<u>ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ</u>
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10^{Ο} – ΕΜΒΑΔΑ</u>
<u>ΘΕΜΑ 2^{Ο}</u>

<u>Άσκηση 1 (2_19028)</u>

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΒΕ το ύψος του. Αν είναι: ΑΒ=3, ΓΔ=7 και ΒΓ=4 τότε,

(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{BE}=2\sqrt{3}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

<u>Άσκηση 2 (2_19043)</u>

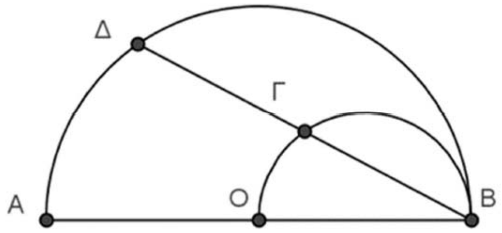
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{\mathrm{A}}=90^{o}\right)$ με ΑΓ=4 και ύψος $\mathrm{A\Delta}=\dfrac{12}{5}$.

(α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΓ

(β) Να αποδείξετε ότι: $\Delta\mathrm{B}=\dfrac{9}{5}$, (γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

<u>Άσκηση 3 (2_19038)</u>

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ κέντρου Ο θεωρούμε σημείο του Δ. Η χορδή ΔΒ τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου ΟΒ στο Γ.



Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΟΓΒ είναι όμοια.

(β) (ΑΔΒ)=4(ΟΓΒ).

ΘΕΜΑ 4ο

Άσκηση 1 (4_19022)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) τέτοιο ώστε να ισχύει: $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Αν η προέκταση της διαμέσου του ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ρ, να αποδείξετε ότι:

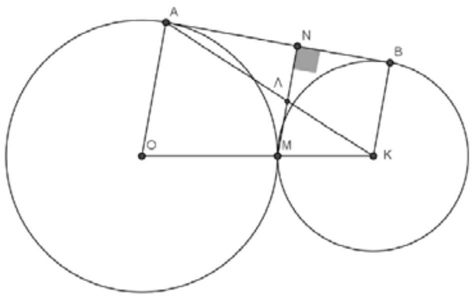
(α) $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, (β) $\mathrm{MP} = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}$, (γ) $(\mathrm{AB\Gamma}) = 6(\mathrm{MP\Gamma})$.

Άσκηση 2 (4_19032)

Δίνονται δύο κύκλοι (Ο,α) και (Κ,β) με α>β, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο Μ. Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ με Α, Β σημεία των κύκλων (Ο,α) και (Κ,β) αντίστοιχα. Από το Μ θεωρούμε την κάθετη στο ΑΒ, η οποία τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΑΒ στα σημεία Λ και Ν αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{M\Lambda} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, (β) $\mathrm{\Lambda N} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, (γ) Αν E_1 και E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων (Ο,α) και (Κ,β) αντίστοιχα, τότε: $\dfrac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2} = \left(\dfrac{(\mathrm{A\Lambda N})}{(\mathrm{KM\Lambda})}\right)^2$.



Άσκηση 3 (4_19034)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Μ, Λ και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε: $\mathrm{AM} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$, $\mathrm{A\Lambda} = \dfrac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{BZ} = \dfrac{1}{3}\mathrm{B\Gamma}$

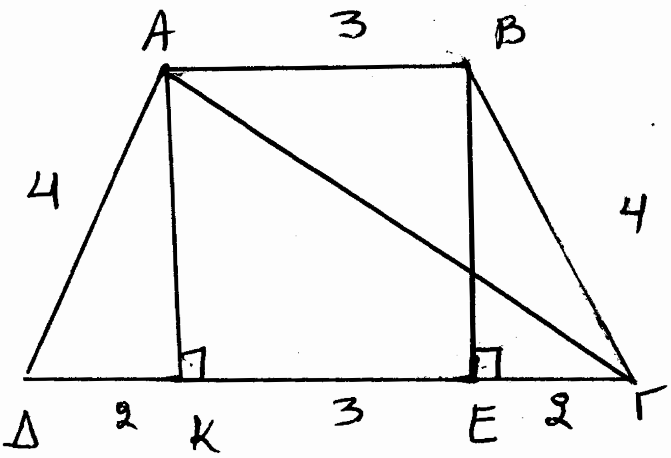
(α) Να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{AM\Lambda}) = \dfrac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})$, (β) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{(\mathrm{MZ\Lambda})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \dfrac{5}{18}$,

(γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών: $\dfrac{(\mathrm{AMZ\Lambda})}{(\mathrm{AB\Gamma})}$.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10ο
ΛΥΣΕΙΣ – 2ο ΘΕΜΑ

Άσκηση 1 (2_19028)

$AB=3$, $\Gamma\Delta=7$ και $B\Gamma=4$



(α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Delta K}$ και $\overset{\triangle}{BE\Gamma}$ είναι ίσα:

(i) $AK=BE$ (Αποσταση παραλλήλων)

(ii) $A\Delta=B\Gamma=4$

άρα $\Delta K=E\Gamma$

$\Delta\Gamma=7 \Leftrightarrow 2\Delta K+KE=7 \Leftrightarrow 2\Delta K=7-3 \Leftrightarrow \boxed{\Delta K=2}$

Αφου $AB \parallel KE$ και $\hat{K}=90^\circ$ άρα το $AB\hat{E}K$ ορθογώνιο

Από ΠΘ στο $B\hat{\Gamma}E$ έχουμε: $BE^2=B\Gamma^2-E\Gamma^2$

$\Leftrightarrow BE^2=16-4=12 \Leftrightarrow \boxed{BE=2\sqrt{3}}$

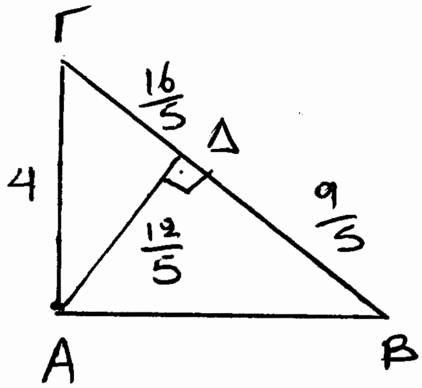
(β) $(AB\Gamma\Delta)=(AB\Gamma)+(A\Gamma\Delta) \Leftrightarrow (AB\Gamma)=(AB\Gamma\Delta)-(A\Gamma\Delta)$

$$\Leftrightarrow (AB\Gamma)=\frac{AB+\Delta\Gamma}{2}\cdot BE-\frac{1}{2}\cdot\Delta\Gamma\cdot AK$$

$$=\frac{3+7}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{3}-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot 7\cdot\cancel{2}\sqrt{3}$$

$$=10\sqrt{3}-7\sqrt{3}=3\sqrt{3}\ \tau\mu$$

Άσκηση 2 (2_19043)



(α) Από το ΠΘ στο $A\hat{\Delta}\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 - A\Delta^2 = 16 - \frac{144}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\Gamma^2 = \frac{256}{25} \Leftrightarrow \boxed{\Delta\Gamma = \frac{16}{5}}$$

(β) $$A\Delta^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Delta \Leftrightarrow \frac{12^2}{5^2} = \frac{16}{5} \cdot B\Delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{144}{25} = \frac{16}{5} \cdot B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = \frac{144}{5\cancel{25}} \cdot \frac{\cancel{5}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B\Delta = \frac{9}{5}}$$

(γ) $$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cancel{5} \cdot \frac{12}{\cancel{5}} \Leftrightarrow (AB\Gamma) = 6 \text{ τμ.}$$

Άσκηση 3 (2_19038)

(α) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΟΓΒ έχουν:

(i) Η $\hat{B}$ κοινή

(ii) $A\hat{\Delta}B = O\hat{\Gamma}B = 90^\circ$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ημικύκλιο, αφού οι ΑΒ και ΟΒ είναι διάμετροι

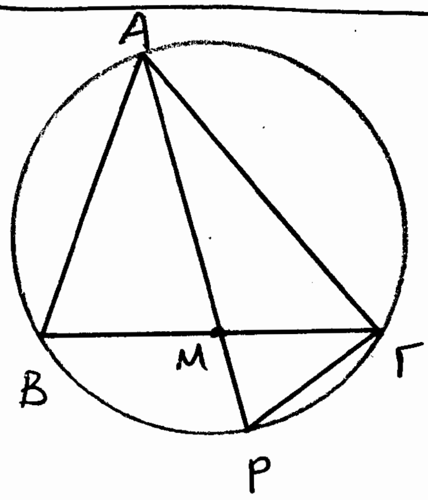
(β) Από το (α) τα τρίγωνα είναι όμοια άρα

$$\frac{O\Gamma}{A\Delta} = \frac{OB}{AB} = \frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{\cancel{OB}}{2 \cdot \cancel{OB}} = \lambda \text{ άρα } \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(O\Gamma B)}{(A\Delta B)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{(A\Delta B) = 4(O\Gamma B)}$$

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10ο
ΛΥΣΕΙΣ - 4ο ΘΕΜΑ

Άσκηση 1 (4_19022)



(α) $\beta^2+\gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{a^2}{2}$

$2a^2=\beta^2+\gamma^2$

$\Leftrightarrow 2a^2 = 2\mu_a^2 + \frac{a^2}{2}$

$\Leftrightarrow 4\mu_a^2 + a^2 = 4a^2$

$\Leftrightarrow 4\mu_a^2 = 3a^2 \Leftrightarrow \boxed{\mu_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

(β) Η ΒΓ και η ΑΡ είναι τέμνουσες του κύκλου άρα

$AM \cdot MP = MB \cdot M\Gamma \Leftrightarrow \frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot MP = \frac{\cancel{a}}{\cancel{2}} \cdot \frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow MP = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{MP = \frac{a\sqrt{3}}{6}}$

(γ) Η ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο, οπότε

$(AB\Gamma) = 2(ABM)$ (1)

Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΜΓΡ έχουν τις γωνίες τους

$A\hat{M}B = \Gamma\hat{M}P$ ίσες ως κατακορυφήν

Άρα $\frac{(AMB)}{(\Gamma MP)} = \frac{MA \cdot MB}{MP \cdot M\Gamma} = \frac{\frac{\cancel{a}\cancel{\sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{a}\cancel{\sqrt{3}}}{6} \cdot \frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}} = 3$

$\Leftrightarrow (AMB) = 3(\Gamma MP)$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $(AB\Gamma) = 2 \cdot 3(M\Gamma P)$

$\Leftrightarrow \boxed{(AB\Gamma) = 6(\Gamma MP)}$

Άσκηση 2 (4-19032)

(α) Οι OA και KB είναι ακτίνες άρα είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα AB. Έτσι $OA \perp AB$ και $KB \perp AB$

Επομένως $OA \parallel MN \parallel KB$.

Τα τρίγωνα $A\hat{K}O$ και $\Lambda\hat{K}M$ είναι όμοια διότι:

(i) $\hat{K}$ κοινή (ii) $A\hat{O}K = \Lambda\hat{M}K$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των $OA \parallel \Lambda M$ και OK τέμνουσα)

Άρα $\frac{M\Lambda}{OA} = \frac{\Lambda K}{AK} = \frac{MK}{OK} \Leftrightarrow \frac{M\Lambda}{OA} = \frac{MK}{OK}$

$\Leftrightarrow \frac{M\Lambda}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \boxed{M\Lambda = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha+\beta}}$

(β) Από το (α) έχουμε $\frac{\Lambda K}{AK} = \frac{M\Lambda}{OA}$

$\Leftrightarrow \frac{AK - A\Lambda}{AK} = \frac{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{\alpha} \Leftrightarrow 1 - \frac{A\Lambda}{AK} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{A\Lambda}{AK} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$ (1)

Τα τρίγωνα $A\hat{N}\Lambda$ και $A\hat{B}K$ είναι όμοια διότι:

(i) η $\hat{A}$ κοινή (ii) $A\hat{N}\Lambda = A\hat{B}K = 90^\circ$

Άρα $\frac{\Lambda N}{BK} = \frac{A\Lambda}{AK} = \frac{AN}{AB} \Leftrightarrow \frac{\Lambda N}{BK} = \frac{A\Lambda}{AK}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\Lambda N}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \boxed{\Lambda N = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}$

(γ) Τα τρίγωνα $A\hat{\Lambda}N$ και $K\hat{M}\Lambda$ έχουν

$A\hat{\Lambda}N = K\hat{\Lambda}M$ ως κατακορυφήν άρα

$$\frac{(A\Lambda N)}{(KM\Lambda)} = \frac{A\Lambda \cdot \Lambda N}{\Lambda M \cdot \Lambda K} = \frac{A\Lambda \cdot \cancel{\frac{a\beta}{a+\beta}}}{\cancel{\frac{a\beta}{a+\beta}} \cdot K\Lambda} = \frac{A\Lambda}{\Lambda K}$$

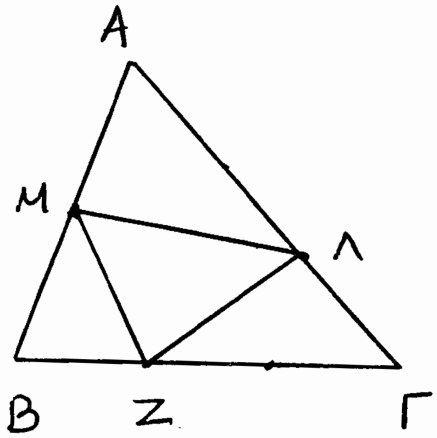
Από την (1) έχουμε: $\dfrac{A\Lambda}{AK} = \dfrac{a}{a+\beta} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{A\Lambda}{AK - A\Lambda} = \frac{a}{a+\beta-a} \Leftrightarrow \frac{A\Lambda}{\Lambda K} = \frac{a}{\beta}$$

Επομένως $\dfrac{(A\Lambda N)}{(KM\Lambda)} = \dfrac{A\Lambda}{\Lambda K} = \dfrac{a}{\beta}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(A\Lambda N)}{(KM\Lambda)}\right)^2 = \frac{a^2}{\beta^2} \Leftrightarrow \left(\frac{(A\Lambda N)}{(KM\Lambda)}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{\pi \beta^2} = \frac{E_1}{E_2}$$

Άσκηση 3 (4_19034)



$AM = \frac{1}{2}AB$, $A\Lambda = \frac{2}{3}A\Gamma$, $BZ = \frac{1}{3}B\Gamma$

(α) Στα τρίγωνα $A\hat{M}\Lambda$ και $A\hat{B}\Gamma$ η $\hat{A}$ είναι κοινή

$$\frac{(AM\Lambda)}{(AB\Gamma)} = \frac{AM \cdot A\Lambda}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{2}{3}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma}$$

$$= \frac{1}{3} \Leftrightarrow (AM\Lambda) = \frac{1}{3}(AB\Gamma) \quad (1)$$

(β) Τα τρίγωνα $B\hat{M}Z$ και $A\hat{B}\Gamma$ έχουν την $\hat{B}$ κοινή άρα

$$\frac{(MBZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{BM \cdot BZ}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{3}B\Gamma}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow (MBZ) = \frac{1}{6}(AB\Gamma) \quad (2)$$

Τα τρίγωνα $\hat{ΓΖΛ}$ και $\hat{ΑΒΓ}$ έχουν την $\hat{Γ}$ κοινή (4

άρα $\dfrac{(ΓΖΛ)}{(ΑΒΓ)} = \dfrac{ΓΛ \cdot ΓΖ}{ΓΑ \cdot ΓΒ} = \dfrac{\frac{1}{3} ΓΑ \cdot \frac{2}{3} \cdot ΓΒ}{ΓΑ \cdot ΓΒ} = \dfrac{2}{9}$

$\Leftrightarrow (ΓΖΛ) = \dfrac{2}{9}(ΑΒΓ) \quad (3)$

$$(ΜΖΛ) = (ΑΒΓ) - (ΑΜΛ) - (ΒΜΖ) - (ΓΖΛ)$$

$$= (ΑΒΓ) - \frac{1}{3}(ΑΒΓ) - \frac{1}{6}(ΑΒΓ) - \frac{2}{9}(ΑΒΓ)$$

$$= \frac{18}{18}(ΑΒΓ) - \frac{6}{18}(ΑΒΓ) - \frac{3}{18}(ΑΒΓ) - \frac{4}{18}(ΑΒΓ)$$

$$= \frac{5}{18}(ΑΒΓ)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ΜΖΛ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{5}{18}$$

(γ) $\dfrac{(ΑΜΖΛ)}{(ΑΒΓ)} = \dfrac{(ΑΜΛ) + (ΜΖΛ)}{(ΑΒΓ)} \overset{(1),(2)}{=\!=} \dfrac{\frac{1}{3}(ΑΒΓ) + \frac{5}{18}(ΑΒΓ)}{(ΑΒΓ)}$

$$= \frac{\left(\frac{6}{18} + \frac{5}{18}\right)(ΑΒΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{11}{18}$$