

Άσκηση 6 (2_19042)

(α) $μ_B^2 = \frac{2a^2 + 2γ^2 - β^2}{4} \Leftrightarrow 33 = \frac{2 \cdot 49 + 2 \cdot γ^2 - 16}{4}$

$\Leftrightarrow 49 + γ^2 - 4 = 66 \Leftrightarrow γ^2 = 25 \Leftrightarrow \boxed{γ = 5}$

(β) $a^2 = 49$, $β^2 + γ^2 = 16 + 25 = 41$

άρα $a^2 > β^2 + γ^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90°$ άρα αμβλυγώνιο

Άσκηση 7 (2_19045)

(α) Από το νόμο συνημιτόνων έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB \cdot B\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B}$$

$$\Leftrightarrow A\Gamma^2 = 36 + 81 - \cancel{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

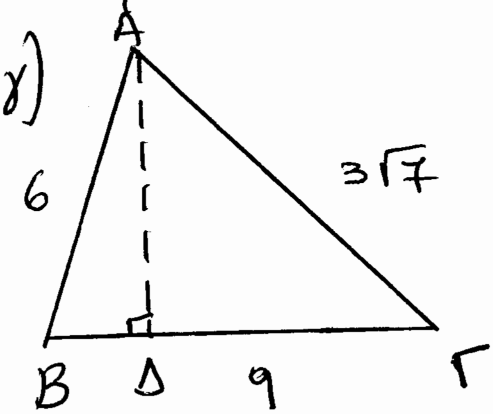
$$\Leftrightarrow A\Gamma^2 = 63 \Leftrightarrow \boxed{A\Gamma = 3\sqrt{7}}$$

(β) $AB^2 = 36$, $B\Gamma^2 = 81$, $A\Gamma^2 = 63$

$B\Gamma^2 = 81$, $AB^2 + A\Gamma^2 = 36 + 63 = 99$

Άρα $B\Gamma^2 < AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$ άρα οξυγώνιο

(γ)



$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot B\Delta$$

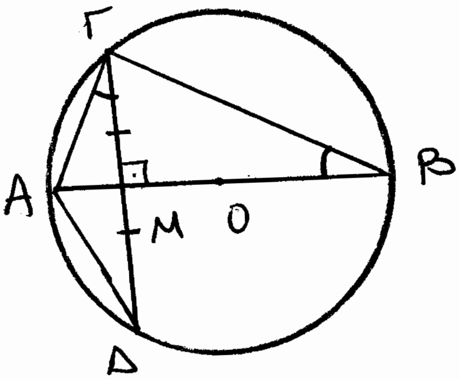
$$\Leftrightarrow 63 = 36 + 81 - 18 \cdot B\Delta$$

$$\Leftrightarrow 18 \cdot B\Delta = 54 \Leftrightarrow \boxed{B\Delta = 3}$$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο
ΛΥΣΕΙΣ – 4ο ΘΕΜΑ

Άσκηση 1 (4_18985)

(α) (i) Αν $ΑΒ \perp ΓΔ$ ν.δ.ο $ΑΜ \cdot ΑΒ = ΑΓ^2$



Από το θεώρημα τεμνουσών για τις ΑΒ, ΓΔ έχουμε:

$$ΜΑ \cdot ΜΒ = ΜΓ \cdot ΜΔ \quad (1)$$

Έχουμε $\overset{\frown}{ΑΓ} = \overset{\frown}{ΑΔ}$ άρα $ΑΓ = ΑΔ$

Επομένως το $\overset{\triangle}{ΑΓΔ}$ είναι ισοσκελές, άρα το ΑΜ είναι ύψος και διάμεσος με $ΜΓ = ΜΔ$ (2).

Άρα η (1) γίνεται: $ΜΑ \cdot (ΑΒ - ΜΑ) \overset{(2)}{=} ΜΓ^2$

$$\Leftrightarrow ΑΜ \cdot ΑΒ - ΜΑ^2 = ΜΓ^2 \Leftrightarrow ΑΜ \cdot ΑΒ = ΜΑ^2 + ΜΓ^2$$

Από το Π.Θ στο $\overset{\triangle}{ΑΓΜ}$ έχουμε: $ΜΑ^2 + ΜΓ^2 = ΑΓ^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{ΑΜ \cdot ΑΒ = ΑΓ^2}$$

(ii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΓΜ}$ και $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι όμοια, διότι:

- Η $\hat{Α}$ είναι κοινή
- Η $Α\hat{Γ}Μ = \hat{Β}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα ($\overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΑΓ}$ αντίστοιχα)

$$\frac{ΑΜ}{ΑΓ} = \frac{ΓΜ}{ΒΓ} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} \Leftrightarrow \frac{ΑΜ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} \Leftrightarrow \boxed{ΑΜ \cdot ΑΒ = ΑΓ^2}$$

Τα τρίγωνα $A\hat{\Gamma}M$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι όμοια διότι

- η $\hat{A}$ είναι κοινή
- Οι πλευρές ΑΓ, ΑΜ και ΑΓ, ΑΒ είναι ανάλογες αφού ισχύει: $\dfrac{AM}{A\Gamma} = \dfrac{A\Gamma}{AB}$ (πλευρές ανάλογες και η περιεχόμενη γωνία τους)

Οπότε $A\hat{\Gamma}M = \hat{B} \Rightarrow \overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{A\Delta}$ (ως εγγεγραμμένες γωνίες)

Άρα το Α μέσο του ΓΔ.

Άσκηση 2 (4_19006)

(α) $OK = O\Lambda = \dfrac{R}{2}$ άρα $\boxed{KM = \dfrac{R}{2} + \rho}$

$\boxed{\Lambda M = \dfrac{R}{2} + \rho}$, $\boxed{OM = R - \rho}$

(β) Από το Π.Θ στο $M\hat{O}K$ έχουμε:

$$KM^2 = OK^2 + OM^2 \Leftrightarrow \left(\frac{R}{2} + \rho\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R-\rho)^2$$

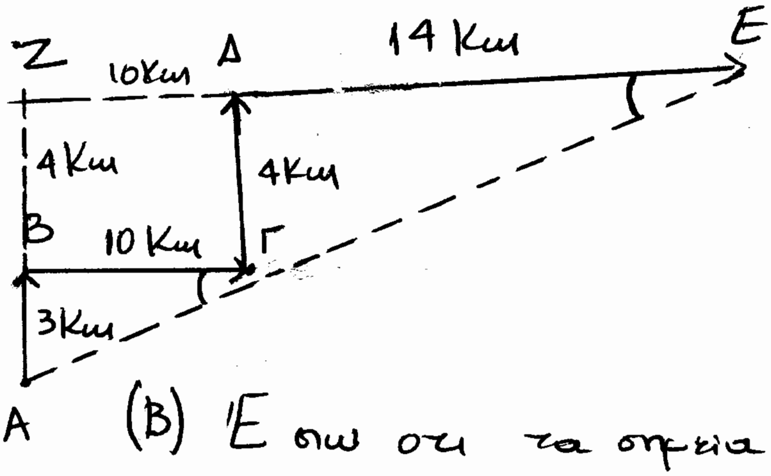
$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{R^2}{4}} + R\cdot\rho + \cancel{\rho^2} = \cancel{\frac{R^2}{4}} + R^2 - 2R\rho + \cancel{\rho^2}$$

$$\Leftrightarrow 3R\rho = R^2 \Leftrightarrow \boxed{\rho = \frac{R}{3}}$$

Άσκηση 3 (4_19009)

(α) Από το Π.Θ. στο $A\hat{Z}E$

$AE^2 = AZ^2 + ZE^2$



$\Leftrightarrow AE^2 = 7^2 + 24^2$

$\Leftrightarrow AE^2 = 49 + 576$

$\Leftrightarrow AE^2 = 625$

$\Leftrightarrow \boxed{AE = 25 \text{ Km}}$

(β) Έστω ότι τα σημεία A, Γ, E είναι συνευθειακά

άρα $\Delta\hat{E}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των $B\Gamma // \Delta E$ και AE τέμνουσα.

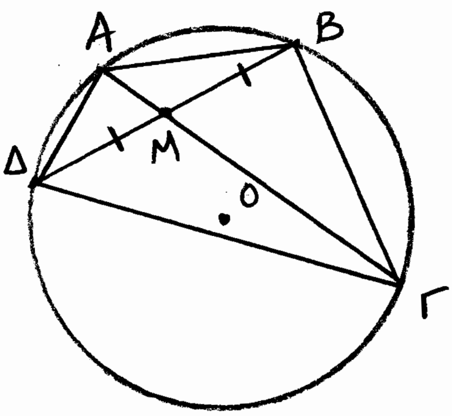
Τα τρίγωνα $\Delta\hat{E}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}A$ είναι όμοια διότι:

(i) $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90°$, (ii) $\Delta\hat{E}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{10}{14}$$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{5}{7}$ άτοπο, άρα τα σημεία δεν είναι συνευθειακά.

Άσκηση 4 (4_19025)



(α) Ν.δ.ο: $\Delta B^2 = 4 MA \cdot M\Gamma$

Απο το Θ. τεμνουσών έχουμε:

$$MA \cdot M\Gamma = M\Delta \cdot MB$$

$$\Leftrightarrow \frac{B\Delta}{2} \cdot \frac{B\Delta}{2} = MA \cdot M\Gamma$$

$$\Leftrightarrow \Delta B^2 = 4 \cdot MA \cdot M\Gamma$$

(β) Από το 1ο Θ. Διαμέσων στο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ έχουμε:

$$AB^2 + A\Delta^2 = 2AM^2 + \frac{B\Delta^2}{2} \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} AB^2 + A\Delta^2 = 2AM^2 + \frac{4MA \cdot M\Gamma}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + A\Delta^2 = 2AM(AM + M\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + A\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma \quad (1)$$

(γ) Απο το Θεωρ. διαμέσων στο $\overset{\triangle}{B\Gamma\Delta}$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 2\Gamma M^2 + \frac{B\Delta^2}{2} \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 2\Gamma M^2 + \frac{4MA \cdot M\Gamma}{2}$$

$$\Leftrightarrow B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 2\Gamma M^2 + 2MA \cdot M\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 2M\Gamma(M\Gamma + MA)$$

$$\Leftrightarrow B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 2M\Gamma \cdot A\Gamma \quad (2)$$

$$(1) + (2) \quad AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + A\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma + 2M\Gamma \cdot A\Gamma$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + A\Delta^2 = 2A\Gamma(AM + M\Gamma)$$

$$= 2A\Gamma \cdot A\Gamma$$

$$= 2A\Gamma^2$$