ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8$^{\text{Ο}}$ - ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ
ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

Άσκηση 1 (2_18984)

Θεωρούμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ.

(α) Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(i) $\mathrm{AB}=8$, $\mathrm{A\Gamma}=12$, $\widehat{\mathrm{A}}=35^{o}$, $\Delta\mathrm{E}=20$, $\Delta\mathrm{Z}=30$, $\widehat{\Delta}=35^{o}$,

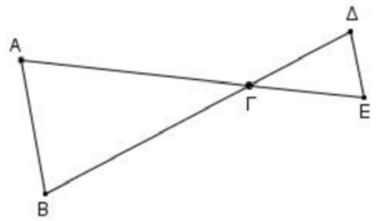
(ii) $\widehat{\mathrm{A}}=47^{o}$, $\widehat{\mathrm{B}}=38^{o}$, $\widehat{\mathrm{E}}=47^{o}$, $\widehat{\Delta}=95^{o}$,

(iii) $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$, $\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\Delta}$, $\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{Z}$.

(β) Στις περιπτώσεις που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΔΕΖ, να γράψετε τους ίσους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

Άσκηση 2 (2_18990)

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ.



Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $\mathrm{AB}//\Delta\mathrm{E}$,

(β) $\mathrm{B\Gamma}=2\Delta\Gamma$ και $\mathrm{E\Gamma}=\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}$.

Άσκηση 3 (2_18993)

(α) Να εξετάσετε αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $\mathrm{A\Gamma}=4$, $\mathrm{B\Gamma}=16$, $\mathrm{BA}=18$, $\Delta\mathrm{Z}=10$, $\mathrm{EZ}=40$, $\Delta\mathrm{E}=48$.

(ii) $\widehat{\mathrm{A}}=63^{o}$, $\widehat{\Gamma}=83^{o}$, $\widehat{\Delta}=63^{o}$, $\widehat{\mathrm{E}}=34^{o}$.

(β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=6, ΑΓ=7 και ΒΓ=8. Ποιο θα είναι το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου ΔΕΖ το οποίο είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, με λόγο ομοιότητας 3;

Άσκηση 4 (2_19011)

Από ένα σημείο Σ που βρίσκεται έξω από έναν δοσμένο κύκλο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΒ και μια τέμνουσα ΣΓΔ.

Να αποδείξετε ότι: (α)

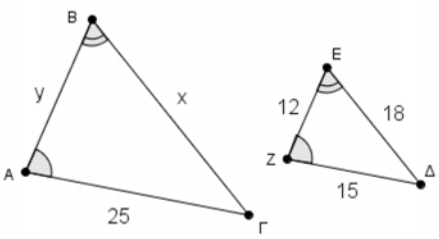
(i) Τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ είναι όμοια.

(ii) Τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ είναι όμοια.

(β) $\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Delta}=\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{B\Gamma}$.

Άσκηση 5 (2_19014)

Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν: $\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\mathrm{Z}}$, $\widehat{\mathrm{B}}=\widehat{\mathrm{E}}$ και ΑΓ=25, ΕΖ=12, ΕΔ=18 και ΖΔ=15.



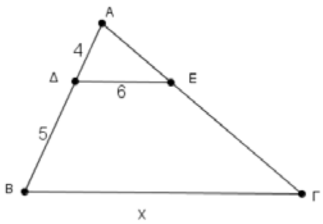
(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια,

(β) Να συμπληρώσετε την ισότητα των λόγων με τις κατάλληλες πλευρές του τριγώνου ΔΕΖ: $\frac{\text{ΒΑ}}{.....} = \frac{\text{ΑΓ}}{.....} = \frac{\text{ΓΒ}}{.....}$

(γ) Να υπολογίσετε τα x και y.

Άσκηση 6 (2_19015)

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και επιπλέον ισχύουν: ΑΔ=4, ΔΒ=5 και ΔΕ=6.



(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια,

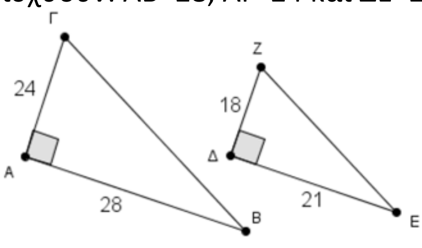
(β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα:

$\frac{\text{ΑΒ}}{.....} = \frac{.....}{\text{ΔΕ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{.....}$

(γ) Ένας μαθητής χρησιμοποιεί την αναλογία: $\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$ για να υπολογίσει το x. Να εξηγήσετε γιατί αυτή η αναλογία είναι λάθος, να γράψετε τη σωστή και να υπολογίσετε την τιμή του x.

Άσκηση 7 (2_19017)

Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια με ορθές τις γωνίες Α και Δ αντίστοιχα. Επιπλέον, για τις πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ αντίστοιχα ισχύουν: ΑΒ=28, ΑΓ=24 και ΔΕ=21, ΔΖ=18.



(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια,

(β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να συμπληρώσετε τα κενά:

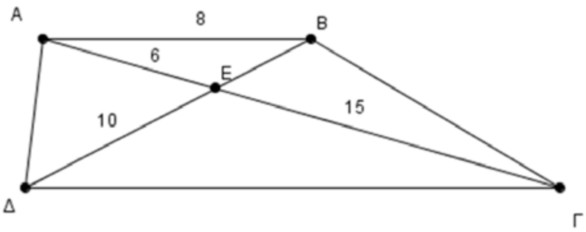
$\frac{\text{ΑΒ}}{.....} = \frac{.....}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{.....}$

(γ) Από τις παρακάτω ισότητες να επιλέξετε τη σωστή:

(i) $\text{ΖΕ} = \frac{18}{21}\text{ΓΒ}$, (ii) $\text{ΖΕ} = \frac{24}{28}\text{ΓΒ}$, (iii) $\text{ΖΕ} = \frac{3}{4}\text{ΓΒ}$, (iv) $\text{ΖΕ} = \frac{4}{3}\text{ΓΒ}$.

Άσκηση 8 (2_19019)

Στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν ΑΒ//ΔΓ, ΑΕ=6, ΑΒ=8, ΓΕ=15 και ΔΕ=10.

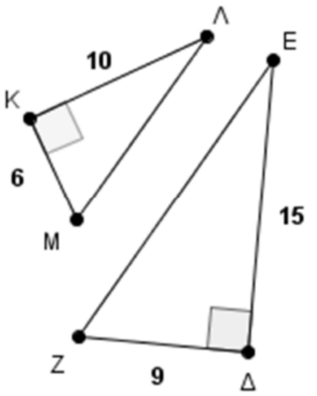


(α) Να βρείτε δύο ζεύγη ίσων γωνιών των τριγώνων ΑΕΒ και ΔΕΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια και να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών τους.
(γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΕ και ΔΓ.

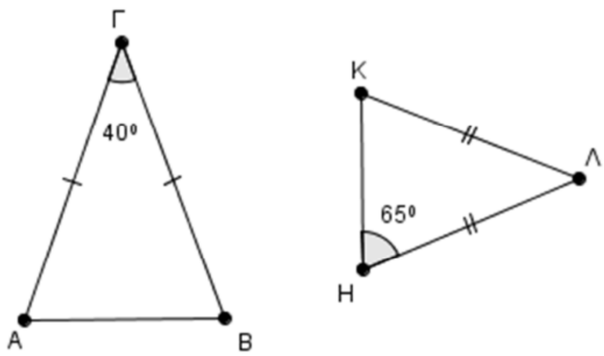
<u>Άσκηση 9 (2_19021)</u>

Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες που σας δίνονται για το κάθε ζεύγος τριγώνων των παρακάτω σχημάτων, προκειμένου να απαντήσετε στα ακόλουθα:
(α) Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και πιο δεν είναι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(β) Για το ζεύγος των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος,
(i) Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών.
(ii) Να βρείτε το λόγο ομοιότητας τους.

$1^{ο}$ ζεύγος: Τρίγωνα ΚΛΜ και ΖΔΕ

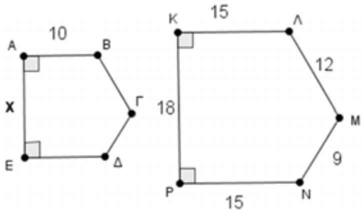


$2^{ο}$ ζεύγος: Τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΚΛ



<u>Άσκηση 10 (2_19023)</u>

Στο παρακάτω σχήμα, τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΚΛΜΝΡ είναι όμοια και έχουν: $\widehat{\Delta}=\widehat{N}$ και $\widehat{B}=\widehat{\Lambda}$.
(α) Να προσδιορίσετε το λόγο ομοιότητας τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(β) Να υπολογίσετε το μήκος x της πλευράς ΑΕ.
(γ) Να βρείτε την περίμετρο του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.



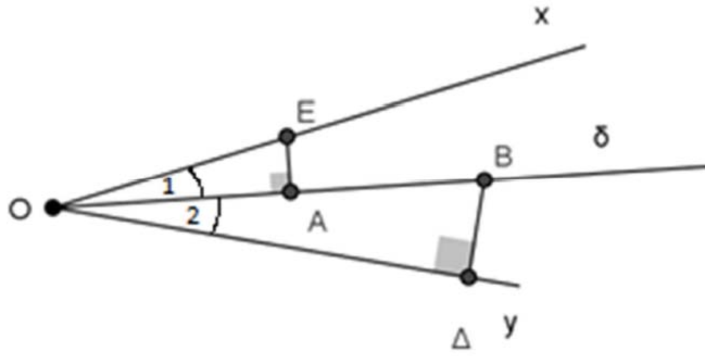
<u>Άσκηση 11 (2_19030)</u>

Στη διχοτόμο Οδ της γωνίας $\widehat{xOy}$ θεωρούμε τα σημεία Α, Β τέτοια ώστε ΟΒ=2ΟΑ. Η κάθετος στην Οδ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά Οx στο σημείο Ε και έστω Δ η προβολή του Β στην Οy.

Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΔΒ είναι όμοια.

(β) $2\mathrm{OA}^2 = \mathrm{O\Delta} \cdot \mathrm{OE}$.

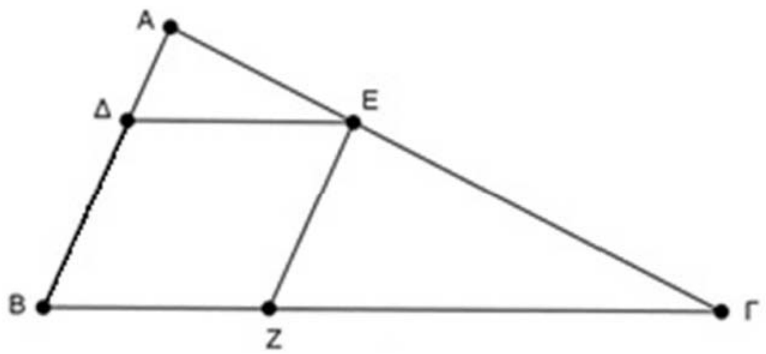


Άσκηση 12 (2_19035)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε τρων πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ώστε: $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{1}{3}$. Από το σημείο Ε φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ, η οποία τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια,

(β) $3\mathrm{BZ} = \mathrm{B\Gamma}$.



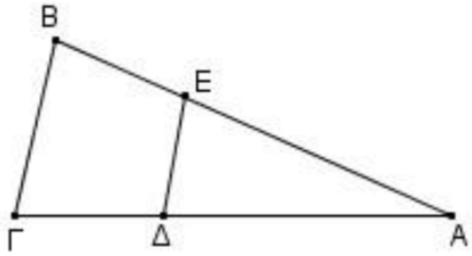
ΘΕΜΑ 4^{o}

Άσκηση 1 (4_18976)

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ.
(α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και σκαληνό, τότε:
(i) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι όμοια.
(ii) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ δεν μπορεί να είναι όμοια.
(β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές με κορυφή το Γ, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 2 (4_19016)

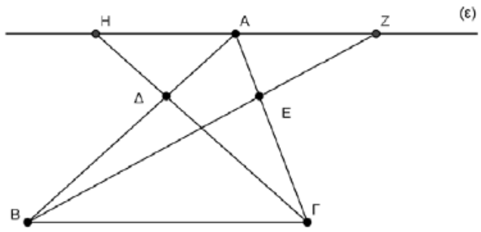
Στο παρακάτω σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύουν: $\mathrm{AE}=\frac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{A\Delta}=\frac{2}{3}\mathrm{AB}$.



(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta=\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$, (β) Να εξετάσετε αν ισχύει: $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{B\Gamma}}$,
(γ) Να εξετάσετε αν το τμήμα ΒΓ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔΕ.

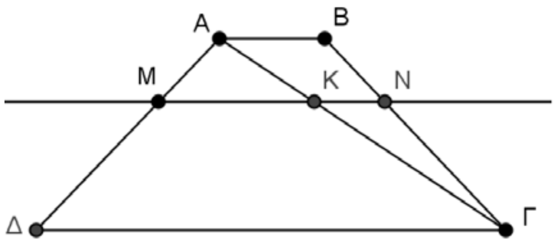
Άσκηση 3 (4_19027)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε: $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{3}$. Από το σημείο Α φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η ευθεία (ε) τέμνει τις προεκτάσεις των ΒΕ και ΓΔ στα σημεία Ζ,Η αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
(α) ΔΕ//ΓΒ, (β) $\mathrm{ZE}=\frac{1}{2}\mathrm{EB}$, (γ) $\mathrm{AZ}=\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}$.



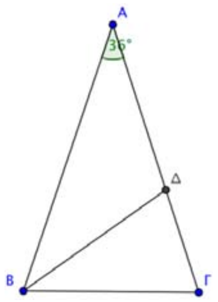
Άσκηση 4 (4_19029)

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και σημείο Μ της πλευράς του ΑΔ ώστε: $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{3}$.
Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου, η οποία τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα σημεία Κ και Ν αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
(α) $\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{3}$, (β) $\frac{\mathrm{KN}}{\mathrm{AB}}=\frac{2}{3}$, (γ) $\mathrm{MN}=\frac{1}{3}\Gamma\Delta+\frac{2}{3}\mathrm{AB}$,



Άσκηση 5 (4_19039)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ, $\widehat{A}=36^o$ και η διχοτόμος του ΒΔ.
(α) Να αποδείξετε ότι: (i) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια, (ii) $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$,
(γ) Αν ΑΓ=1, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΔ.



ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο
ΛΥΣΕΙΣ - 2ο ΘΕΜΑ

Άσκηση 1 (2_18984)

(α)(i) $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$, $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ άρα $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$

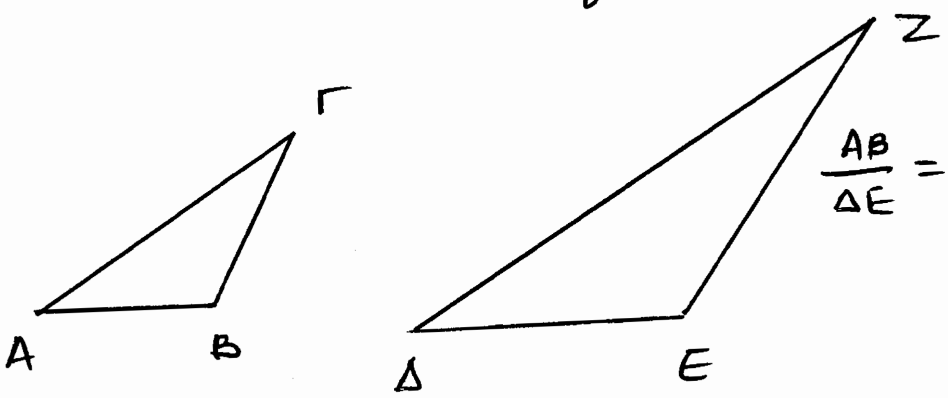
Έτσι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$ είναι όμοια από το 2ο Κριτήριο ομοιότητας, αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 35°$

(ii) $\hat{A} = 47°$, $\hat{B} = 38°$ άρα $\hat{\Gamma} = 180° - 47 - 38° = 95°$

Έτσι $\hat{A} = \hat{E} = 47°$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 95°$, οπότε τα δύο τρίγωνα είναι όμοια από το 1ο Κριτήριο ομοιότητας

(iii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$ είναι όμοια γιατί είναι ισοσκελή με μια αντίστοιχη γωνία ίση.

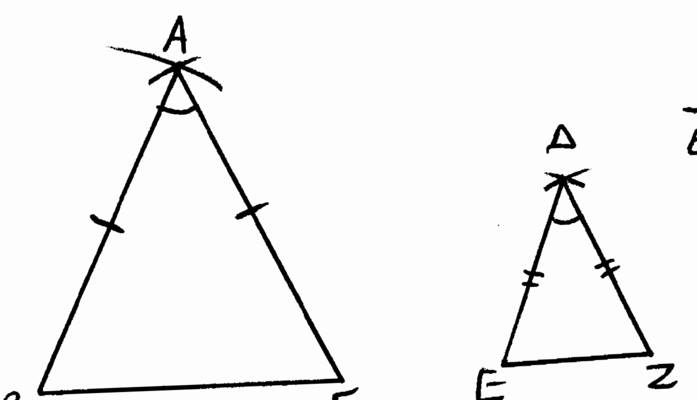
(β) (i)



$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{ZE}$

(ii) $\frac{B\Gamma}{\Delta Z} = \frac{AB}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta E}$

(iii)



$\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$

Άσκηση 2 (2_18990)

(α) Αφού $AB // \Delta E$ έχουμε $A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}E$ ως εντός εναλλάξ με τέμνουσα την $B\Delta$.

Επίσης $A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{\Gamma}E$ ως κατακορυφήν

άρα τα τρίγωνα είναι όμοια: (1º κριτήριο)

(β) Ισχύει $A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{\Gamma}E$ (ως κατακορυφήν)

$\dfrac{B\Gamma}{\Delta\Gamma} = 2$ και $\dfrac{A\Gamma}{E\Gamma} = 2$, άρα $\dfrac{B\Gamma}{\Delta\Gamma} = \dfrac{A\Gamma}{E\Gamma}$

Πλευρές ανάλογες. Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια από το 2º κριτήριο.

Άσκηση 3 (2_18993)

(α)(i) $\dfrac{A\Gamma}{\Delta Z} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$, $\dfrac{B\Gamma}{EZ} = \dfrac{16}{40} = \dfrac{2}{5}$, $\dfrac{BA}{\Delta E} = \dfrac{18}{48} = \dfrac{3}{8} \neq \dfrac{2}{5}$

Άρα τα τρίγωνα δεν είναι όμοια.

(ii) $\hat{A} = \hat{\Delta} = 63°$, $\hat{B} = 180° - 63 - 83° = 34°$, άρα $\hat{B} = \hat{E} = 34°$

Άρα από το 1º κριτήριο είναι όμοια.

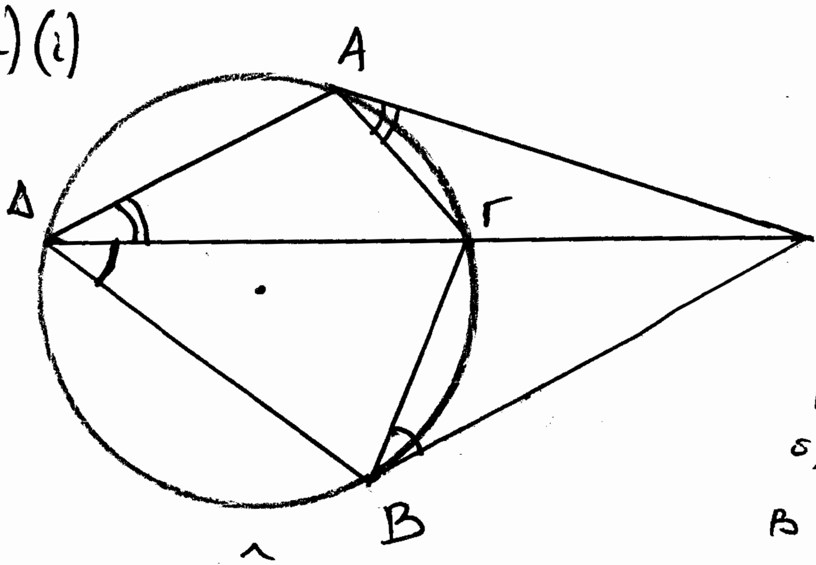
(β) Έστω x, y, z οι πλευρές του ΔEZ τότε: $(x < y < z)$

$\dfrac{x}{AB} = \dfrac{y}{A\Gamma} = \dfrac{z}{B\Gamma} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z}{8} = 3$

$\Leftrightarrow x = 18,\ y = 21,\ z = 24.$

Άσκηση 4 (2_19011)

(α) (i)



(α) (i)

• Η $B\hat{\Sigma}\Gamma$ είναι κοινή

Σ • Η $B\hat{\Delta}\Gamma = \Sigma\hat{B}\Gamma$ ως γωνία χορδής και εφαπτομένης. Αφού η $\Gamma\hat{B}\Sigma$ είναι γωνία που σχηματίζεται από τη χορδή ΒΓ και την εφαπτομένη ΒΣ και η $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$

(ii) • Η $A\hat{\Sigma}\Gamma$ είναι κοινή

• Η $\Sigma\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma$ ως γωνίες χορδής με την εφαπτομένη ΣΑ. Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια.

(β) Από το (α)(i) έχουμε: $\dfrac{B\Gamma}{B\Delta} = \dfrac{\Gamma\Sigma}{B\Sigma} = \dfrac{B\Sigma}{\Delta\Sigma} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{B\Gamma}{B\Delta} = \dfrac{\Gamma\Sigma}{A\Sigma}$ (1) (Αφού $\Sigma A = \Sigma B$ ως εφαπτόμενα τμήματα)

Από το (α) (ii) έχουμε: $\dfrac{A\Gamma}{A\Delta} = \dfrac{\Gamma\Sigma}{A\Sigma} = \dfrac{A\Sigma}{\Delta\Sigma}$

$\Leftrightarrow \dfrac{A\Gamma}{A\Delta} = \dfrac{\Gamma\Sigma}{A\Sigma}$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $\dfrac{B\Gamma}{B\Delta} = \dfrac{A\Gamma}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Gamma \cdot B\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$

Άσκηση 5 (2_19014)

(α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια διότι:
(i) $\hat{A} = \hat{Z}$ (ii) $\hat{B} = \hat{E}$ (Υπόθεση)

(β) $\frac{BA}{ZE} = \frac{A\Gamma}{Z\Delta} = \frac{\Gamma B}{E\Delta}$

(γ) $\frac{B\Gamma}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{Z\Delta} \Leftrightarrow \frac{x}{18} = \frac{25}{15} \Leftrightarrow \frac{x}{18} = \frac{5}{3}$
$\Leftrightarrow \boxed{x = 30}$

$\frac{BA}{ZE} = \frac{A\Gamma}{Z\Delta} \Leftrightarrow \frac{y}{12} = \frac{25}{15} \Leftrightarrow \frac{y}{12} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \boxed{y = 20}$

Άσκηση 6 (2_19015)

(α) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ είναι όμοια
(i) Η $\hat{A}$ είναι κοινή
(ii) $A\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των $\Delta E \parallel B\Gamma$ και η ΑΒ τέμνουσα

(β) $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{AE}$

(γ) Είναι λάθος γιατί το τμήμα με μήκος 5 δεν είναι πλευρά κανενός από τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ και $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$

$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow 2x = 27$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{27}{2}}$

Άσκηση 7 (2_19017)

(α) Τα τρίγωνα είναι όμοια διότι:

(i) $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$

(ii) $\dfrac{24}{18} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{28}{21}$ (Πλευρές ανάλογες - 2ο Κριτήριο)

(β) $\dfrac{AB}{\Delta E} = \dfrac{\Gamma B}{EZ} = \dfrac{A\Gamma}{\Delta Z}$

(γ) $\dfrac{\Gamma B}{ZE} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow ZE = \dfrac{3}{4}\Gamma B$ άρα σωστή η (iii)

Άσκηση 8 (2_19019)

(α)(i) $A\hat{E}B = \Gamma\hat{E}\Delta$ ως κατακορυφήν

(ii) $E\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{B}A$ ως εντος εναλλάξ των $AB // \Delta\Gamma$

και ΔB τέμνουσα.

(β) Από το (α) αποδείξαμε δυο γωνίες ίσες άρα

τα τρίγωνα είναι όμοια $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta} = \dfrac{AE}{E\Gamma} = \dfrac{EB}{\Delta E}$

(γ) $\dfrac{AE}{E\Gamma} = \dfrac{BE}{\Delta E} \Leftrightarrow \dfrac{6}{15} = \dfrac{BE}{10} \Leftrightarrow \boxed{BE = 4}$

$\dfrac{AE}{E\Gamma} = \dfrac{AB}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{6}{15} = \dfrac{8}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \boxed{\Delta\Gamma = 20}$

Άσκηση 9 (2_19021)

(α) Τα τρίγωνα $K\hat{\Lambda}M$ και $\overset{\triangle}{EZ\Delta}$ έχουμε:

(i) $\hat{K} = \hat{\Delta} = 90°$

(ii) $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$ άρα $\dfrac{KM}{Z\Delta} = \dfrac{K\Lambda}{E\Delta}$ πλευρες ανάλογες

Άρα από το 2ο κριτήριο τα τρίγωνα είναι όμοια.

<u>2ο Τρόπος</u>

Το $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ είναι ισοσκελές άρα $\hat{A}=\hat{B}$

$\hat{A} = 180° - 40° - \hat{B} \Leftrightarrow 2\hat{A} = 140 \Leftrightarrow \boxed{\hat{A} = 70}$

Οι βάσεις των δύο ισοσκελών δεν είναι ίσες άρα τα τρίγωνα δεν είναι όμοια.

(B) (i) $\frac{M\Lambda}{EZ} = \frac{KM}{\Delta Z} = \frac{K\Lambda}{E\Delta}$

(ii) $\lambda = \frac{M\Lambda}{EZ} = \frac{KM}{\Delta Z} = \frac{K\Lambda}{E\Delta} = \frac{10}{15} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

<u>Άσκηση 10 (2_19023)</u>

(α) Αφού τα δύο πολύγωνα είναι όμοια, ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με τον λόγο των πλευρών τους.

$\lambda = \frac{AB}{K\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M} = \frac{\Gamma\Delta}{MN} = \frac{\Delta E}{NP} = \frac{EA}{PK} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

(β) $\lambda = \frac{AE}{PK} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{AE}{18} \Leftrightarrow AE = x = 12$

(γ) $\lambda = \frac{\Pi_{AB\Gamma\Delta E}}{\Pi_{K\Lambda MNP}}$. $\Pi_{K\Lambda MNP} = 15+12+9+15+18 = 69$

άρα $\frac{\Pi_{AB\Gamma\Delta E}}{69} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \Pi_{AB\Gamma\Delta E} = 46$

Άσκηση 11 (2_19030)

(α) Τα τρίγωνα είναι όμοια διότι:

(i) $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ (ii) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (Η ΟΔ διχοτόμος)

(β) $\dfrac{OE}{OB} = \dfrac{AE}{B\Delta} = \dfrac{OA}{O\Delta} \Leftrightarrow \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OA}{O\Delta} \overset{OB=2OA}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \dfrac{OE}{2OA} = \dfrac{OA}{O\Delta} \Leftrightarrow 2OA^2 = O\Delta \cdot OE$

Άσκηση 12 (2_19035)

(α) Ισχύει $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{AE}{A\Gamma} = \dfrac{1}{3}$ και $\hat{A}$ κοινή

Άρα από το 2º κριτήριο τα τρίγωνα είναι όμοια

(β) Από υπόθεση $\Delta B \parallel EZ$

Απο το αντίστροφο του Θ. Θαλή αφού $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{AE}{A\Gamma}$

ισχύει $\Delta E \parallel BZ$

Επομένως το ΔEZB είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα $\boxed{\Delta E = BZ}$ (1)

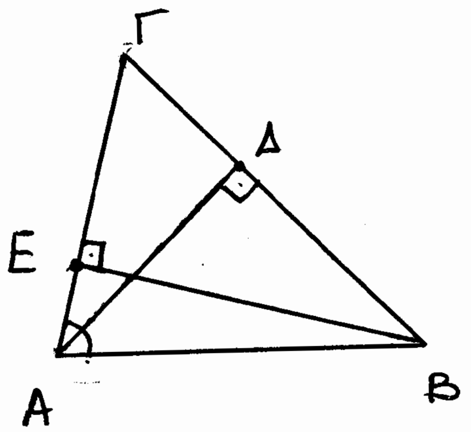
Από την ομοιότητα έχουμε: $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{AE}{A\Gamma} = \dfrac{\Delta E}{B\Gamma} = \dfrac{1}{3}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{BZ}{B\Gamma} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{3BZ = B\Gamma}$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο
ΛΥΣΕΙΣ – 4ο ΘΕΜΑ

Άσκηση 1 (4_18976)

(α) (i)



Τα τρίγωνα είναι όμοια διότι:

- $\hat{E} = \hat{\Delta} = 90^\circ$
- $\hat{\Gamma}$ κοινή

(ii) Τα δύο τρίγωνα είναι ορθογώνια. Επειδή το $A\hat{B}\Gamma$ είναι σκαληνό η $\hat{A} \neq \hat{B}$ κατά συνέπεια και η $B\hat{A}E \neq B\hat{A}\Delta$ γιατί το $A\hat{B}\Gamma$ είναι οξυγώνιο και το ύψος $A\Delta$ είναι εσωτερικό της $B\hat{A}E$

(β) Αν το $A\hat{B}\Gamma$ είναι ισοσκελές τότε τα τρίγωνα $A\hat{B}\Delta$ και $B\hat{E}A$ είναι ίσα διότι

(1) $\hat{E} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ (2) AB κοινή (3) $\hat{A} = \hat{B}$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές)

Αφού είναι ίσα άρα και όμοια.

Άσκηση 2 (4_19016)

(α) $\dfrac{AE}{A\Gamma} = \dfrac{2}{3}$ και $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{2}{3}$ άρα έχουμε: $\dfrac{AE}{A\Gamma} = \dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{2}{3}$

Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια αφού $\dfrac{AE}{A\Gamma} = \dfrac{A\Delta}{AB}$ και $\hat{A}$ κοινή

άρα $A\hat{E}\Delta = A\hat{\Gamma}B$

(β) Από την ομοιότητα των τριγώνων $\overset{\triangle}{AE\Delta}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$

έχουμε: $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{E\Delta}{B\Gamma}$

(γ) Έστω $E\Delta // B\Gamma$ τότε $A\hat{E}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ (1) ως εντός εκτός και επί τα αυτά των $E\Delta // B\Gamma$ και AB τέμνουσα.

Από το (α) έχουμε: $A\hat{E}\Delta = A\hat{\Gamma}B$ (2)

Επομένως $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$ δηλαδή το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές. Άτοπο αφού το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι σκαληνό άρα το $B\Gamma$ δεν είναι παράλληλο στο ΔE.

Άσκηση 3 (4_19097)

(α) Έχουμε $E // B\Gamma$ και $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$. Επομένως από το αντίστροφο του Θ Θαλή ισχύει $\Delta E // B\Gamma$

(β) Έχουμε $AZ // B\Gamma$ άρα τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AZE}$ και $\overset{\triangle}{EB\Gamma}$ είναι όμοια. Έτσι $\frac{EZ}{EB} = \frac{EA}{E\Gamma}$ (1)

Ισχύει ότι: $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{AE}{A\Gamma - AE} = \frac{1}{3-1} \Leftrightarrow \frac{EA}{E\Gamma} = \frac{1}{2}$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $\frac{EZ}{EB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ZE = \frac{1}{2} EB$

(γ) Ισχύει $\frac{EZ}{EB} = \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{AZ}{B\Gamma} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow AZ = \frac{1}{2} B\Gamma$

Άσκηση 4 (4_19029)

(α) Στο τρίγωνο $A\hat{\Gamma}\Delta$ έχουμε: $MK // \Delta\Gamma$ άρα

$$\frac{AK}{A\Gamma} = \frac{AM}{A\Delta} = \frac{MK}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{3}$$

(β) Είναι $\frac{AK}{A\Gamma} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma - \Gamma K}{A\Gamma} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{\Gamma K}{A\Gamma} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\Gamma K}{A\Gamma} = \frac{2}{3} \quad (1)$

Στο τρίγωνο ΓAB έχουμε $AB // KN$ άρα

$$\frac{\Gamma K}{A\Gamma} = \frac{KN}{AB} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{KN}{AB} = \frac{2}{3}$$

(γ) Από το (α) έχουμε: $\frac{MK}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow MK = \frac{1}{3}\Gamma\Delta$

Από το (β) έχουμε: $\frac{KN}{AB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow KN = \frac{2}{3}AB$

Έχουμε: $MN = MK + KN = \frac{1}{3}\Gamma\Delta + \frac{2}{3}AB$.

Άσκηση 5 (4_19039)

(α) Ισχύει $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Leftrightarrow \hat{A} + 2\hat{B} = 180°$

$\Leftrightarrow 2\hat{B} = 180° - 36° \Leftrightarrow \hat{B} = 72 = \hat{\Gamma}$

Η $B\Delta$ διχοτόμος άρα $A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma = 36°$

(i) Τα τρίγωνα $B\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι όμοια διότι:

- η $\hat{\Gamma}$ είναι κοινή
- $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{A} = 36°$

(ii) Απο την ομοιότητα έχουμε:

$$\frac{B\Delta}{AB} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$$

Εχουμε: $\hat{A} = \Delta\hat{B}\Gamma = 36^\circ$ άρα το $\overset{\triangle}{\Delta A B}$ ισοσκελές

άρα $\boxed{A\Delta = B\Delta}$

Η $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A} + A\hat{B}\Delta = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$

Αρα το τρίγωνο $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ είναι ισοσκελές άρα $\boxed{B\Gamma = B\Delta}$

Επομένως $\boxed{A\Delta = B\Gamma = B\Delta}$

Απο το Θ. Εσωτ. Διχοτ. έχουμε: $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Delta}$

$\overset{B\Gamma = A\Delta}{\underset{AB = A\Gamma}{\Longleftrightarrow}} \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Delta} \Leftrightarrow \boxed{A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta\Gamma}$

(B) Για $A\Gamma = 1$ έχουμε: $\boxed{A\Delta^2 = \Delta\Gamma}$

$A\Gamma = A\Delta + \Gamma\Delta \Leftrightarrow 1 = A\Delta + A\Delta^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 + A\Delta - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$ άρα $A\Delta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

άρα $\boxed{A\Delta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$ (Απορρίπτεται η αρνητική