Απόλυτη τιμή Πραγματικού Αριθμού

Ερωτήσεις Κατανόησης – Ασκήσεις για λύση

64 (i) Σ (ii) Σ (iii) Σ (iv) Σ (v) Σ (vi) Λ (vii) Σ viii) Λ
(ix) Λ (x) Σ (xi) Λ

65 (i) Σ (ii) Σ (iii) Λ (iv) Σ (v) Σ (vi) Σ (vii) Σ (viii) Λ
(ix) Σ (x) Λ (xi) Λ

66 (i) Πρέπει $x \neq 0$ και $|x| \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq -2$
άρα το (γ)

(ii) $|a-\beta| + |\gamma| = 0 \Leftrightarrow a = \beta$ και $\gamma = 0$ άρα το (β)

(iii) $|2-x| - x = |x+2| \Leftrightarrow 2 - x - x = x + 2 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x \leq 2 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0$ και $-2 \leq x \Leftrightarrow x + 2 \geq 0$ άρα το (γ)

(iv) το (α)

(v) $\underbrace{|a+\beta|}_{>0} + \underbrace{|a-\beta|}_{>0} =$ $\quad a > \beta > 0 \quad a - \beta > 0$

$= a + \cancel{\beta} + a - \cancel{\beta} = 2a$ άρα το (α)

(vi) $1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 1 - 3 \leq x - 3 \leq 5 - 3 \Leftrightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2$

$\Leftrightarrow |x-3| \leq 2$ άρα το (β)

(vii) $|x-2| = -|2x-4| = -(2x-4) = x-2 \Leftrightarrow -2x+4 = x-2$

$\Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

ή $-(2x-4) = -(x-2) \Leftrightarrow 2x - 4 = x - 2 \Leftrightarrow x = 2$ άρα το (β)

(viii) $d(x,4) \le 0 \Leftrightarrow |x-4| \le 0 \Leftrightarrow x=4$ άρα το (α)

(ix) $(a-1)|x| = 1 \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{a-1}$ για $a \neq 1$

Πρέπει $\frac{1}{a-1} \geq 0 \Leftrightarrow a-1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$ άμα $a \neq 1$

άρα $a > 1$ άρα το (Β)

(x) $A = \frac{|x|}{x} - 1 = \frac{x}{x} - 1 = 0$ άρα το (α)

67 • $d(x,-1) < 2$ άρα $|x+1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+1 < 2$

$\Leftrightarrow -3 < x < 1$, $x \in (-3,1)$

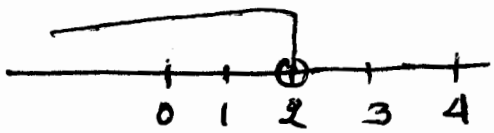
• $d(x,2) \geq 3$ ή $|x-2| \geq 3 \Leftrightarrow x-2 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 5$ ή $x-3 \leq -3$

$\Leftrightarrow x \leq 0$

• $-1 < x < 5 \Leftrightarrow -1-2 < x-2 < 5-2 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3$

$\Leftrightarrow |x-2| < 3$

68 $y < 2$



άρα $y-2 < 0$

$y-3 < 0$

$y-4 < 0$

άρα $A = -y+3-2(-y+2)-y+4 \Leftrightarrow A = -\cancel{y}+3+\cancel{2y}-\cancel{4}-\cancel{y}+\cancel{4}$

$\Leftrightarrow A = 3$

69 $\alpha+\beta > 0$ αφού $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ $\alpha-\beta > 0$

$A = \alpha-\beta+2(\alpha+\beta) = \alpha-\beta+2\alpha+2\beta = 3\alpha+\beta$

70 $A = |\underbrace{2\alpha-\beta}_{>0}| + |\underbrace{\beta-\alpha}_{<0}| + |\underbrace{3\gamma-4\beta}_{<0}|$

$\left.\begin{array}{l} \alpha > 0 \Leftrightarrow 2\alpha > 0 \\ \beta > 0 \Leftrightarrow 0 > -\beta \end{array}\right\} (+) \; 2\alpha+\beta > 0 \Leftrightarrow 2\alpha-\beta > -2\beta$

$2\alpha > 2\beta \Leftrightarrow 2\alpha-\beta > \beta > 0$, $\alpha > \beta \Leftrightarrow \beta-\alpha < 0$

$\beta > \gamma \Leftrightarrow 4\beta > 4\gamma \Leftrightarrow \gamma > 3\gamma-4\beta \Leftrightarrow \gamma > 0 > 3\gamma-4\beta$

$\gamma > 0$

Άρα $A = 2\alpha - \beta - \beta + \alpha - 3\gamma + 4\beta = 3\alpha + 2\beta - 3\gamma$

$$B = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

• Αν $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ τότε $B=1$

• Αν $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$ τότε $B=-1$

$\Gamma = |x+2| + x$

• Αν $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

$\Gamma = x+2+x \Leftrightarrow \Gamma = 2(x+1)$ άρα $\Gamma = \begin{cases} 2(x+1), & x \geq -2 \\ -2, & x < -2 \end{cases}$

• Αν $x+2<0 \Leftrightarrow x<-2$

$\Gamma = -\cancel{x}-2+\cancel{x} \Leftrightarrow \Gamma = -2$

$\Delta = \big|\underbrace{|\alpha|+|\beta|-|\alpha+\beta|}_{\geq 0}\big| - \big|\underbrace{|\alpha|-\alpha}_{\geq 0}\big| - \big|\underbrace{\beta+|\beta|}_{\geq 0}\big| + |\alpha+\beta| - \alpha + \beta$.

Γνωρίζουμε $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha|+|\beta|-|\alpha+\beta| \geq 0$

$|\alpha| \geq \alpha \Leftrightarrow |\alpha|-\alpha \geq 0$, $|\beta| \geq -\beta \Leftrightarrow |\beta|+\beta \geq 0$

άρα $\Delta = \cancel{|\alpha|}+\cancel{|\beta|}-\cancel{|\alpha+\beta|}-\cancel{|\alpha|}+\cancel{\alpha}-\cancel{\beta}-\cancel{|\beta|}+\cancel{|\alpha+\beta|}-\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}$

$\Leftrightarrow \Delta = 0$

$E = |x-1| + |x+1|$ $x=1$, $x=-1$

		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$

• Αν $x<-1$

$E = -x+1+x+1 \Leftrightarrow E = 2$

• Αν $-1 \leq x \leq 1$

$E = -x+1+x+1 \Leftrightarrow E = 2$

• Αν $x>1$

$E = x-1+x+1 \Leftrightarrow E = 2x$

$$E = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -1) \cup [-1, 1] \\ 2x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

71 $A = |x-1| - 2|3-x| + 3|2-x|, \quad 1 < x < 2$

$x=1, \quad x=3, \quad x=2$

Στο $1 < x < 2$ έχουμε:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
$2-x$	$+$	$+$	0 $-$	$-$	
$3-x$	$+$	$+$	$+$	0 $-$	

$A = x-1-2(3-x)+3(2-x)$

$\Leftrightarrow A = \cancel{x}-1-\cancel{6}+\cancel{2x}+\cancel{6}-\cancel{3x} \Leftrightarrow A=-1$

72 $A = \dfrac{|x|^7-|x|^8}{|x|^5-|x|^6} = \dfrac{|x|^7(1-\cancel{|x|})}{|x|^5(1-\cancel{|x|})} = |x|^2 = x^2$

$B = \dfrac{x^2-4}{x^2-5|x|+6} = \dfrac{|x|^2-4}{|x|^2-5|x|+6}$

$\Delta = 25-24=1$

$x_{1,2} = \dfrac{5\pm1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$= \dfrac{\cancel{(|x|-2)}(|x|+2)}{\cancel{(|x|-2)}(|x|-3)} = \dfrac{|x|+2}{|x|-3}$

$B = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-3}, & x>0 \\ \dfrac{x-2}{x+3}, & x \le 0 \end{cases}$

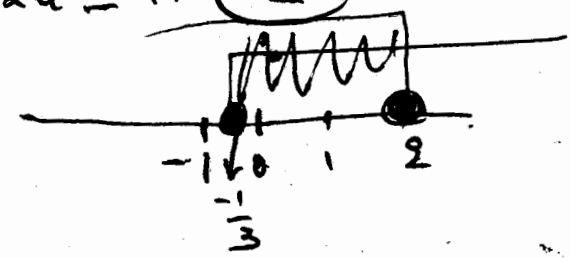
• Αν $x>0$ τότε $B = \dfrac{x+2}{x-3}$

• Αν $x \le 0$ τότε $B = \dfrac{-x+2}{-x-3} = \dfrac{x-2}{x+3}$

73 $|2a-4| = -2a+4$ και $|3a+1| = 3a+1$

$2a-4 \le 0$ και $3a+1 \ge 0$

$\Leftrightarrow 2a \le 4 \Leftrightarrow a \le 2$ και $3a \ge -1 \Leftrightarrow a \ge -\frac{1}{3}$



$a=0$ ή $a=1$ ή $a=2$

74 $|2a-3\beta| = 3\beta - 2a$ άρα $2a-3\beta \le 0$

$\Leftrightarrow 2a \le 3\beta \Leftrightarrow a \le \frac{3\beta}{2}$

75 $x\cdot y \neq 0$ και $x|y| = y|x| \Leftrightarrow x = \frac{y|x|}{|y|}$ και $|x| = \frac{x|y|}{y}$

Για να είναι ορθόγωνα οι x, y πρέπει $|x+y| = |x|+|y|$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y|x|}{|y|} + y\right| = \left|\frac{x|y|}{|y|}\right| + |y|$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y|x|}{y} + y\right|^2 = \left(\left|\frac{x|y|}{|y|}\right| + |y|\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{y^2}|x|^2}{\cancel{y^2}} + y^2 + 2\frac{\cancel{y}|x|}{\cancel{y}}\cdot y = \frac{x^2|y|^{\cancel{2}}}{|y|^{\cancel{2}}} + |y|^2 + 2\frac{x|y|}{|y|}\cdot|y|$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{2}|x|\cdot y = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{2}x\cdot|y| \Leftrightarrow |x|\cdot y = x|y|$$

ισχύει από υπόθεση

76 $\beta|a| - a|\beta| = \beta|\beta| - a|a| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\beta|a| - a|\beta|)^2 = (\beta|\beta| - a|a|)^2 \Leftrightarrow \beta^2|a|^2 + a^2|\beta|^2 - \cancel{2a\beta|a||\beta|}$$

$$= \beta^2|\beta|^2 + a^2|a|^2 - \cancel{2a\beta|a||\beta|}$$

$$\Leftrightarrow \beta^2a^2 + a^2\beta^2 = \beta^2\cdot\beta^2 + a^2\cdot a^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^4 + a^4 - 2a^2\beta^2 = 0 \Leftrightarrow (a^2-\beta^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \beta^2 \Leftrightarrow |a|^2 = |\beta|^2 \Leftrightarrow |a| = |\beta| \text{ ή } |a| = -|\beta|$$

$|a| = |\beta| \Leftrightarrow a = \beta$ ή $a = -\beta$

$|a| = -|\beta| \Leftrightarrow a = -\beta$ ή $a = -(-\beta) \Leftrightarrow a = \beta$

άρα $\boxed{|a| = |\beta|}$

77 $\left|\dfrac{a+4}{a+1}\right| = 2 \iff \dfrac{|a+4|}{|a+1|} = 2$

$\iff |a+4| = 2|a+1| \iff |a+4|^2 = 4|a+1|^2$

$\iff (a+4)^2 = 4(a+1)^2 \iff a^2 + \cancel{8a} + 16 = 4a^2 + \cancel{8a} + 4$

$\iff 3a^2 = 12 \iff a^2 = 4 \iff |a|^2 = 4$

$\iff \boxed{|a| = 2}$

78 $\dfrac{3x}{|x|} + \dfrac{1-x}{|x-1|} + 4\dfrac{x+2}{|x+2|} \le 8$

x		-2		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$

• Για $x < -2$

$\dfrac{3x}{-x} + \dfrac{1-x}{1-x} + 4\dfrac{x+2}{-(x+2)} \le 8 \iff -3+1-4 \le 8$

$\iff -6 \le 8$ ισχύει

• Για $-2 \le x \le 0$

$\dfrac{3x}{-x} + \dfrac{1-x}{1-x} + 4\dfrac{x+2}{x+2} \le 8 \iff -3+1+4 \le 8 \iff 2 \le 8$ ισχύει

• $\boxed{\text{Για } 0 < x \le 1}$

$\dfrac{3x}{x} + \dfrac{1-x}{1-x} + 4\dfrac{x+2}{x+2} \le 8 \iff 3+1+4 \le 8$ ισχύει

$\iff 8 \le 8$

• Για $x > 1$

$\dfrac{3x}{x} + \dfrac{1-x}{-(1-x)} + 4\dfrac{x+2}{x+2} \le 8 \iff 3-1+4 \le 8 \iff 6 \le 8$ ισχύει

79 $|x| \le 2$, $|y| \le 3$

(a) $|2x+3y| \le |2x| + |3y| = 2|x| + 3|y|$

$\iff |2x+3y| \le 2\cdot 2 + 3\cdot 3 \iff |2x+3y| \le 13$

(B) $|3x+y-1| \le |3x| + |y| + |-1| = 3|x| + |y| + 1$

$\iff |3x-y-1| \le 3\cdot 2 + 3 + 1 \iff |3x-y-1| \le 10$

80 $|x| \leq 2$

(α) $|x^2+2x| \leq 8$

$|x^2+2x| = |x(x+2)| = |x||x+2|$

$|x| \leq 2$ και $|x+2| \leq |x|+|2| = 2+2 \Leftrightarrow |x+2| \leq 4$

Άρα $|x^2+2x| \leq 2 \cdot 4 \Leftrightarrow |x^2+2x| \leq 8$

(β) $|x^2-16| \leq 36 \Leftrightarrow |(x-4)(x+4)| \leq 36$

$|x^2-16| = |x-4||x+4|$ (1)

$|x+(-4)| \leq |x|+|-4| \leq 2+4 \Leftrightarrow |x-4| \leq 6$

$|x+4| \leq |x|+|4| \leq 2+4 \Leftrightarrow |x+4| \leq 6$

Άρα η (1) γίνεται $|x^2-16| \leq 6 \cdot 6 \Leftrightarrow \boxed{|x^2-16| \leq 36}$

81 $\dfrac{|a|}{|a+b|} + \dfrac{|b|}{|a-b|} \geq 1$

$\Leftrightarrow |a||a-b| + |b||a+b| \geq |a+b||a-b|$

$\Leftrightarrow |a^2-ab| + |b^2+ab| \geq |(a+b)(a-b)|$

$\Leftrightarrow |a^2-b^2| \leq |a^2-ab| + |b^2+ab|$

$\Leftrightarrow \big||a|^2-|b|^2\big| \leq |a^2-ab| + |b^2+ab|$

Γνωρίζουμε ότι

$|a^2-\cancel{ab}+b^2+\cancel{ab}| \leq |a^2-ab| + |b^2+ab|$

$\Leftrightarrow |a^2+b^2| \leq |a^2-ab| + |b^2+ab|$ (1)

όμως $\big||a|^2-|b|^2\big| \leq |a^2+b^2|$ (2)

Από (1),(2) $\big||a|^2-|b|^2\big| \leq |a^2-ab| + |b^2+ab|$