ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{ο} - ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ
ΘΕΜΑ 2^{ο}

Άσκηση 1 (2_18975)

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ ΑΒ=9 και ΑΓ=15. Από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου, φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{2}{3}$ και $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=2$

(β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΓΕ.

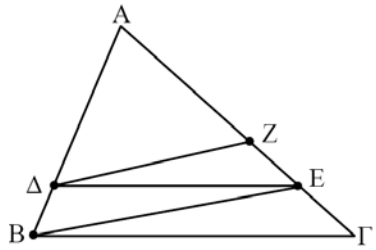
Άσκηση 2 (2_19024)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς τη ΒΕ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$,

(β) $\frac{ΑΖ}{ΑΔ}=\frac{ΑΕ}{ΑΒ}$,

(γ) $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΖ}{ΑΕ}$.

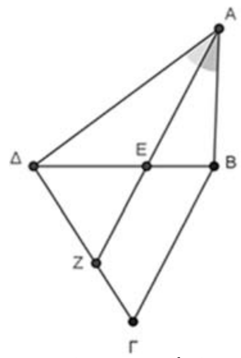


Άσκηση 3 (2_19031)

Στο κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, η διχοτόμος της γωνίας Α είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ και τέμνει τη ΔΒ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ. Αν ΑΔ=12, ΑΒ=8, ΔΕ=9 και ΖΓ=6, να αποδείξετε ότι:

(α) $ΕΒ=6$,

(β) $ΔΖ=9$.

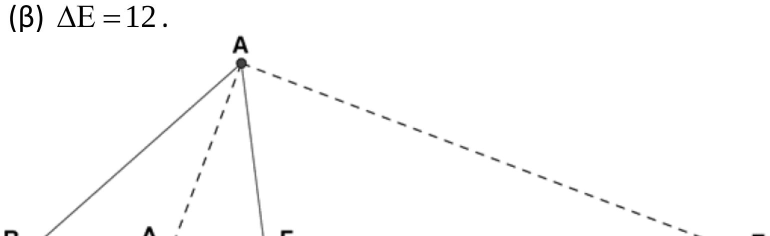


Άσκηση 4 (2_19040)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ>ΑΓ) και ΑΔ, ΑΕ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος του αντίστοιχα. Αν ΑΒ=6, ΔΒ=3, ΒΓ=5 και ΒΕ=15, να αποδείξετε ότι:

(α) $ΑΓ=4$,

(β) $ΔΕ=12$.



Άσκηση 5 (2_19026)

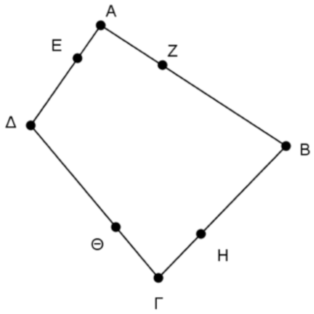
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ. Φέρνουμε από το σημείο Δ παράλληλες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν αντίστοιχα στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\frac{ΔΕ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΒΓ}$, (β) $\frac{ΖΔ}{ΑΒ}=\frac{ΔΓ}{ΒΓ}$, (γ) $\frac{ΔΕ}{ΑΓ}=\frac{ΖΔ}{ΑΒ}=1$.

<u>Άσκηση 6 (2 19033)</u>

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ των πλευρών του ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα τέτοια, ώστε: $\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΖ}{ΑΒ}=\frac{ΓΗ}{ΓΒ}=\frac{ΓΘ}{ΓΔ}=\frac{1}{3}$. Να αποδείξετε ότι:

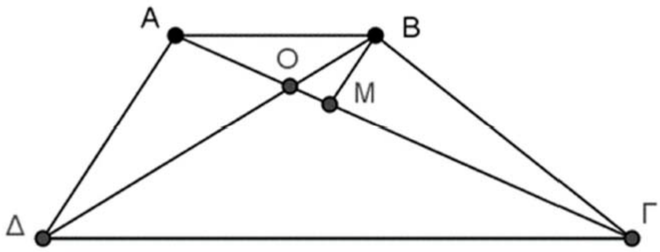
(α) ΕΖ//ΘΗ//ΔΒ, (β) $ΕΖ=ΘΗ=\frac{1}{3}ΔΒ$, (γ) ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμο.



<u>Άσκηση 7 (2 19036)</u>

Οι διαγώνιοι του τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ>ΑΒ τέμνονται στο Ο. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΔ τέμνει την ΑΓ στο Μ. Αν ΟΑ=12, ΟΒ=9 και ΟΓ=36, να αποδείξετε ότι:

(α) ΟΔ=27, (β) ΟΜ=4.



ΘΕΜΑ 4^{ο}

Άσκηση 1 (4_18994)

Στην πλευρά ΑΒ παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε: $\mathrm{BE}=\frac{1}{3}\mathrm{AB}$ και στην πλευρά ΔΓ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε: $\Delta\mathrm{Z}=\frac{1}{3}\Delta\Gamma$.

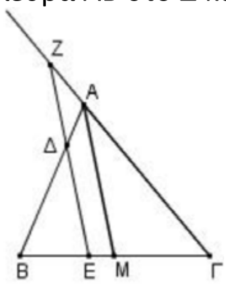
Αν η διαγώνιος ΑΓ τέμνει τις ΔΕ και ΒΖ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{AM}=\Gamma\mathrm{N}=2\mathrm{MN}$.

(β) $\mathrm{MN}=\frac{1}{5}\mathrm{A}\Gamma$.

Άσκηση 2 (4_19000)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσο του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκτασή της ΓΑ στο Ζ.



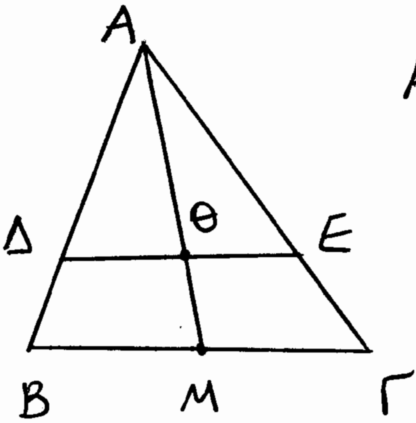
(α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

(i) $\frac{\Delta\mathrm{E}}{.....}=\frac{.....}{\mathrm{BM}}=\frac{\mathrm{B}\Delta}{.....}$, (ii) $\frac{.....}{\mathrm{AM}}=\frac{\Gamma\mathrm{E}}{.....}=\frac{.....}{\Gamma\mathrm{A}}$

(β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα ΔΕ+ΕΖ είναι σταθερό, για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο
ΛΥΣΕΙΣ – 2ο ΘΕΜΑ

Άσκηση 1 (2_18975)



Αφού το Θ είναι βαρύκεντρο ισχύει:

$A\Theta = \frac{2}{3}AM$ (1) και $\Theta M = \frac{1}{3}AM$ (2)

(α) Αφού $\Delta E // B\Gamma$ από το Θεωρ. Θαλή έχουμε: $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Theta}{AM} \overset{(1)}{=} \frac{\frac{2}{3}AM}{AM} = \frac{2}{3}$

Όμοια: $\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta M} = \frac{\frac{2}{3}AM}{\frac{1}{3}AM} = \frac{6}{3} = 2$

(β) $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}9 \Leftrightarrow \boxed{A\Delta = 6}$.

$\frac{AE}{\Gamma E} = 2 \Leftrightarrow AE = 2\Gamma E \Leftrightarrow A\Gamma - E\Gamma = 2\Gamma E \Leftrightarrow 15 = 3\Gamma E$

$\Leftrightarrow \boxed{\Gamma E = 5}$

Άσκηση 2 (2_19024)

(α) Αφού $\Delta E // B\Gamma$ από θεωρ. Θαλή έχουμε:

$\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB}$ (1) $\Leftrightarrow \frac{AE}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AB}$

(β) Αφού $\Delta Z // BE$ από θεωρ. Θαλή έχουμε:

$\frac{AZ}{AE} = \frac{A\Delta}{AB}$ (2) $\Leftrightarrow \frac{AZ}{A\Delta} = \frac{AE}{AB}$

(γ) Από (1), (2) έχουμε: $\dfrac{AE}{A\Gamma} = \dfrac{AZ}{AE}$

Άσκηση 3 (2_19031)

(α) Από το Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{EB} \Leftrightarrow \frac{12}{8} = \frac{9}{EB} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{EB} \Leftrightarrow EB = \frac{18}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{EB = 6}$$

(β) Από το Θεώρημα Θαλή στο $\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$ αφού $EZ \parallel B\Gamma$ έχουμε:

$$\frac{\Delta Z}{Z\Gamma} = \frac{\Delta E}{EB} \Leftrightarrow \frac{\Delta Z}{6} = \frac{9}{6} \Leftrightarrow \boxed{\Delta Z = 9}$$

Άσκηση 4 (2_19040)

(α) Από το Θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουμε:

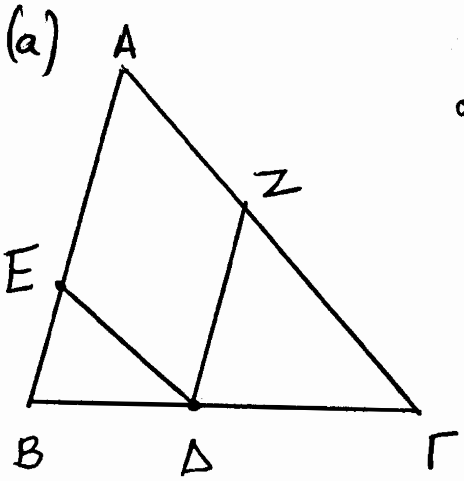
$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{E\Gamma}{BE} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{6} = \frac{BE - B\Gamma}{15} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{6} = \frac{10}{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3A\Gamma = 12 \Leftrightarrow \boxed{A\Gamma = 4}$$

(β) $\Delta E = BE - B\Delta = 15 - 3 \Leftrightarrow \boxed{\Delta E = 12}$

Άσκηση 5 (2_19026)

(α)



Ισχύει: $\Delta E \parallel A\Gamma$ άρα από το Θ. Θαλή στα τρίγωνα $\overset{\triangle}{BE\Delta}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουμε:

$$\frac{BE}{B\Delta} = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{BE}{AB}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\Delta E}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}} \quad (1)$$

(β) Όμοια $Z\Delta // AB$ από το θ. Θαλή για $Z\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma$

έχουμε: $\dfrac{Z\Gamma}{\Delta\Gamma} = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{Z\Delta}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{Z\Delta}{AB} = \dfrac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{Z\Gamma}{A\Gamma}$

$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{Z\Delta}{AB} = \dfrac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}}\ (2)$

(γ) Από το (1)+(2) έχουμε: $\dfrac{\Delta E}{A\Gamma} + \dfrac{Z\Delta}{AB} = \dfrac{B\Delta}{B\Gamma} + \dfrac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\Delta E}{A\Gamma} + \dfrac{Z\Delta}{AB} = \dfrac{B\Gamma + \Delta\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{B\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{\Delta E}{A\Gamma} + \dfrac{Z\Delta}{AB} = 1$

Άσκηση 6 (2_19033)

(α) $\dfrac{AE}{A\Delta} = \dfrac{AZ}{AB} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{AE}{A\Delta - AE} = \dfrac{AZ}{AB - AZ} = \dfrac{1}{3-1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{AE}{\Delta E} = \dfrac{AZ}{BZ} = \dfrac{1}{2}$. Άρα στο τρίγωνο $A\hat{B}\Delta$ η EZ χωρίζει τις πλευρές $A\Delta$ και AB σε μέρη ανάλογα άρα από το αντίστροφο του θ. Θαλή $EZ // \Delta B$ (1)

Όμοια στο τρίγωνο $B\hat{\Gamma}\Delta$ έχουμε $\Theta H // \Delta B$ (2)

Άρα από (1), (2) $EZ // \Delta B // \Theta H$

(β) Ισχύει $EZ // \Delta B$ άρα στο τρίγωνο $A\hat{\Delta}B$ από θ. Θαλή έχουμε: $\dfrac{AE}{A\Delta} = \dfrac{AZ}{AB} = \dfrac{EZ}{B\Delta} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{EZ}{B\Delta} = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow EZ = \dfrac{1}{3} B\Delta$ (3)

Όμοια $\Theta H // \Delta B$ άρα $\dfrac{\Gamma\Theta}{\Gamma\Delta} = \dfrac{\Gamma H}{\Gamma B} = \dfrac{\Theta H}{\Delta B} = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\Theta H}{\Delta B} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \Theta H = \dfrac{1}{3} B\Delta$ (4)

(γ) Από το (α) ερώτημα έχουμε: $\Theta H // EZ$

Επίσης $EZ = \Theta H = \frac{1}{3} \Delta B$

Άρα $EZ //= \Theta H$ άρα το $EZH\Theta$ παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 7 (2_19036)

(α) Έχουμε $AB // \Gamma\Delta$ στο $O\hat{A}B$ από Θ. Θαλή έχουμε:

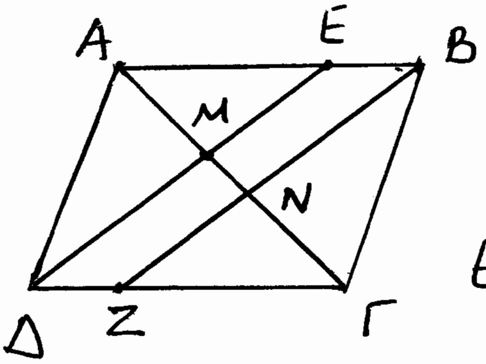
$$\frac{OA}{O\Gamma} = \frac{OB}{O\Delta} \Leftrightarrow \frac{12}{36} = \frac{9}{O\Delta} \Leftrightarrow \boxed{O\Delta = 27}$$

(β) Έχουμε $A\Delta // BM$ στο $O\hat{A}\Delta$ από Θ. Θαλή έχουμε:

$$\frac{OA}{OM} = \frac{O\Delta}{OB} \Leftrightarrow \frac{12}{OM} = \frac{27}{9} \Leftrightarrow \boxed{OM = 4}$$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο
ΛΥΣΕΙΣ – 4ο ΘΕΜΑ

Άσκηση 1 (4_18994)



$BE = \frac{1}{3} AB$ και $\Delta Z = \frac{1}{3} \Delta\Gamma$

Ν.δ.ο: (α) $AM = \Gamma N = 2MN$

(β) $MN = \frac{1}{5} A\Gamma$

Επομένως $AE = \frac{2}{3} AB$ και

$\Gamma Z = \frac{2}{3} \Delta\Gamma$

Λύση:

(α) Η $ME \parallel BN$, άρα από Θεωρ. Θαλή στο $A\hat{B}N$ έχουμε

$$\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Leftrightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{\frac{2}{3}AB}{\frac{1}{3}AB} = 2 \Leftrightarrow \boxed{AM = 2MN} \quad (1)$$

Όμοια η $ZN \parallel \Delta M$, άρα από το Θ. Θαλή στο $\Delta\hat{\Gamma}M$ έχουμε

$$\frac{\Gamma N}{MN} = \frac{\Gamma Z}{\Delta Z} \Leftrightarrow \frac{\Gamma N}{MN} = \frac{\frac{2}{3}\Delta\Gamma}{\frac{1}{3}\Delta\Gamma} = 2 \Leftrightarrow \boxed{\Gamma N = 2MN} \quad (2)$$

Από τις (1), (2) έχουμε: $AM = \Gamma N = 2MN$

(β) $A\Gamma = AM + MN + N\Gamma = 2MN + MN + 2MN$

$$\Leftrightarrow A\Gamma = 5MN \Leftrightarrow \boxed{MN = \frac{1}{5} A\Gamma}$$

Άσκηση 2 (4_19000)

(α) (i) Έχουμε $ΔΕ // ΑΜ$. Από το θ. Θαλή στο $B\hat{A}M$ έχουμε:

$$\frac{ΔΕ}{ΑΜ} = \frac{ΒΕ}{ΒΜ} = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} \quad (1)$$

(ii) Όμοια ισχύει $ΖΕ // ΑΜ$. Από το θ. Θαλή στο $Γ\hat{Z}E$ έχουμε:

$$\frac{ΕΖ}{ΑΜ} = \frac{ΓΕ}{ΓΜ} = \frac{ΓΖ}{ΓΑ} \quad (2)$$

(β) Η (1) γίνεται: $\frac{ΔΕ}{ΑΜ} = \frac{ΒΕ}{ΒΜ} \Leftrightarrow ΔΕ \cdot ΒΜ = ΑΜ \cdot ΒΕ \quad (3)$

Η (2) γίνεται: $\frac{ΕΖ}{ΑΜ} = \frac{ΓΕ}{ΓΜ} \Leftrightarrow ΕΖ \cdot ΓΜ = ΑΜ \cdot ΓΕ \quad (4)$

(3) (+) (4) $\quad ΔΕ \cdot ΒΜ + ΕΖ \cdot ΓΜ = ΑΜ(ΒΕ + ΓΕ) \overset{ΒΜ=ΓΜ}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow ΒΜ(ΔΕ + ΕΖ) = ΑΜ(ΒΕ + ΓΕ)$

$\Leftrightarrow (ΔΕ + ΕΖ) \cdot ΒΜ = ΑΜ \cdot ΒΓ \overset{ΒΓ = 2ΒΜ}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (ΔΕ + ΕΖ) \cdot \cancel{ΒΜ} = 2ΑΜ \cdot \cancel{ΒΜ} \Leftrightarrow ΔΕ + ΕΖ = 2ΑΜ =$ σταθερό.