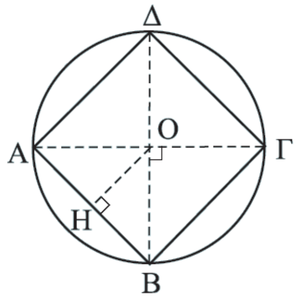
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11ο
ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ
11.3 ΕΓΓΡΑΦΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΟ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥΣ

ΘΕΩΡΙΑ

Θα ασχοληθούμε με την εγγραφή μερικών βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και θα υπολογίσουμε τα στοιχεία τους.

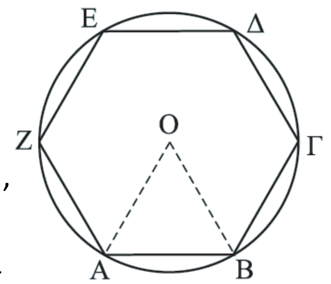
(Α) Τετράγωνο



Έστω ένας κύκλος (Ο,R). Αν φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ, θα είναι:
$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{O}}\Gamma = \Gamma\widehat{\mathrm{O}}\Delta = \Delta\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{A} = 90^o$, οπότε:
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{B}\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta\mathrm{A}}$ και επομένως το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε: $\lambda_4^2 = \mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Leftrightarrow \lambda_4 = R\sqrt{2}$.

Έχουμε ότι: $\alpha_4^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_4^2 = R^2 - \frac{\left(R\sqrt{2}\right)^2}{4} \Leftrightarrow \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

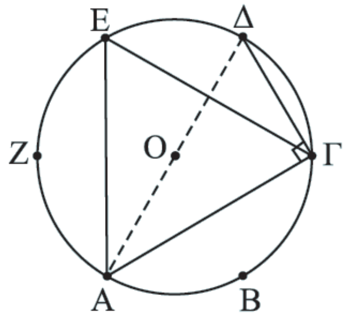
(Β) Κανονικό Εξάγωνο



Έστω κύκλος (Ο,R) και ΑΒ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (Ο,R)
Τότε $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = \omega_6 = 60^o$ και επειδή $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = R$ το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο. Άρα $\mathrm{AB} = \mathrm{OA} = R$, δηλαδή: $\lambda_6 = R$. Έτσι για την εγγραφή κανονικού εξαγώνου σε κύκλο, παίρνουμε πάνω στον κύκλο έξι διαδοχικά τόξα: $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}, \overset{\frown}{\mathrm{B}\Gamma}, \overset{\frown}{\Gamma\Delta}, \overset{\frown}{\Delta\mathrm{E}}, \overset{\frown}{\mathrm{EZ}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{ZA}}$ με αντίστοιχη χορδή R, το καθένα, οπότε το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο. Επειδή το $\lambda_6 = R$, έχουμε ότι:

$$\alpha_6^2 + \frac{\lambda_6^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow \alpha_6 = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

(Β) Ισόπλευρο Τρίγωνο



Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ διαιρούν τον κύκλο σε ίσα τόξα, τότε τα σημεία Α, Γ, Ε είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, αφού $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\mathrm{E}} = \overset{\frown}{\mathrm{EA}} = 120^o$.
Επειδή $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = 180^o$, η ΑΔ είναι διάμετρος και επομένως το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε:
$\Leftrightarrow \lambda_3 = R\sqrt{3}$. Επειδή το $\lambda_3 = R\sqrt{3}$, έχουμε ότι:

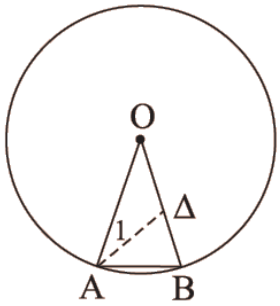
$$\alpha_3^2 + \frac{\lambda_3^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_3^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow \alpha_3^2 = \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow \alpha_3 = \frac{R}{2}.$$

	ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ	ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΕΞΑΓΩΝΙΟ	ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ
ΠΛΕΥΡΑ λ_ν	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$
ΑΠΟΣΤΗΜΑ α_ν	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε δοσμένο κύκλο να εγγραφεί κανονικό δεκάγωνο.

ΛΥΣΗ



Έστω $\mathrm{AB} = \lambda_{10}$ η πλευρά του κανονικού δεκαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον κύκλο (Ο,R). Η κεντρική γωνία είναι: $\mathrm{A\widehat{O}B} = \frac{360^o}{10} = 36^o$. Άρα η καθεμία από της γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου είναι: $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = 72^o$. Έτσι αν φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\mathrm{O\widehat{A}B}$ τα τρίγωνα ΔΟΑ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή, αφού είναι: $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = 36^o = \mathrm{A\widehat{O}B}$ και $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B} = \widehat{\mathrm{A}}_1 + \widehat{\mathrm{O}} = 36^o + 36^o = 72^o = \widehat{\mathrm{B}}$. Επομένως, $\mathrm{O\Delta} = \mathrm{A\Delta} = \mathrm{AB} = \lambda_{10}$ και $\mathrm{B\Delta} = R - \lambda_{10}$. Με εφαρμογή του θεωρήματος της διχοτόμου στο τρίγωνο ΟΑΒ προκύπτει ότι:
$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AO}} = \frac{\Delta\mathrm{B}}{\Delta\mathrm{O}} \Leftrightarrow \frac{\lambda_{10}}{R} = \frac{R - \lambda_{10}}{\lambda_{10}} \Leftrightarrow \lambda_{10}^2 = R\left(R - \lambda_{10}\right)$. Επειδή $\lambda_{10} = \mathrm{AB} > \Delta\mathrm{B} = R - \lambda_{10}$, αφού $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B} > \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta$, η τελευταία ισότητα εκφράζει ότι το λ_{10} είναι το μεγαλύτερο από τα τμήματα που προκύπτουν αν διαιρέσουμε την ακτίνα R σε μέσο και άκρο λόγο. Για την κατασκευή του κανονικού δεκαγώνου του εγγεγραμμένου σε κύκλο, διαιρέσουμε την ακτίνα του κύκλου σε μέσο και άκρο λόγο και στη συνέχεια ορίζουμε τα διαδοχικά τόξα: $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}, \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}, \ldots,$ που έχουν το καθένα χορδή ίση με το μεγαλύτερο τμήμα στα οποία χωρίζεται η ακτίνα με τη διαίρεση της σε μέσο και άκρο λόγο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να αποδειχθεί ότι: $\lambda_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ και να υπολογίσετε το α_{10}.

ΛΥΣΗ

Από το παράδειγμα 1 έχουμε ότι: $\lambda_{10}^2 = R\left(R - \lambda_{10}\right) \Leftrightarrow \lambda_{10}^2 = R^2 - R\lambda_{10} \Leftrightarrow$ $\lambda_{10}^2 + R\cdot\lambda_{10} - R^2 = 0$. Έχουμε $\alpha = 1$, $\beta = R$ και $\gamma = -R^2$. Επομένως $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = R^2 + 4R^2 = 5R^2$. Άρα έχουμε ότι: $\lambda_{10} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$.

Επειδή $\lambda_{10} > 0$, δεκτή είναι η λύση: $\lambda_{10} = \frac{-R + R\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \lambda_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

Ισχύει ότι: $\lambda_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$, άρα έχουμε ότι:

$$\alpha_{10}^2 + \frac{\lambda_{10}^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_{10}^2 = R^2 - \frac{\left[\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right]^2}{4} \Leftrightarrow \alpha_{10}^2 = R^2 - \frac{R^2\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{16} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{10}^2 = \frac{16R^2 - R^2\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{16} \Leftrightarrow \alpha_{10}^2 = \frac{16R^2 - R^2\left(6 - 2\sqrt{5}\right)^2}{16} \Leftrightarrow \alpha_{10}^2 = \frac{16R^2 - 6R^2 + 2\sqrt{5}R^2}{16} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{10}^2 = \frac{10R^2 + 2\sqrt{5}R^2}{16} \Leftrightarrow \alpha_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

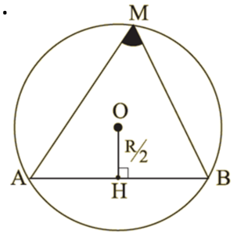
Αν Α, Β, Γ, Δ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο, R), ώστε: $\mathrm{AB} = R\sqrt{2}$, $\mathrm{B\Gamma} = \lambda_{12}$ και $\Gamma\Delta = R$, να εξηγήσετε γιατί η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

Άσκηση 2

Αν Α, Β, Γ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο, R), ώστε: $\widehat{\mathrm{AB}} = 120^o$ και $\widehat{\mathrm{B\Gamma}} = 60^o$, η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $\left(3+\sqrt{3}\right)R$.

Άσκηση 3

Στο διπλανό σχήμα η γωνία Μ είναι:
(α) 30^o, (β) 45^o, (γ) 50^o, (δ) 60^o, (ε) 75^o.



Άσκηση 4

Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου, ενός τετραγώνου και ενός κανονικού εξαγώνου, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (Ο, R).

Άσκηση 5

Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα $R = 10cm$ και απόστημα $\alpha_\nu = 5\sqrt{3}cm$. Να βρεθεί η πλευρά του λ_ν και το εμβαδόν του E_ν.

Άσκηση 6

Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα $R = 8cm$ και πλευρά $\lambda_\nu = 8\sqrt{2}cm$. Να βρεθεί το απόστημα του α_ν και το εμβαδόν του E_ν.

Άσκηση 7

Σε κύκλο (Ο, R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα: $\widehat{\mathrm{AB}} = 60^o$, $\widehat{\mathrm{B\Gamma}} = 90^o$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 120^o$.
Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του R οι πλευρές και το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Άσκηση 8

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 4cm$. Μα βρείτε:
(α) Την πλευρά του λ_3, (β) Το απόστημά του α_3, (γ) Το εμβαδόν του E_3.

Άσκηση 9

Η γωνία φ_ν ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίση με 120^o, ενώ η πλευρά του είναι $\lambda_\nu = 12cm$.
(α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου αυτού είναι $\nu = 6$,
(β) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου και το απόστημα α_ν του πολυγώνου,
(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του πολυγώνου.

Άσκηση 10

Ένα κανονικό ν-γωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας $R = \sqrt{8}cm$. Αν ισχύει ότι $\alpha_\nu = 2cm$, να βρείτε:
(α) Την πλευρά λ_ν, (β) Το πλήθος ν των πλευρών, (γ) Το εμβαδόν του.

Άσκηση 11

Ένα κανονικό ν-γωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου ακτίνας $R = 2cm$ και ισχύει ότι: $\lambda_\nu - \alpha_\nu = \sqrt{2}cm$. Να βρείτε:

(α) Την πλευρά λ_ν και το απόστημα α_ν, (β) Το πλήθος ν των πλευρών.

Άσκηση 12

Ένα κανονικό ν-γωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R), για το οποίο ισχύει ότι: $\frac{R+4}{4}=\frac{\lambda_\nu}{2\sqrt{3}}=\frac{\alpha_\nu+4}{3}$. Να βρείτε:

(α) Την ακτίνα R, την πλευρά λ_ν και το απόστημα α_ν, (β) Το πλήθος ν των πλευρών, (γ) Το εμβαδόν του πολυγώνου.

Άσκηση 13

Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου είναι 8 ορθές και το εμβαδόν του $6\sqrt{3}cm^2$. Να βρεθεί η ακτίνα του.

Άσκηση 14

Σε κύκλο (O,R) και εκατέρωθεν του κέντρου του, θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές του AB και ΓΔ, ώστε $\mathrm{AB}=R$ και $\Gamma\Delta=R\sqrt{3}$. Να υπολογισθούν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΓ και ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ, το ύψος του και το εμβαδόν του, ως συνάρτηση του R.

Άσκηση 15

Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του R η πλευρά λ_{12} και το απόστημα α_{12} ενός κανονικού 12-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R).

Άσκηση 16

Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός κανονικού δωδεκαγώνου, χωρίς να υπολογίσετε προηγουμένως την πλευρά και το απόστημά του.

Άσκηση 17

Ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΔΓ τέμνονται στο Μ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΕΖ συναρτήσει του R.

Άσκηση 18

Θεωρούμε δύο κανονικά εξάγωνα, από τα οποία το ένα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και το άλλο περιγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο και έστω $\mathrm{E}_6{}',\mathrm{E}_6$ τα εμβαδά τους αντίστοιχα. Να βρείτε τον λόγο $\frac{\mathrm{E}_6}{\mathrm{E}_6{}'}$.

Άσκηση 19

Έστω ΑΒΓ ένα ισόπλευρο τρίγωνο περιγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και ΔΕΖ ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. Να βρείτε τον λόγο $\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\Delta\mathrm{EZ})}$.

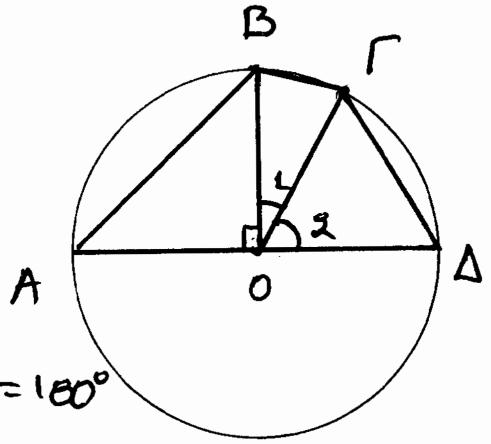
Άσκηση 20

Αν ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο (O,R) και $\mathrm{E}_3,\mathrm{E}_6$ είναι τα εμβαδά τους αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E}_6=2\mathrm{E}_3$.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 11.3

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

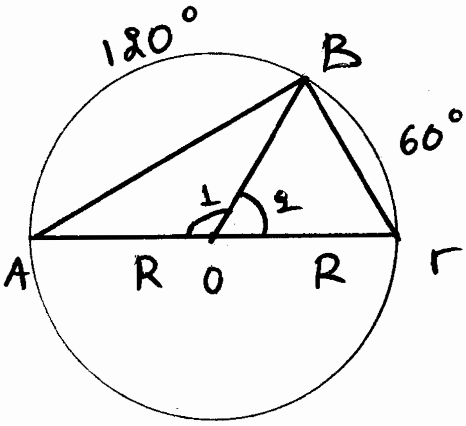
Άσκηση 1



- $AB = R\sqrt{2}$. Άρα $A\hat{O}B = \omega_4 = 90^\circ$
- $B\Gamma = \lambda_{12}$, άρα $\hat{O}_1 = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$
- $\Gamma\Delta = R = \lambda_6$ άρα $A\hat{O}\Delta = 90^\circ + 30^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

Άρα η $A\Delta$ είναι διάμετρος

Άσκηση 2



$\hat{O}_1 = 120^\circ = \omega_3$ άρα $AB = \lambda_3 = R\sqrt{3}$

Το $O\hat{B}\Gamma$ είναι ισόπλευρο άρα $B\Gamma = R$

$\Pi_{AB\Gamma} = AB + B\Gamma + \Gamma A$

$= R\sqrt{3} + R + 2R = 3R + R\sqrt{3}$

$= (3+\sqrt{3})\cdot R$

Άσκηση 3

Έχουμε $OH = \frac{R}{2} \Leftrightarrow OH = a_3$ άρα $AB = \lambda_3$

και $\overset{\frown}{AB} = \omega_3 = 120^\circ$

Η $\hat{M}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$

άρα $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = 60^\circ$

Άρα σωστό το (δ)

Άσκηση 4

Ισόπλευρο τρίγωνο

- Είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ και $a_3 = \frac{R}{2}$, οπότε:

$$E_3 = \frac{1}{2} P_3 \cdot a_3 = \frac{1}{2} 3 \cdot \lambda_3 \cdot a_3 = \frac{3}{2} R\sqrt{3} \frac{R}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

Τετράγωνο

$\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

$$E_4 = \frac{1}{2} 4 \cdot \lambda_4 \cdot a_4 = 2R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} = 2R^2$$

Εξάγωνο

$\lambda_6 = R$ και $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, οπότε:

$$E_6 = \frac{1}{2} 6 \cdot \lambda_6 \cdot a_6 = 3R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot R^2$$

Άσκηση 5

$R = 10cm$, $a_\nu = 5\sqrt{3}\ cm$

$$a_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow 5^2 \cdot 3 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_\nu^2}{4} = 100 - 75 \Leftrightarrow \frac{\lambda_\nu^2}{4} = 25 \Leftrightarrow \lambda_\nu = 10\ cm$$

Έχουμε $\lambda_\nu = R = 10cm$ άρα κανονικό εξάγωνο

$$E_6 = \frac{1}{2} 6 \cdot \lambda_6 \cdot a_6 = 3 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = 150\sqrt{3}\ cm^2$$

Άσκηση 6

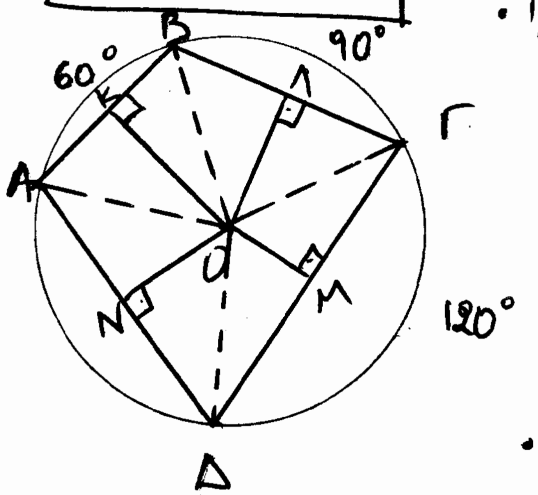
$R = 8cm$ και $\lambda_\nu = 8\sqrt{2}$. Παρατηρούμε ότι $\lambda_\nu = R\sqrt{2}$, άρα τετράγωνο

$$\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_\nu^2 + \frac{64\cdot 2}{4} = 64$$

$$\alpha_\nu^2 = 64 - 32 \Leftrightarrow \alpha_\nu^2 = 32 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_\nu = 4\sqrt{2}}$$

$$E_4 = \frac{1}{2}\,4\cdot\lambda_4\cdot\alpha_4 = 2\cdot 8\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} = 128\,cm^2$$

Άσκηση 7



- Έχουμε: $\overset{\frown}{AB} = 60°$ άρα $AB = \lambda_6 = R$

  $OK = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$
- Ισχύει: $\overset{\frown}{B\Gamma} = 90°$ άρα $B\Gamma = \lambda_4 = R\sqrt{2}$

  και $O\Lambda = \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$
- $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120°$ άρα $\Gamma\Delta = \lambda_3 = R\sqrt{3}$

  και $\alpha_3 = OM = \frac{R}{2}$

Το $\overset{\frown}{\Delta A} = 360° - 60° - 90° - 120° = 90°$

Άρα $A\Delta = \lambda_4 = R\sqrt{2}$ και $ON = \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

$$(AB\Gamma\Delta) = (OAB) + (OB\Gamma) + (O\Gamma\Delta) + (OA\Delta)$$

$$= \frac{1}{2}AB\cdot OK + \frac{1}{2}B\Gamma\cdot O\Lambda + \frac{1}{2}\Gamma\Delta\cdot OM + \frac{1}{2}A\Delta\cdot ON$$

$$= \frac{1}{2}R\,\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}R\sqrt{2}\,\frac{R\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}R\sqrt{3}\,\frac{R}{2} + \frac{1}{2}R\sqrt{2}\,\frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{R^2}{2} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{R^2}{2} = R^2 + \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{R^2}{2}(2+\sqrt{3})$$

Άσκηση 8

$R = 4cm$

(α) $\lambda_3 = 4\sqrt{3}$ cm (β) $\alpha_3 = \frac{R}{2} = 2$ cm

(γ) $E_3 = \frac{1}{2} 3\lambda_3 \cdot \alpha_3 = \frac{1}{\cancel{2}} 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cancel{2} = 12\sqrt{3}$ cm^2

Άσκηση 9

(α) $\varphi_\nu = 120° \Leftrightarrow 180° - \frac{360°}{\nu} = 120° \Leftrightarrow \frac{360°}{\nu} = 60°$

$\Leftrightarrow \boxed{\nu = 6}$

(β) $\lambda_6 = R \Leftrightarrow R = 12$ cm

$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm

(γ) $E_6 = \frac{1}{2} 6 \cdot \lambda_6 \cdot \alpha_6 = \frac{1}{2} 6 \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 216\sqrt{3}$ cm^2

Άσκηση 10

(α) $R = \sqrt{8}$ cm. Αν $\alpha_\nu = 2$ cm

$\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow 4 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = 8 \Leftrightarrow \lambda_\nu^2 = 16 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_\nu = 4 \text{ cm}}$

(β) $\lambda_\nu = R\sqrt{2} = \sqrt{8}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$

άρα $\nu=4$

(γ) $E_4 = \frac{1}{2}\,4\cdot\lambda_4\cdot\alpha_4 = 2\cdot 4\cdot 2 = 16\,cm^2$

$\boxed{\text{Άσκηση 11}}$

$R = 2\,cm$ και $\lambda_\nu - \alpha_\nu = \sqrt{2}\,cm$

(α) $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow (\lambda_\nu - \sqrt{2})^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = 4$

$\Leftrightarrow \lambda_\nu^2 - 2\sqrt{2}\lambda_\nu + 2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = 4$

$\Leftrightarrow 4\lambda_\nu^2 - 8\sqrt{2}\lambda_\nu + 8 + \lambda_\nu^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow 5\lambda_\nu^2 - 8\sqrt{2}\lambda_\nu - 8 = 0$

$\Delta = 64\cdot 2 - 4\cdot 5(-8) = 64\cdot 2 + 160 = 288$

$$\lambda_\nu = \frac{8\sqrt{2} \pm \sqrt{16}\cdot\sqrt{\ }}{+2\cdot 5} = \frac{8\sqrt{2} \pm 4\cdot 3\sqrt{2}}{10}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} \pm 6\sqrt{2}}{5} \nearrow \frac{4\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{5} = 2\sqrt{2}$$

$$\searrow \frac{4\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{5} = \frac{-2\sqrt{2}}{5}$$

άρα $\boxed{\lambda_\nu = 2\sqrt{2}}$

$\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_\nu^2 + \frac{8}{4} = 4 \Leftrightarrow \alpha_\nu = \sqrt{2}\,cm$

(β) Ισχύει $\lambda_\nu = 2\sqrt{2} = R\sqrt{2} = \lambda_4$ άρα $\nu = 4$

Άσκηση 12

(α) $\dfrac{R+4}{4} = \dfrac{\lambda_\nu}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a_\nu+4}{3} = K$

$\Leftrightarrow R = 4K-4,\ \lambda_\nu = 2\sqrt{3}\cdot K\ ,\ a_\nu = 3K-4$

Άρα $a_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow (3K-4)^2 + \dfrac{(2\sqrt{3}\cdot K)^2}{4} = (4K-4)^2$

$\Leftrightarrow 9K^2 - 24K + \cancel{16} + 3K^2 = 16K^2 - 32K + \cancel{16}$

$\Leftrightarrow 4K^2 - 8K = 0 \Leftrightarrow 4K(K-2) = 0 \Leftrightarrow K=0 \text{ ή } K=2$

$K=0$ απορρ

Για $K=2$ έχουμε: $R = 4,\ \lambda_\nu = 4\sqrt{3}\ ,\ a_\nu = 2$

(β) $\lambda_\nu = 4\sqrt{3} = R\sqrt{3} = \lambda_3$ άρα $\nu = 3$

(γ) $E_3 = \dfrac{1}{2}3\lambda_3\cdot a_3 = \dfrac{3}{\cancel{2}}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\cancel{2} = 12\sqrt{3}$ τ.μ

Άσκηση 13

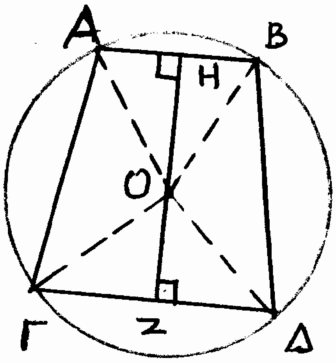
Το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου είναι:

$(2\nu-4)$ ορθές $=$ 8 ορθές $\Leftrightarrow 2\nu = 12 \Leftrightarrow \boxed{\nu=6}$

$E_6 = \dfrac{1}{2}\cancel{6}\lambda_6\cdot a_6 = \cancel{6}\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}R\dfrac{R\cancel{\sqrt{3}}}{2} = \cancel{\sqrt{3}} \Leftrightarrow R^2 = 4$

$\Leftrightarrow \boxed{R=2}$

Άσκηση 14



Ισχύει $AB \parallel \Gamma\Delta$ άρα έχουμε:

$\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Delta} \iff A\Gamma = B\Delta$

Άρα το $AB\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο

Ισχύει: $AB = R = \lambda_6$, άρα $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$

$\Gamma\Delta = R\sqrt{3} = \lambda_3$, άρα $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120^\circ$

$\overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{B\Delta} = 360^\circ - 60^\circ - 120^\circ \iff 2\overset{\frown}{A\Gamma} = 180^\circ \iff \overset{\frown}{A\Gamma} = 90^\circ$

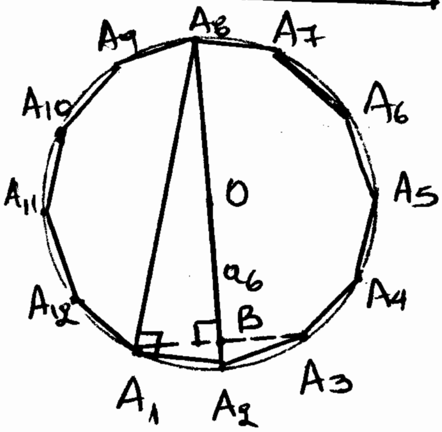
Έχουμε: $B\Delta = A\Gamma = \lambda_4 = R\sqrt{2}$

$ZH = \alpha_3 + \alpha_6 = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}(1+\sqrt{3})$

Επομένως: $(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB+\Gamma\Delta)\cdot HZ =$

$= \frac{1}{2}(R+R\sqrt{3})\frac{R}{2}(1+\sqrt{3}) = \frac{R^2}{4}(1+\sqrt{3})^2$ τ.μ.

Άσκηση 15



Έστω $A_1A_2 \ldots A_{12}$ κανονικό 12-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Η χορδή A_2A_8 είναι διάμετρος, άρα $A_8\hat{A}_1A_2 = 90^\circ$, οπότε θα έχουμε:

$(A_1A_2)^2 = A_2A_8 \cdot BA_2$ (1)

Ισχύει: $A_1A_2 = \lambda_{12}$, $A_2A_8 = 2R$ και $BA_2 = OA_2 - OB = R - \alpha_6$

$= R - \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Άρα η (1) γίνεται: $\lambda_{12}^2 = 2R\left(R - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right) \iff$

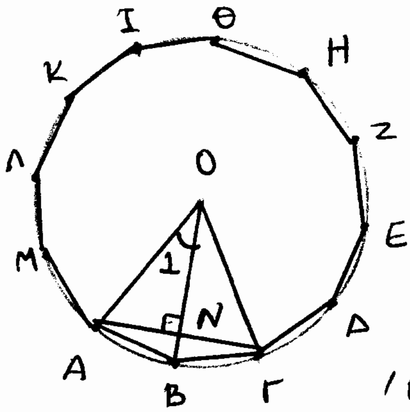
$$\lambda_{12}^2 = R^2(2-\sqrt{3}) \Leftrightarrow \lambda_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Άρα $a_{12}^2 + \dfrac{\lambda_{12}^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow a_{12}^2 = R^2 - \dfrac{R^2(2-\sqrt{3})}{4}$

$$\Leftrightarrow a_{12}^2 = \frac{4R^2 - 2R^2 + \sqrt{3}R^2}{4} \Leftrightarrow a_{12}^2 = \frac{2R^2+\sqrt{3}R^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow a_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Άσκηση 16

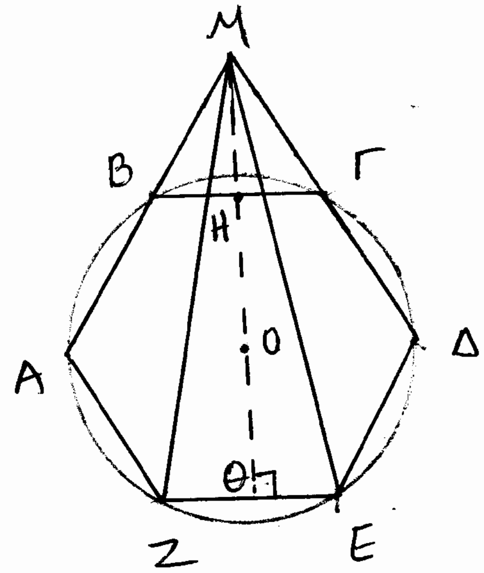


Έχουμε: $\hat{O}_1 = \omega_{12} = \dfrac{360°}{12} = 30°$

Άρα $(OAB) = \dfrac{1}{2} OA \cdot OB\ \eta\mu 30° = \dfrac{1}{2} R \cdot R \dfrac{1}{2} = \dfrac{R^2}{4}$

Έτσι: $E_{12} = 12(OAB) = 12\dfrac{R^2}{4} = 3R^2$

Άσκηση 17



Έχουμε $M\hat{B}\Gamma = M\hat{\Gamma}B = 60°$

Άρα το $M\hat{B}\Gamma$ είναι ισόπλευρο άρα

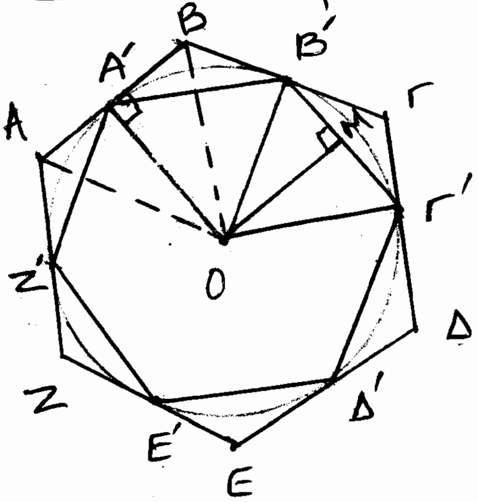
$B\Gamma = \lambda_6 = R$ και $MH = \dfrac{B\Gamma\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$M\Theta = MH + HO + O\Theta = MH + 2a_6 =$

$= \dfrac{R\sqrt{3}}{2} + 2\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R\sqrt{3}}{2}$

Άρα $(MEZ) = \dfrac{1}{2} ZE \cdot M\Theta = \dfrac{1}{2} R \dfrac{3R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ τ.μ.

Άσκηση 18

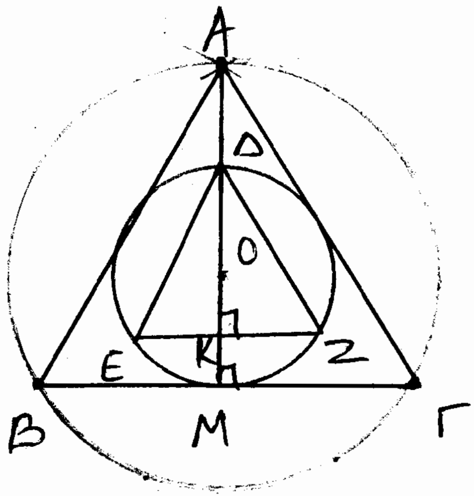


$$\frac{E_6}{E_6'} = \frac{6\,(OAB)}{6\,(OB'\Gamma')} = \frac{(OAB)}{(OB'\Gamma')}$$

$$= \left(\frac{OA'}{OM}\right)^2 = \left(\frac{R}{a_6'}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{R}{\frac{R\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2\cancel{R}}{\cancel{R}\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

Άσκηση 19



Το $OM = R$. Επίσης το OM είναι το απόστημα του $AB\Gamma$ και το OA η ακτίνα του άρα $OM = \frac{OA}{2}$

$\Leftrightarrow OA = 2R$

$B\Gamma = OA\sqrt{3} \Leftrightarrow B\Gamma = 2R\sqrt{3}$

Επομένως έχουμε:

$(AB\Gamma) = \frac{B\Gamma^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow (AB\Gamma) = 3R^2\sqrt{3}$

$\Delta E = R\sqrt{3}$. Οπότε $(\Delta EZ) = \frac{\Delta E^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow (\Delta EZ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

Άρα $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}} = 4$

Άσκηση 20

Ισχύει ότι: $E_6 = \frac{1}{2} 6 \cdot \lambda_6 \cdot \alpha_6 \Leftrightarrow E_6 = 3 \cdot R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow E_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 \quad (1)$

$E_3 = \frac{1}{2} 3\lambda_3 \alpha_3 = \frac{1}{2} 3 \cdot R\sqrt{3} \frac{R}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \quad (2)$

(1) : (2) έχουμε $\frac{E_6}{E_3} = \frac{\frac{\cancel{3\sqrt{3}}}{2} \cdot \cancel{R^2}}{\frac{\cancel{3\sqrt{3}}}{4} \cdot \cancel{R^2}} = \frac{4}{2} = 2$

$\Leftrightarrow \boxed{E_6 = 2E_3}$