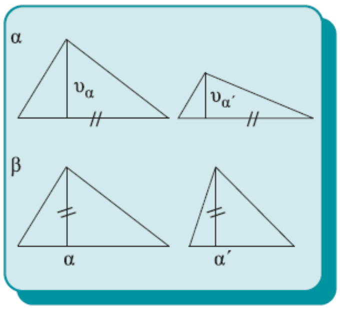
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10^{ο}
ΕΜΒΑΔΑ
10.5 ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ - ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ
10.6 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ ΣΕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΤΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ 1

Αν θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με εμβαδά Ε και Ε΄ αντίστοιχα.

Τότε είναι: $\mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\upsilon_{\alpha}$ και $\mathrm{E}'=\frac{1}{2}\alpha'\upsilon_{\alpha'}$, επομένως:

$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}=\frac{\alpha\upsilon_{\alpha}}{\alpha'\upsilon_{\alpha'}}$. Από την ισότητα αυτή έχουμε:



Σχήμα 1

- Αν $\alpha=\alpha'$, τότε $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}=\frac{\upsilon_{\alpha}}{\upsilon_{\alpha'}}$ (Σχ.1α).
- Αν $\upsilon_{\alpha}=\upsilon_{\alpha'}$, τότε $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}=\frac{\alpha}{\alpha'}$ (Σχ.1β).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

(α) Αν δύο τρίγωνα έχουν **ίσες βάσεις**, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των αντίστοιχων υψών τους.

(β) Αν δύο τρίγωνα έχουν **ίσα ύψη**, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

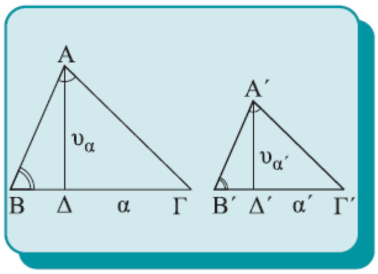
ΘΕΩΡΙΑ 2 (Θεώρημα Ι)

Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Απόδειξη

Έστω δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ (Σχήμα 2) με $\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\mathrm{A}}'$ και $\widehat{\mathrm{B}}=\widehat{\mathrm{B}}'$. Τότε $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\upsilon_{\alpha}}{\upsilon_{\alpha'}}=\lambda$ (1), όπου λ ο λόγος ομοιότητας. Ισχύει ότι: $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}=\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\upsilon_{\alpha}}{\upsilon_{\alpha'}}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}=\lambda^{2}$.



Σχήμα 2

ΘΕΩΡΙΑ 2 (Θεώρημα ΙΙ)

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.

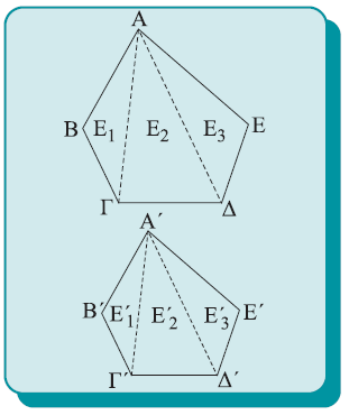
Απόδειξη

Θεωρούμε δύο όμοια πολύγωνα, έστω ΑΒΓΔΕ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (Σχήμα 3) με λόγο ομοιότητας:

$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B'\Gamma'}}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{\Delta\mathrm{E}}{\Delta'\mathrm{E}'}=\lambda$ (1).

Φέρουμε τις διαγωνίους των πολυγώνων από τις κορυφές Α και Α΄, οπότε αυτά χωρίζονται σε ισάριθμα τρίγωνα όμοια μεταξύ τους.

Αν $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_3$ και $\mathrm{E}_1',\mathrm{E}_2',\mathrm{E}_3'$ είναι τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα και τη σχέση (1), θα έχουμε:



Σχήμα 3

$$\frac{E_1}{E'_1}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\lambda^2,\ \frac{E_2}{E'_2}=\left(\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}\right)^2=\lambda^2 \text{ και } \frac{E_3}{E'_3}=\left(\frac{\Delta E}{\Delta' E'}\right)^2=\lambda^2, \text{ οπότε:}$$

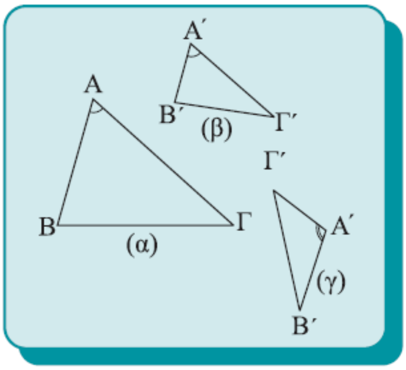
$$\lambda^2=\frac{E_1}{E'_1}=\frac{E_2}{E'_2}=\frac{E_3}{E'_3}=\frac{E_1+E_2+E_3}{E'_1+E'_2+E'_3}=\frac{(AB\Gamma\Delta E)}{(A'B'\Gamma'\Delta'E')}.$$

<u>ΘΕΩΡΙΑ 3 (Θεώρημα ΙΙΙ)</u>

Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δυο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

<u>Απόδειξη</u>

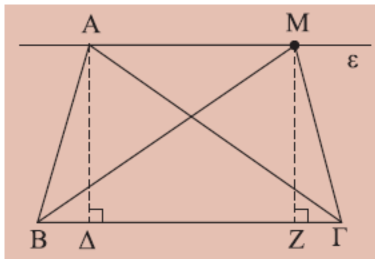
Θεωρούμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με $\widehat{A}=\widehat{A}'$ ή $\widehat{A}+\widehat{A}'=180^o$ (Σχήμα 4). Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει: $\eta\mu A=\eta\mu A'$, οπότε από τις ισότητες $E=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma\eta\mu A$ και $E'=\frac{1}{2}\beta'\cdot\gamma'\eta\mu A'$, με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι: $\frac{E}{E'}=\frac{\beta\cdot\gamma}{\beta'\cdot\gamma'}$.



Σχήμα 4

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Αν Μ σημείο της ε, να αποδείξετε ότι: $(MB\Gamma)=(AB\Gamma)$.



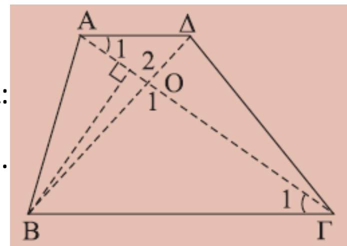
<u>ΛΥΣΗ</u>

Φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΜΖ των τριγώνων ΑΒΓ και ΜΒΓ αντίστοιχα. Επειδή η ε είναι παράλληλα προς τη ΒΓ, προκύπτει ότι: $A\Delta=MZ$ και επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΒΓ είναι ισεμβαδικά, επειδή έχουν κοινή βάση ΒΓ και ίσα ύψη.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u>

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΒΓ και ΑΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να αποδείξετε ότι:

(i) $(OAB)=(O\Gamma\Delta)$, (ii) $\frac{(AO\Delta)}{(OB\Gamma)}=\frac{A\Delta^2}{B\Gamma^2}$, (iii) $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)}=\frac{A\Delta}{B\Gamma}$.



<u>ΛΥΣΗ</u>

(i) Ισχύει ότι: $(OAB)=(BA\Delta)-(OA\Delta)=(A\Gamma\Delta)-(OA\Delta)=(O\Gamma\Delta)$.

και επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΒΓ είναι ισεμβαδικά, επειδή έχουν κοινή βάση ΒΓ και ίσα ύψη.

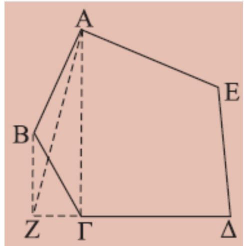
(ii) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι όμοια, διότι: $\widehat{O}_1=\widehat{O}_2$ και $\hat{\Gamma}_1=\widehat{A}_1$ με λόγο ομοιότητας $\frac{A\Delta}{B\Gamma}$ και επομένως $\frac{(AO\Delta)}{(OB\Gamma)}=\frac{A\Delta^2}{B\Gamma^2}$.

(iii) Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ έχουν κοινή κορυφή Β και κοινό το ύψος από αυτήν, επομένως $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)}=\frac{OA}{O\Gamma}$. Από την ομοιότητα όμως των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουμε ότι: $\frac{OA}{O\Gamma}=\frac{A\Delta}{B\Gamma}$, οπότε: $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)}=\frac{A\Delta}{B\Gamma}$.

ΘΕΩΡΙΑ 4 (Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό τους)

Σε πολλές περιπτώσεις, για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος επιδιώκουμε τον μετασχηματισμό σε ένα ισοδύναμο τετράγωνο.
Η κατασκευή ενός τετραγώνου ισοδύναμου με ένα πολύγωνο λέγεται **τετραγωνισμός** αυτού. Η λύση των επόμενων δύο προβλημάτων αποτελεί τη μέθοδο κατασκευής του ισοδύναμου τετραγώνου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

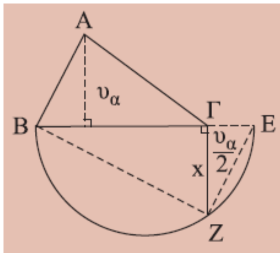


Να μετασχηματισθεί πολύγωνο σε άλλο ισοδύναμο του με μια πλευρά λιγότερη.

ΛΥΣΗ

Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, π. χ ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ. Από την κορυφή Α φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ, που αφήνει προς το ένα μέρος της μόνο μια κορυφή, τη Β. Από το Β φέρουμε την παράλληλο προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την ευθεία ΔΓ στο Ζ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΓ έχουν κοινή βάση ΑΓ και τα αντίστοιχα προς αυτή ύψη ίσα, αφού ΒΖ // ΑΓ.
Επομένως, $(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{AZ\Gamma})$, οπότε:
$\left(\mathrm{AB\Gamma\Delta E}\right) = \left(\mathrm{AB\Gamma}\right) + \left(\mathrm{A\Gamma\Delta E}\right) = \left(\mathrm{AZ\Gamma}\right) + \left(\mathrm{A\Gamma\Delta E}\right) = (\mathrm{AZ\Delta E})$, δηλαδή το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισοδύναμο με το τετράπλευρο ΑΖΔΕ και επομένως το αρχικό μας πολύγωνο είναι ισοδύναμο με πολύγωνο που έχει μια πλευρά λιγότερη. Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία στο τετράπλευρο ΑΖΔΕ, θα μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο. Έτσι, το αρχικό μας πολύγωνο μπορεί να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4



Να μετασχηματισθεί τρίγωνο σε ισοδύναμο τετράγωνο

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $\mathrm{\Gamma E} = \frac{\upsilon_\alpha}{2}$ και γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΕ. Φέρουμε την κάθετο της ΒΓ στο Γ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο σε σημείο Ζ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΕ έχουμε: $\mathrm{\Gamma Z}^2 = \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{\Gamma E} = \alpha \cdot \frac{\upsilon_\alpha}{2} = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = (\mathrm{AB\Gamma})$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το τμήμα ΓΖ είναι η πλευρά x του ζητούμενου τετραγώνου, που είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε κυρτό πολύγωνο τετραγωνίζεται, αφού με πεπερασμένου πλήθους επαναλήψεις της διαδικασίας του παραδείγματος 1 και τέλος της διαδικασίας του παραδείγματος 2 κατασκευάζεται τετράγωνο ισοδύναμο προς το αρχικό πολύγωνο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$ και $\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'})} = \frac{3}{2}$. Τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\beta'}$ είναι:

(α) $\frac{2}{5}$, (β) $\frac{3}{4}$, (γ) $\frac{3}{2}$, (δ) $\frac{9}{4}$, (ε) $\frac{4}{9}$.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 2

Δύο ρόμβοι ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχουν $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}'}$ και $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{4}{5}$.

Να υπολογισθεί ο λόγος $\frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'})}$.

Άσκηση 3

Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι ισοδύναμο με ένα τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ που έχει $\mathrm{A'B'} \cdot \mathrm{A'\Gamma'} = 36$. Αν είναι $\mathrm{A} + \mathrm{A'} = 180^o$, ποιο είναι το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς;

Άσκηση 4

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\alpha = \alpha'$ και $\upsilon_\alpha = \frac{3}{2}\upsilon_{\alpha'}$. Αν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι $30m^2$, να βρείτε το εμβαδόν του Α΄Β΄Γ΄.

Άσκηση 5

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με εμβαδόν $20m^2$. Αν Μ σημείο στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε $\mathrm{AB} = 2\mathrm{BM}$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ.

Άσκηση 6

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ζ των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΑ αντίστοιχα, προς το Α, ώστε $\mathrm{A\Delta} = \frac{2}{3}\mathrm{AB}$ και $\mathrm{AZ} = \frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}$. Αν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι $30m^2$, να βρείτε το εμβαδόν του ΑΔΖ.

Άσκηση 7

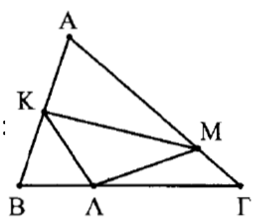
Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν $75m^2$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ και Μ σημείο του ΑΔ τέτοιο, ώστε $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{M\Delta}} = \frac{3}{2}$. Από το Μ φέρουμε παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΕΖΓ.

Άσκηση 8

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}'}$ και $\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{B}'} = 180^0$.

Να αποδείξετε ότι: $\alpha\beta' = \alpha'\beta$.

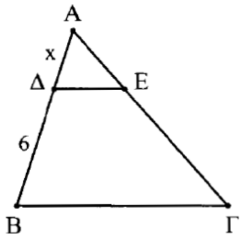
Άσκηση 9



Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδόν 24 τ.μ. Στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Κ, Λ, Μ έτσι, ώστε: $\mathrm{AK} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$, $\mathrm{B\Lambda} = \frac{1}{3}\mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{\Gamma M} = \frac{1}{4}\mathrm{A\Gamma}$.

Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΜ, ΒΚΛ, ΓΛΜ και ΚΛΜ.

<u>Άσκηση 10</u>



Στο διπλανό σχήμα: $ΒΔ = 6$, $ΔΕ//ΒΓ$ και $(ΔΕΓΒ) = 8(ΑΔΕ)$. Να βρείτε:

(α) Τον λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$,

(β) Το μήκος x του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ.

<u>Άσκηση 11</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε $ΓΔ = \frac{1}{3}ΑΓ$.

Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $ΓΕ = \frac{2}{7}ΒΓ$. Αν ισχύει ότι $(ΑΒΔ) = 14 τ.μ.$, να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων: (α) ΑΒΓ, (β) ΑΓΕ.

<u>Άσκηση 12</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε: $ΑΔ = λΑΒ$ και $ΑΕ = \left(λ - \frac{1}{6}\right)ΑΓ$ με $\frac{1}{6} < λ < 1$. Αν ισχύει ότι: $(ΑΒΓ) = 6(ΑΔΕ)$, να βρείτε τον λ.

<u>Άσκηση 13</u>

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$ και $\widehat{zOx}$ έτσι, ώστε $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = 150^o$ Στις ημιευθείες Οx, Οy, Οz παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα, έτσι ώστε: $ΟΑ = 2$, $ΟΒ = 4$ και $ΟΓ = 6$.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΑ.

(β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(ΟΑΒ)}{(ΟΒΓ)}$.

<u>Άσκηση 14</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Ρ. Αν οι ΑΡ, ΒΡ και ΓΡ τέμνουν τις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

(α) $\frac{ΡΔ}{ΑΔ} = \frac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)}$, (β) $\frac{ΡΔ}{ΑΔ} + \frac{ΡΕ}{ΒΕ} + \frac{ΡΖ}{ΓΖ} = 1$, (γ) $\frac{ΡΑ}{ΑΔ} + \frac{ΡΒ}{ΒΕ} + \frac{ΡΓ}{ΓΖ} = 2$.

<u>Άσκηση 15</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Β}, \hat{Γ} < 90^o$ και το ύψος του ΑΔ. Στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α) φέρουμε $Βx \perp ΒΓ$ και $Βy \perp ΒΓ$. Πάνω στις Βx, Γy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ, ώστε να είναι: $ΒΕ = ΓΖ = 2ΑΔ$. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $(ΕΒΜ) + (ΖΓΝ) = 2(ΑΒΓ)$.

<u>Άσκηση 16</u>

Δίνεται κύκλος κέντρο Ο και δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι: $(ΒΟΔ) = (ΑΟΓ)$.

<u>Άσκηση 17</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι: $(ΑΒΔ)^2 = (ΑΔΕ)(ΑΒΓ)$.

Άσκηση 18

Πάνω στις πλευρές κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ και ΑΔΛΜ. Να αποδείξετε ότι:
$(\mathrm{AMZ})+(\Gamma\mathrm{HK})=(\mathrm{B}\Theta\mathrm{E})+(\Delta\mathrm{I}\Lambda)$.

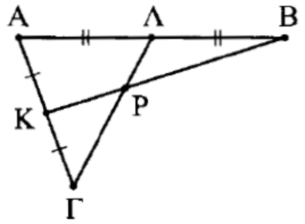
Άσκηση 19

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{\mathrm{A}}=90^o\right)$ και τρία πολύγωνα P_1, P_2 και P_3 όμοια μεταξύ τους, που έχουν ως ομόλογες πλευρές τις ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{P}_2)+(\mathrm{P}_3)=(\mathrm{P}_1)$, όπου (P_1), (P_2) και (P_3) τα εμβαδά τους.

Άσκηση 20

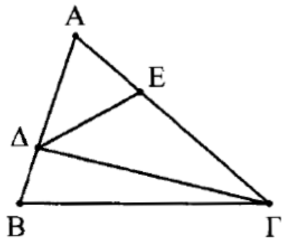
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα τέτοια ώστε: $\mathrm{A}\Delta=\frac{2}{3}\mathrm{AB}$, $\mathrm{BE}=\frac{1}{2}\mathrm{B}\Gamma$ και $\Gamma\mathrm{Z}=\frac{3}{5}\Gamma\mathrm{A}$. Να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{A}\Delta\mathrm{Z})=(\Delta\mathrm{EZ})$.

Άσκηση 21



Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:
(α) Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσος με 1,
(β) Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΛΓ και ΚΒ, τότε τα τρίγωνα ΒΛΡ και ΚΓΡ έχουν ίσα εμβαδά.

Άσκηση 22



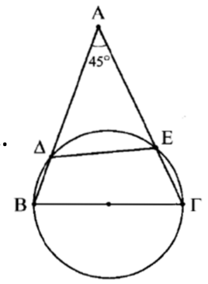
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε, των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, αντίστοιχα τέτοια ώστε: $\mathrm{A}\Delta=\frac{3}{5}\mathrm{AB}$ και $\mathrm{AE}=\frac{1}{3}\mathrm{A}\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\Gamma\Delta\mathrm{E})}{(\mathrm{AB}\Gamma)}=\frac{2}{5}$.

Άσκηση 23

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ και έστω Η το ορθόκεντρο του.
Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})}{(\mathrm{AB}\Gamma)}=\frac{(\mathrm{H}\Delta\mathrm{E})}{(\mathrm{HB}\Gamma)}$.

Άσκηση 24

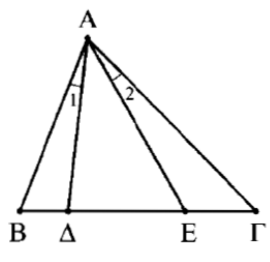


Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με: $\widehat{\mathrm{A}}=45^o$. Ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ και το τετράπλευρο ΒΓΕΔ έχουν ίσα εμβαδά.

Άσκηση 25

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{AMN})=\frac{3}{8}(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)$.

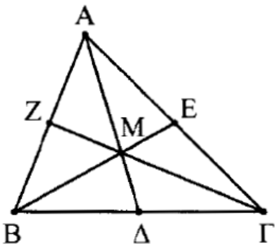
Άσκηση 26



Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε, της πλευράς ΒΓ τέτοια ώστε: $\widehat{\mathrm{BA}\Delta}=\widehat{\Gamma\mathrm{AE}}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{A}\Gamma}=\frac{\Delta\mathrm{B}}{\mathrm{E}\Gamma}$, (β) $\frac{\Delta\mathrm{B}}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{E}\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{A}\Gamma^2}$.

Άσκηση 27
Προεκτείνουμε τις διαμέσους ΑΚ, ΒΛ και ΓΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ, προς το μέρος κάθε κορυφής και παίρνουμε αντίστοιχα τα ευθύγραμμα τμήματα:
$\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AK}$, $\mathrm{BZ} = \mathrm{B\Lambda}$ και $\Gamma\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{M}$. Να βρείτε τον λόγο: $\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\Delta\mathrm{EZ})}$.

Άσκηση 28
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του. Οι προεκτάσεις των ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ τέμνουν τις ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\frac{(\mathrm{ABM})}{(\mathrm{A\Gamma M})} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\Gamma\Delta}$, (β) $\frac{\mathrm{B\Delta}}{\Gamma\Delta} \cdot \frac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{BZ}} \cdot \frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{AE}} = 1$.



Άσκηση 29
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α, εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε το σημείο Ε έτσι, ώστε $\mathrm{E\Gamma} = \frac{\alpha}{3}$ και προεκτείνουμε την ΑΕ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ.
(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AE} = \frac{\alpha\sqrt{7}}{3}$, (β) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{EZ} = \frac{2\sqrt{7}\cdot\alpha}{21}$.
(γ) Να βρείτε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΕΒ και ΓΕΖ.

Άσκηση 30
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της πλευράς ΑΒ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{B\Delta} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ και φέρουμε την ΑΔ.
(α) Να αποδείξετε ότι: $(\Delta\mathrm{EB}) = \frac{1}{2}(\mathrm{A\Delta B})$,
(β) Να βρείτε τους λόγους $\frac{(\Delta\mathrm{EB})}{(\mathrm{AB\Gamma})}$ και $\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A\Delta\Gamma})}$.
(γ) Αν ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{B\Delta E}) = (\mathrm{AME})$.

Άσκηση 31
Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι: $\mathrm{A\Delta} = \frac{1}{3}\mathrm{AB}$, $\mathrm{BE} = \lambda\mathrm{B\Gamma}$, $\Gamma\mathrm{Z} = \lambda\Gamma\mathrm{A}$, όπου $0 < \lambda < 1$.
Να αποδείξετε ότι: (α) $\frac{(\mathrm{A\Delta Z})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{1-\lambda}{3}$, (β) $\frac{(\Delta\mathrm{EZ})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{3\lambda^2 - 4\lambda + 2}{3}$.
(γ) Αν $\lambda = \frac{2}{3}$, το τρίγωνο ΔΕΖ έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 10.5
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\beta\cdot \cancel{\upsilon_\beta}}{\cancel{\frac{1}{2}}\beta'\cancel{\upsilon_\beta}} = \frac{3}{2}$$ σωστή η (Γ)

Άσκηση 2

Οι δύο ρόμβοι είναι όμοιοι άρα

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \lambda^2 = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

Άσκηση 3

Έστω ότι $AB = A\Gamma = x$. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{A}'$ παραπληρωματικές.

άρα $$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{AB\cdot A\Gamma}{A'B'\cdot A'\Gamma'} \Leftrightarrow 1 = \frac{x\cdot x}{36} \Leftrightarrow \boxed{x=6}$$

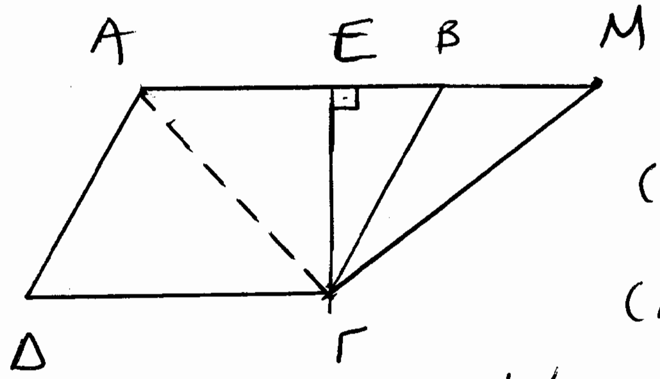
Άσκηση 4

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\alpha}\cdot \upsilon_\alpha}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\alpha}\ \upsilon_\alpha'} = \frac{\frac{3}{2}\upsilon_\alpha'}{\upsilon_\alpha} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{30}{(A'B'\Gamma')} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (A'B'\Gamma') = 20m^2$$

Άσκηση 5

$(AB\Gamma\Delta) = 20\,m^2$



$$(AB\Gamma) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2} = 10\,m^2$$

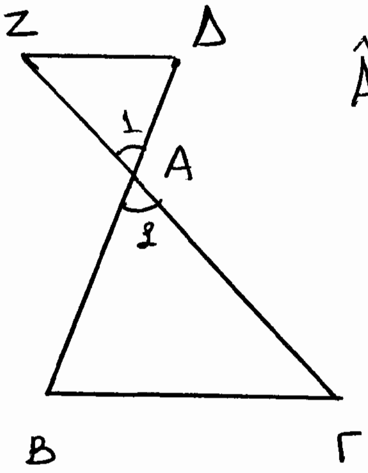
$$\left.\begin{aligned}(MB\Gamma) &= \frac{1}{2} BM \cdot E\Gamma \\ (AB\Gamma) &= \frac{1}{2} AB \cdot E\Gamma\end{aligned}\right\} (:)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(MB\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} BM \cdot \cancel{E\Gamma}}{\cancel{\frac{1}{2}} AB \cdot \cancel{E\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{(MB\Gamma)}{10} = \frac{\cancel{BM}}{2\cancel{BM}}$$

$$\Leftrightarrow (MB\Gamma) = 5\,m^2$$

Άσκηση 6

$A\Delta = \frac{2}{3} AB, \quad AZ = \frac{1}{2} A\Gamma$

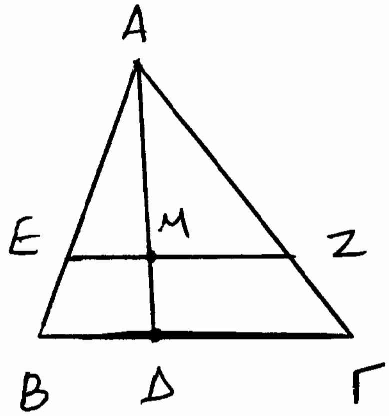


$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ άρα } \frac{(A\Delta Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AZ}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{2}{3}\cancel{AB} \cdot \frac{1}{2}\cancel{A\Gamma}}{\cancel{AB} \cdot \cancel{A\Gamma}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(A\Delta Z)}{30} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{(A\Delta Z) = 10\,m^2}$$

Άσκηση 7

$(AB\Gamma) = 75\,m^2$



Έχουμε $EZ \parallel B\Gamma$, Άρα τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AEZ}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι όμοια.

άρα $\frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2$ (1)

Επίσης $EM \parallel B\Delta$. Άρα τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AEM}$ και $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ είναι όμοια

Άρα $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AM}{A\Delta}$ (2)

Ισχύει: $\dfrac{AM}{M\Delta} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{AM}{M\Delta + AM} = \dfrac{3}{3+2} \Leftrightarrow \dfrac{AM}{A\Delta} = \dfrac{3}{5}$

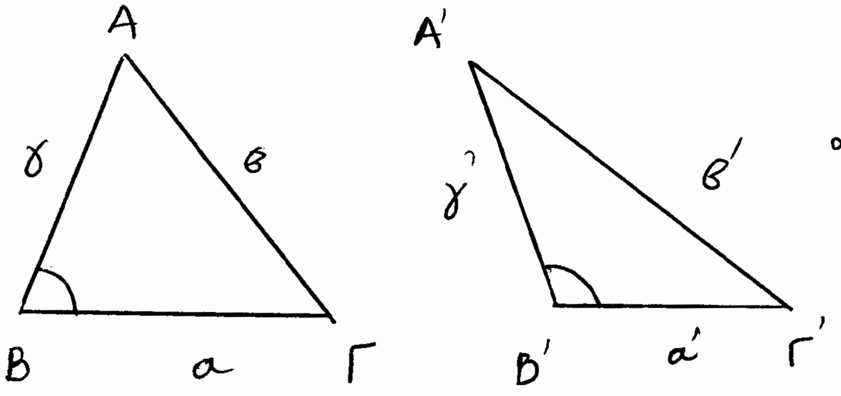
$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{3}{5}$ (3)

Από (1), (3) έχουμε $\dfrac{(AEZ)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{9}{25}$

$\Leftrightarrow (AEZ) = \dfrac{9}{25} 75 \Leftrightarrow (AEZ) = 27$ τ.μ.

Άρα $(BEZ\Gamma) = (AB\Gamma) - (AEZ) = 75 - 27 = 48$ τ.μ.

$\boxed{\text{Άσκηση 8}}$ $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} + \hat{B}' = 180°$ Ν.δ.ο: $\alpha\beta' = \alpha'\beta$



Ισχύει: $\hat{A} = \hat{A}'$

άρα $\dfrac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \dfrac{\beta \cdot \gamma}{\beta'\gamma'}$ (1)

Ισχύει: $\hat{B} + \hat{B}' = 180°$

$\dfrac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \dfrac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'}$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $\dfrac{\beta\cancel{\gamma}}{\beta'\cancel{\gamma'}} = \dfrac{\alpha\cancel{\gamma}}{\alpha'\cancel{\gamma'}}$

$\Leftrightarrow \alpha\beta' = \alpha'\beta$

Άσκηση 9 $AK = \frac{1}{2}AB,\ B\Lambda = \frac{1}{3}B\Gamma,\ \Gamma M = \frac{1}{4}A\Gamma$

$\hat{A}$ κοινή άρα $\frac{(AKM)}{(AB\Gamma)} = \frac{AK\cdot AM}{AB\cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB\cdot\frac{3}{4}A\Gamma}{AB\cdot A\Gamma} = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{(AKM)}{24} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow (AKM) = 9$ τ.μ

Η $\hat{B}$ κοινή άρα $\frac{(BK\Lambda)}{(AB\Gamma)} = \frac{BK\cdot B\Lambda}{AB\cdot B\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB\cdot\frac{1}{3}B\Gamma}{AB\cdot B\Gamma} = \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{(BK\Lambda)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (BK\Lambda) = 4$ τ.μ

Η $\hat{\Gamma}$ κοινή άρα $\frac{(\Gamma\Lambda M)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma M\cdot\Gamma\Lambda}{B\Gamma\cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{4}A\Gamma\cdot\frac{2}{3}B\Gamma}{B\Gamma\cdot A\Gamma} = \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow (\Gamma\Lambda M) = 4$ τ.μ

$(K\Lambda M) = (AB\Gamma) - (AKM) - (BK\Lambda) - (\Gamma\Lambda M)$

$= 24 - 9 - 4 - 4 = 7$ τ.μ.

Άσκηση 10

(α) $(\Delta E\Gamma B) = 8(A\Delta E) \Leftrightarrow (AB\Gamma) - (A\Delta E) = 8(A\Delta E)$

$\Rightarrow 9(A\Delta E) = (AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{9}$

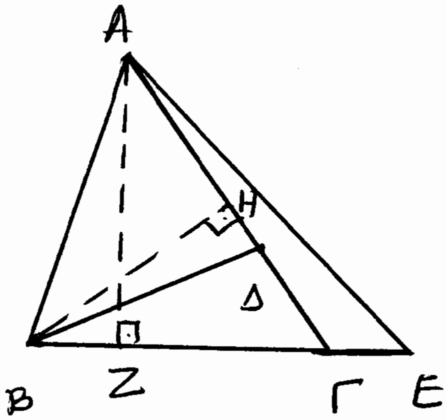
(β) $\Delta E \parallel B\Gamma$ άρα τα τρίγωνα είναι όμοια και

$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

Απο την ομοιοτητα έχουμε: $\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} = \lambda$

$\Leftrightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \lambda \Leftrightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = x+6 \Leftrightarrow \boxed{x=3}$

Άσκηση 11



Το BH είναι κοινό ύψος των τριγώνων $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{B}\Gamma$

(α) $\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{14}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{2}{3}\cancel{A\Gamma}}{\cancel{A\Gamma}}$

$\Leftrightarrow \frac{14}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (AB\Gamma) = 21$ τμ

(β) Το AZ είναι κοινό ύψος για τα $A\hat{\Gamma}E$ και $A\hat{B}\Gamma$

Άρα έχουμε: $\frac{(A\Gamma E)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma E}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{(A\Gamma E)}{21} = \frac{\frac{2}{7}\cancel{B\Gamma}}{\cancel{B\Gamma}}$

$\Leftrightarrow \frac{(A\Gamma E)}{21} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow (A\Gamma E) = 6$ τμ

Άσκηση 12

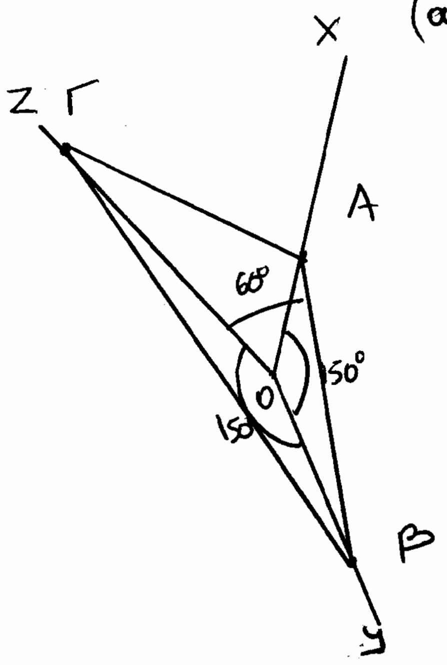
Τα τρίγωνα $A\hat{\Delta}E$ και $A\hat{B}\Gamma$ έχουν την $\hat{A}$ κοινή, άρα

$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{\lambda \cancel{AB} \cdot \left(\lambda - \frac{1}{6}\right) \cdot \cancel{A\Gamma}}{\cancel{AB} \cdot \cancel{A\Gamma}}$

$\Leftrightarrow 6\lambda\left(\lambda - \frac{1}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 5^2$, $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{12}$ → $\frac{1}{2}$ Δεκτή, $-\frac{1}{3}$ Απορρ.

Άσκηση 13



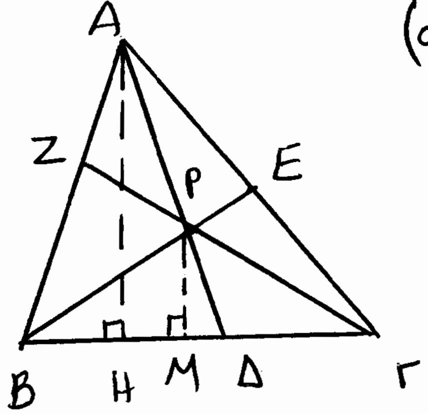
(α) $(AO\Gamma) = \frac{1}{2} OA \cdot O\Gamma \cdot \eta\mu 60^\circ$

$= \frac{1}{2} 2 \cdot 6 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ τ.μ

(β) Έχουμε: $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = 150^\circ$

$$\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)} = \frac{OA \cdot \cancel{OB}}{\cancel{OB} \cdot O\Gamma} = \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 14



(α) Τα τρίγωνα ΒΡΓ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση την ΒΓ και αν φέρουμε τα ύψη ΡΜ και ΑΗ ισχύει:

$$\frac{(B P\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{PM}{AH} \quad (1)$$

Τα τρίγωνα $A\hat{H}\Delta$ και $P\hat{M}\Delta$ είναι όμοια διότι:

(i) $\hat{H} = \hat{M} = 90^\circ$ (ii) $\hat{\Delta}$ κοινή

$$\frac{PM}{AH} = \frac{P\Delta}{A\Delta} = \frac{M\Delta}{H\Delta} \Leftrightarrow \frac{PM}{AH} = \frac{P\Delta}{A\Delta} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε: $\frac{(BP\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{P\Delta}{A\Delta}$

(β) Σύμφωνα με το (α) έχουμε:

$$\frac{P\Delta}{A\Delta} = \frac{(BP\Gamma)}{(AB\Gamma)}, \quad \frac{PE}{BE} = \frac{(AP\Gamma)}{(AB\Gamma)}, \quad \frac{PZ}{\Gamma Z} = \frac{(APB)}{(AB\Gamma)}$$

$$\frac{P\Delta}{A\Delta}+\frac{PE}{BE}+\frac{PZ}{\Gamma Z}=\frac{(BP\Gamma)+(AP\Gamma)+(APB)}{(AB\Gamma)}$$

$$=\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Gamma)}=1$$

(γ) $\frac{PA}{A\Delta}=\frac{A\Delta-P\Delta}{A\Delta}=1-\frac{P\Delta}{A\Delta}$

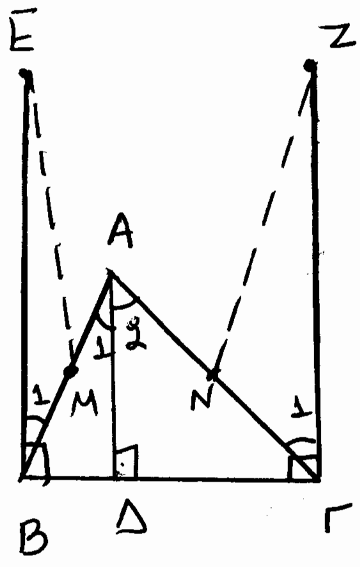
$$\frac{PB}{BE}=\frac{BE-PE}{BE}=1-\frac{PE}{BE}$$

$$\frac{P\Gamma}{\Gamma Z}=\frac{\Gamma Z-PZ}{\Gamma Z}=1-\frac{PZ}{\Gamma Z}$$

Προσθέτοντας έχουμε:

$$\frac{PA}{A\Delta}+\frac{PB}{BE}+\frac{P\Gamma}{\Gamma Z}=3-\left(\frac{P\Delta}{A\Delta}+\frac{PE}{BE}+\frac{PZ}{\Gamma Z}\right)\overset{(\beta)}{=}3-1=2$$

Άσκηση 15



Η $\hat{A}_1=\hat{B}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $EB \parallel A\Delta$ και AB τέμνουσα

άρα $\frac{(AB\Delta)}{(EBM)}=\frac{AB\cdot A\Delta}{EB\cdot BM}=\frac{2BM\cdot A\Delta}{2A\Delta\cdot BM}=1$

$\Leftrightarrow (AB\Delta)=(EBM)$ (1)

Όμοια η $\hat{\Gamma}_1=\hat{A}_2$ έχουμε:

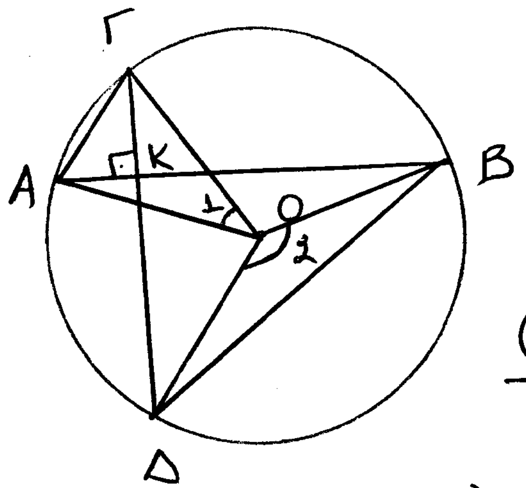
$(Z\Gamma N)=(A\Gamma\Delta)$ (2)

Από (1)+(2) έχουμε:

$(AB\Delta)+(A\Gamma\Delta)=(EBM)+(Z\Gamma N)$

$\Leftrightarrow (EBM)+(Z\Gamma N)=2(AB\Gamma)$

Άσκηση 16



Έστω K το σημείο τομής των χορδών AB και ΓΔ. Έχουμε:

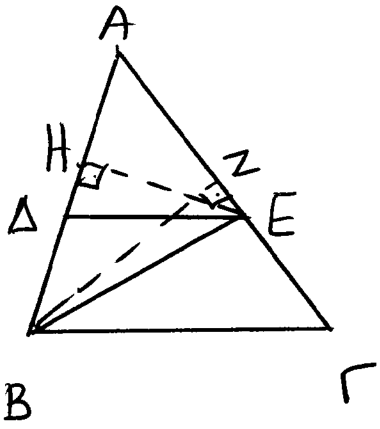
$$\hat{AK\Gamma} = \overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Delta} = 90^\circ$$

Άρα $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ$

$$\frac{(AO\Gamma)}{(BO\Delta)} = \frac{OA \cdot O\Gamma}{OB \cdot O\Delta} = \frac{R \cdot R}{R \cdot R} = 1$$

$\Leftrightarrow$ $(AO\Gamma) = (BO\Delta)$

Άσκηση 17



$$(AB\Delta)^2 = (A\Delta E)(AB\Gamma)$$

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ABE και AΔE έχουν κοινό το ύψος από την κορυφή E, άρα:

$$\frac{(ABE)}{(A\Delta E)} = \frac{AB}{A\Delta} \quad (1)$$

Όμοια στα τρίγωνα ABΓ και ABE έχουμε κοινό το ύψος από την κορυφή B, άρα:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(ABE)} = \frac{A\Gamma}{AE} \quad (2)$$

Επειδή ΔΕ // ΒΓ, από το Θεώρημα Θαλή είναι:

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE} \quad (3)$$

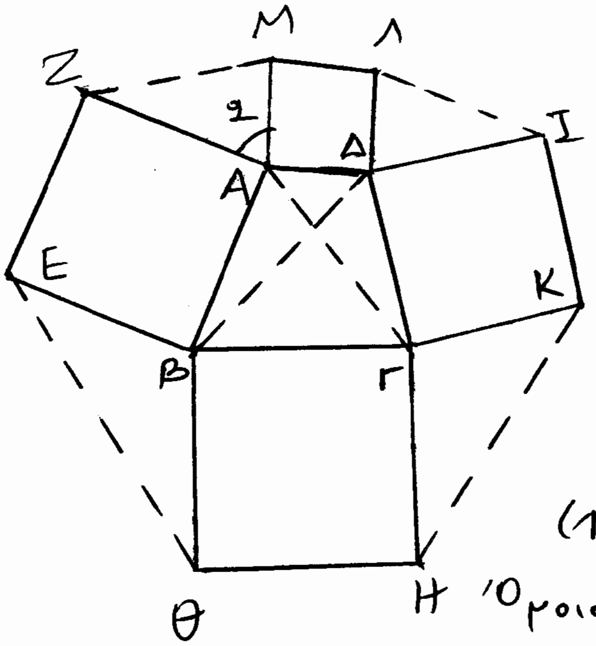
Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε ότι:

$$\frac{(ABE)}{(A\Delta E)} = \frac{(AB\Gamma)}{(ABE)} \Leftrightarrow (ABE)^2 = (AB\Gamma)(A\Delta E)$$

Άσκηση 18

Ν.δ.ο: $(AMZ)+(\Gamma HK)=(B\Theta E)+(\Delta I\Lambda)$

Λύση:



$B\hat{A}\Delta+\hat{A}_2=180^\circ$.

Άρα: $\dfrac{(AMZ)}{(AB\Delta)}=\dfrac{AM\cdot AZ}{A\Delta\cdot AB}=1$

αφού $AM=A\Delta$ και $AZ=AB$

$\Leftrightarrow (AMZ)=(AB\Delta)$ (1)

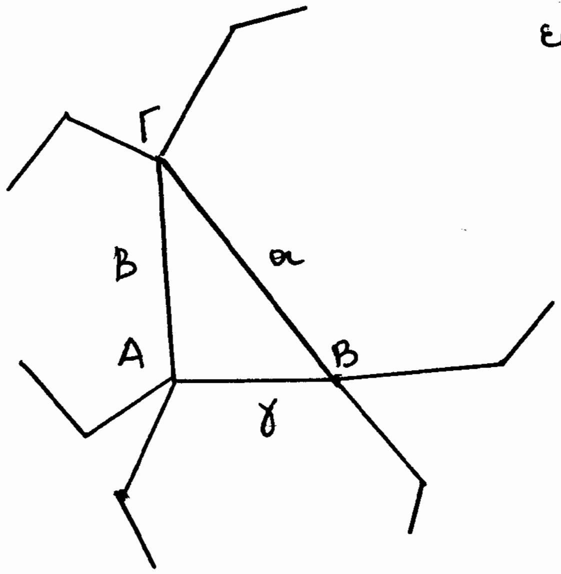
Όμοια: $(\Gamma HK)=(B\Gamma\Delta)$ (2)

(1) + (2) $(AMZ)+(\Gamma HK)=(AB\Gamma\Delta)$ (3)

Όμοια για τα τρίγωνα $B\Theta E$, $AB\Gamma$ και $\Delta I\Lambda$, $A\Delta\Gamma$ έχουμε: $(B\Theta E)+(\Delta I\Lambda)=(AB\Gamma\Delta)$ (4)

Από (3), (4) έχουμε: $(AMZ)+(\Gamma HK)=(B\Theta E)+(\Delta I\Lambda)$

Άσκηση 19



Επειδή τα πολύγωνα P_2 και P_1 είναι όμοια με ομόλογες πλευρές β, α, αντίστοιχα έχουμε:

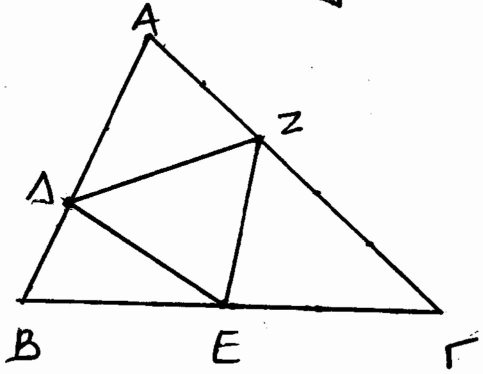
$$\frac{(P_2)}{(P_1)}=\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (1)$$

Όμοια: $$\frac{(P_3)}{(P_1)}=\frac{\gamma^2}{\alpha^2} \quad (2)$$

Από (1) + (2) έχουμε:

$$\frac{(P_2)+(P_3)}{(P_1)}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow (P_2)+(P_3)=(P_1)$$

Άσκηση 20



$A\Delta = \frac{2}{3} AB$, $BE = \frac{1}{2} B\Gamma$, $\Gamma Z = \frac{3}{5} \Gamma A$

• Τα τρίγωνα $A\hat{\Delta}Z$ και $A\hat{B}\Gamma$ έχουν την γωνία $\hat{A}$ κοινή

$$\frac{(A\Delta Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AZ}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{2}{3}\cancel{AB} \cdot \frac{2}{5}\cancel{A\Gamma}}{\cancel{AB} \cdot \cancel{A\Gamma}}$$

$$\Leftrightarrow (A\Delta Z) = \frac{4}{15} (AB\Gamma) \quad (1)$$

• Όμοια η $\hat{B}$ κοινή στα $B\hat{\Delta}E$ και $A\hat{B}\Gamma$

$$\frac{(B\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{B\Delta \cdot BE}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{1}{3}\cancel{AB} \cdot \frac{1}{2}\cancel{B\Gamma}}{\cancel{AB} \cdot \cancel{B\Gamma}} \Leftrightarrow (B\Delta E) = \frac{1}{6}(AB\Gamma) \quad (2)$$

• Όμοια η $\hat{\Gamma}$ κοινή στα $\Gamma\hat{E}Z$ και $A\hat{B}\Gamma$

$$\frac{(\Gamma E Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma E \cdot \Gamma Z}{A\Gamma \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{B\Gamma} \cdot \frac{3}{5}\cancel{\Gamma A}}{\cancel{A\Gamma} \cdot \cancel{B\Gamma}} = \frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow (\Gamma E Z) = \frac{3}{10} (AB\Gamma) \quad (3)$$

$$(\Delta E Z) = (AB\Gamma) - (A\Delta Z) - (B\Delta E) - (\Gamma E Z)$$

$$\overset{(1),(2),(3)}{=} (AB\Gamma) - \frac{4}{15}(AB\Gamma) - \frac{1}{6}(AB\Gamma) - \frac{3}{10}(AB\Gamma)$$

$$= \frac{30 - 8 - 5 - 9}{30}(AB\Gamma) = \frac{8}{30}(AB\Gamma) = \frac{4}{15}(AB\Gamma)$$

Άρα $(A\Delta Z) = (\Delta E Z) = \frac{4}{15} (AB\Gamma)$.

Άσκηση 21

(α) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AKB}$ και $\overset{\triangle}{A\Lambda\Gamma}$ έχουν την $\hat{A}$ κοινή.

$$\frac{(AKB)}{(A\Lambda\Gamma)} = \frac{AB \cdot AK}{A\Lambda \cdot A\Gamma} = \frac{2A\Lambda \cdot AK}{A\Lambda \cdot 2AK} = 1$$

(β) Από το (α) έχουμε: $(AKB) = (A\Lambda\Gamma)$

$$\Leftrightarrow \cancel{(AKP\Lambda)} + (B\Lambda P) = \cancel{(AKP\Lambda)} + (K\Gamma P) \Leftrightarrow (B\Lambda P) = (K\Gamma P)$$

Άσκηση 22

Η $\hat{A}$ κοινή στα $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ άρα:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{3}{5}AB \cdot \frac{1}{3}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow (A\Delta E) = \frac{1}{5}(AB\Gamma) \quad (1)$$

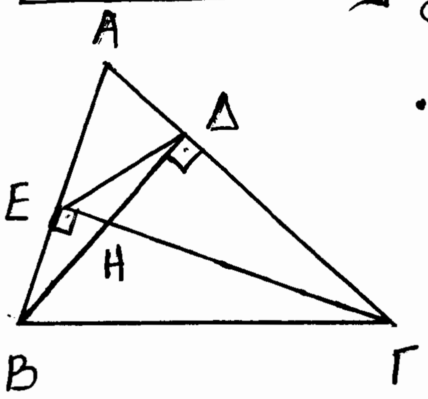
Η $\hat{B}$ κοινή στα $\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ άρα:

$$\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{B\Delta \cdot B\Gamma}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{2}{5}AB}{AB} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow (B\Delta\Gamma) = \frac{2}{5}(AB\Gamma) \quad (2)$$

$$(\Gamma\Delta E) = (AB\Gamma) - (A\Delta E) - (B\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) - \frac{1}{5}(AB\Gamma) - \frac{2}{5}(AB\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow (\Gamma\Delta E) = \frac{2}{5}(AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{5}$$

Άσκηση 23



Το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι εγγράψιμο, διότι: $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$.

- Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή και $A\hat{E}\Delta = \hat{\Gamma}$, άρα είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας: $\lambda = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$

Άρα ισχύει: $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{B\Gamma}\right)^2 \quad (1)$

- Τα τρίγωνα $H\Delta E$ και $HB\Gamma$ έχουν $E\hat{H}\Delta = B\hat{H}\Gamma$ και $\Delta\hat{E}H = H\hat{B}\Gamma$, άρα είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$. Άρα έχουμε: $\frac{(H\Delta E)}{(HB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{B\Gamma}\right)^2$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{(H\Delta E)}{(HB\Gamma)}$

Άσκηση 24

Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{\Delta}E$ και $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ είναι όμοια διότι:
(i) $\hat{A}$ κοινή (ii) $A\hat{\Delta}E = \hat{\Gamma}$ άρα $\lambda = \frac{AE}{AB}$

Η $B\hat{E}\Gamma = 90^\circ$, άρα από το Π.Θ στο $E\overset{\triangle}{A}B$ έχουμε:

$AE^2 + EB^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2AE^2 = AB^2 \Leftrightarrow \frac{AE^2}{AB^2} = \frac{1}{2}$

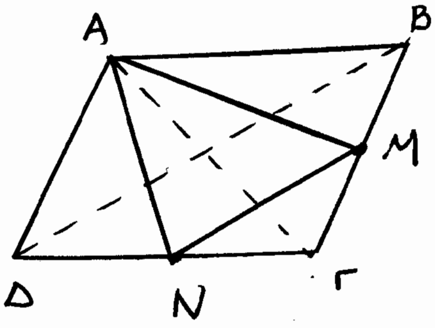
$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2}$.

Επομένως $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 \Leftrightarrow (AB\Gamma) = 2(A\Delta E) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A\Delta E) + (B\Gamma E\Delta) = 2(A\Delta E) \Leftrightarrow (B\Gamma E\Delta) = (A\Delta E)$.

Άσκηση 25

$(AMN) = \frac{3}{8}(AB\Gamma\Delta)$



$(AN\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{4}(AB\Gamma\Delta)$ (1)

Όμοια $(AM\Gamma) = \frac{1}{4}(AB\Gamma\Delta)$ (2)

Τα τρίγωνα ΓMN και $\Gamma B\Delta$ έχουν την $\hat{\Gamma}$ κοινή, άρα: $\frac{(\Gamma MN)}{(\Gamma B\Delta)} = \frac{\Gamma M \cdot \Gamma N}{\Gamma B \cdot \Gamma\Delta} = \frac{\Gamma M \cdot \Gamma N}{2\Gamma M \cdot 2\Gamma N}$

$= \frac{1}{4} \Leftrightarrow (\Gamma MN) = \frac{1}{4}(\Gamma B\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$ (3)

Ισχύει $(AMN) = (AN\Gamma) + (AM\Gamma) - (\Gamma MN) \overset{(1),(2),(3)}{=}$

$= \frac{1}{4}(AB\Gamma\Delta) + \frac{1}{4}(AB\Gamma\Delta) - \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta) = \frac{3}{8}(AB\Gamma\Delta)$

Άσκηση 26

(α) Τα τρίγωνα $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}E$ έχουν $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ άρα

$$\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma E)} = \frac{AB \cdot A\Delta}{AE \cdot A\Gamma} \quad (1)$$

Τα τρίγωνα $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}E$ έχουν κοινό ύψος άρα

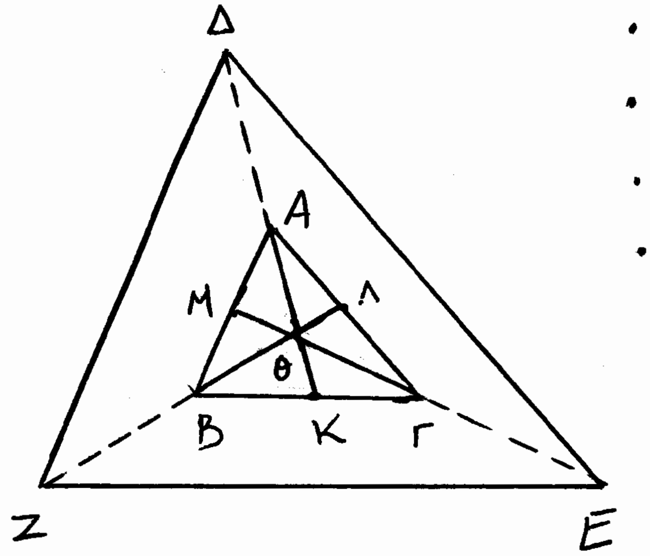
$$\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma E)} = \frac{\Delta B}{E\Gamma} \quad (2)$$ Από (1), (2) έχουμε: $$\frac{AB \cdot A\Delta}{AE \cdot A\Gamma} = \frac{\Delta B}{E\Gamma} \quad (3)$$

(β) Όμοια τα τρίγωνα $A\hat{B}E$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$ έχουν $B\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma$, καθώς και κοινό ύψος άρα: $\frac{(ABE)}{(A\Gamma\Delta)} = \frac{AB \cdot AE}{A\Gamma \cdot A\Delta}$ και $\frac{(ABE)}{(A\Gamma\Delta)} = \frac{EB}{\Delta\Gamma}$

Άρα $$\frac{AB \cdot AE}{A\Gamma \cdot A\Delta} = \frac{EB}{\Delta\Gamma} \quad (4)$$

Από (3) (·) (4) $$\frac{AB^2 \cdot \cancel{AE} \cdot \cancel{A\Delta}}{A\Gamma^2 \cdot \cancel{A\Delta} \cdot \cancel{AE}} = \frac{EB \cdot B\Delta}{\Delta\Gamma \cdot E\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\Delta B \cdot EB}{\Delta\Gamma \cdot E\Gamma} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2}$$

Άσκηση 27



Το θ είναι βαρύκεντρο

- $\theta A = \frac{2}{3} AK$
- $\theta\Delta = \theta A + A\Delta = \frac{5}{3} AK$
- $\theta B = \frac{2}{3} B\Lambda$
- $\theta Z = \theta B + BZ = \frac{5}{3} B\Lambda$

Τα τρίγωνα $\theta\hat{A}B$ και $\theta\hat{\Delta}Z$ έχουν την $\hat{\theta}$ κοινή και

- $$\frac{\theta A}{\theta\Delta} = \frac{\frac{2}{3}AK}{\frac{5}{3}AK} = \frac{2}{5}$$
- $$\frac{\theta B}{\theta Z} = \frac{\frac{2}{3}B\Lambda}{\frac{5}{3}B\Lambda} = \frac{2}{5}$$

Δηλαδή: $\frac{ΘΑ}{ΘΔ} = \frac{ΘΒ}{ΘΖ}$. Άρα τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΘΑΒ}$ και $\overset{\triangle}{ΘΔΖ}$ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{5}$, οπότε ισχύει:

$$\frac{ΑΒ}{ΔΖ} = \frac{2}{5}.$$

Όμοια δείχνουμε ότι: $\frac{ΑΒ}{ΔΖ} = \frac{ΒΓ}{ΖΕ} = \frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{2}{5}$

Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια:

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 28}}$

(α) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$ και $\overset{\triangle}{ΑΓΔ}$ έχουν κοινό ύψος

άρα: $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)} = \frac{ΒΔ}{ΓΔ} \Leftrightarrow (ΑΒΔ) = \frac{ΒΔ}{ΓΔ}(ΑΓΔ)$ (1)

Όμοια τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΜΒΔ}$ και $\overset{\triangle}{ΜΓΔ}$ ισχύει ότι:

$$\frac{(ΜΒΔ)}{(ΜΓΔ)} = \frac{ΒΔ}{ΓΔ} \Leftrightarrow (ΜΒΔ) = \frac{ΒΔ}{ΓΔ}(ΜΓΔ) \quad (2)$$

$$(1) \ominus (2) \quad (ΑΒΔ) - (ΜΒΔ) = \frac{ΒΔ}{ΓΔ}(ΑΓΔ) - \frac{ΒΔ}{ΓΔ}(ΜΓΔ)$$

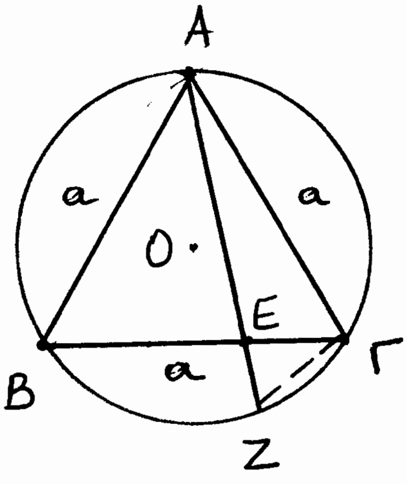
$$\Leftrightarrow (ΑΒΜ) = \frac{ΒΔ}{ΓΔ}(ΑΓΜ) \Leftrightarrow \frac{(ΑΒΜ)}{(ΑΓΜ)} = \frac{ΒΔ}{ΓΔ} \quad (3)$$

(β) Όμοια ισχύει: $\frac{(ΑΓΜ)}{(ΓΒΜ)} = \frac{ΑΖ}{ΒΖ}$ (4) και $\frac{(ΓΒΜ)}{(ΑΒΜ)} = \frac{ΓΕ}{ΑΕ}$ (5)

Από (3)·(4)·(5) έχουμε:

$$\frac{ΒΔ}{ΓΔ} \cdot \frac{ΑΖ}{ΒΖ} \cdot \frac{ΓΕ}{ΑΕ} = 1$$

Άσκηση 29



(α) Από τον νόμο των συνημιτόνων στο $A\hat{E}\Gamma$ έχουμε:

$$AE^2 = A\Gamma^2 + E\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot E\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow AE^2 = a^2 + \frac{a^2}{9} - \cancel{2} \cdot a \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow AE^2 = \frac{9a^2 + a^2 - 3a^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow AE^2 = \frac{7a^2}{9} \Leftrightarrow \boxed{AE = \frac{a\sqrt{7}}{3}}$$

(β) Ισχύει ότι: $EA \cdot EZ = EB \cdot E\Gamma$

$$\Leftrightarrow \frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot EZ = \frac{2}{3}a \cdot \frac{a}{3} \Leftrightarrow 3\cancel{a}\sqrt{7} \cdot EZ = 2a^{\cancel{2}}$$

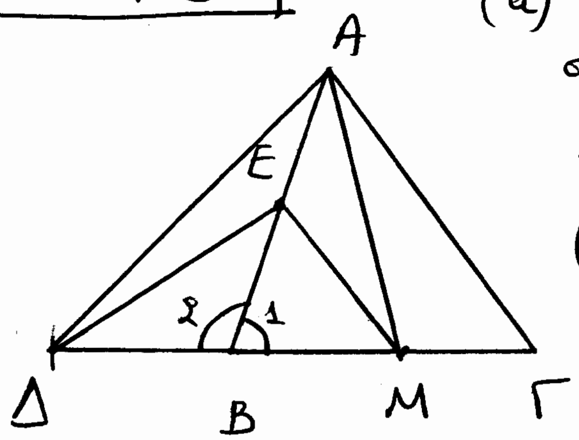
$$\Leftrightarrow EZ = \frac{2a}{3\sqrt{7}} \Leftrightarrow \boxed{EZ = \frac{2\sqrt{7}\,a}{21}}$$

(γ) Τα τρίγωνα $A\hat{E}B$ και $\Gamma\hat{E}Z$ έχουν: $A\hat{E}B = \Gamma\hat{E}Z$ ως κατακορυφήν άρα:

$$\frac{(AEB)}{(\Gamma EZ)} = \frac{EA \cdot EB}{E\Gamma \cdot EZ} = \frac{\frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{3}a}{\frac{a}{3} \cdot \frac{2\sqrt{7}\,a}{21}} = \frac{\frac{2a^2\sqrt{7}}{9}}{\frac{2a^2\sqrt{7}}{9 \cdot 7}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(AEB)}{(\Gamma EZ)} = 7$$

Άσκηση 30



(α) Η ΔΕ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΔΑΒ

άρα $(\Delta EB) = \frac{1}{2}(A\Delta B)$

(β) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Delta EB}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουν τις γωνίες $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$

άρα: $$\frac{(\Delta EB)}{(AB\Gamma)} = \frac{BE \cdot B\Delta}{BA \cdot B\Gamma} = \frac{BE \cdot B\Delta}{2BE \cdot 2B\Delta} = \frac{1}{4}$$

Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ έχουν την γωνία $\hat{\Gamma}$ κοινή

άρα $$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{\Gamma A \cdot \Gamma B}{\Gamma A \cdot \Gamma\Delta} = \frac{\Gamma B}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma B}{\Gamma B + B\Delta} = \frac{2B\Delta}{3B\Delta} = \frac{2}{3}$$

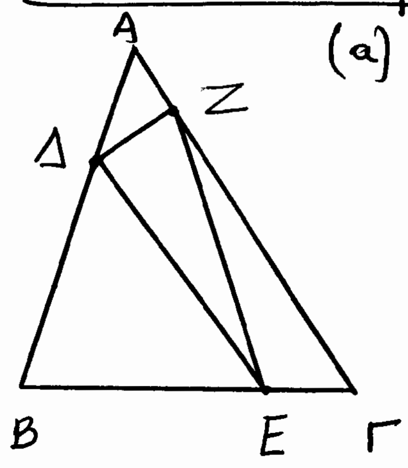
(γ) Η ΑΒ είναι διάμεσος στο $\overset{\triangle}{A\Delta}$, οπότε

$(A\Delta B) = (ABM)$ (1)

Οι ΔΕ και ΜΕ είναι διάμεσοι στα τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ και $\overset{\triangle}{ABM}$ αντίστοιχα, άρα

$$(B\Delta E) = \frac{1}{2}(AB\Delta) \overset{(1)}{=\!=} \frac{1}{2}(ABM) = (AME)$$

Άσκηση 31



(α) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Delta Z}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουν την γωνία $\hat{A}$ κοινή, άρα:

$$\frac{(A\Delta Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AZ}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{3}\cancel{AB}\cdot(A\Gamma - \Gamma Z)}{\cancel{AB}\cdot A\Gamma}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(A\Gamma - \lambda A\Gamma)}{A\Gamma} = \frac{1}{3}(1-\lambda)$$

(β) Η $\hat{B}$ κοινή στα τρίγωνα $B\hat{\Delta}E$ και $A\hat{B}\Gamma$ άρα

$$\frac{(B\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{B\Delta \cdot BE}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{2}{3}AB \cdot \lambda B\Gamma}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{2\lambda}{3}$$

$$\Leftrightarrow (B\Delta E) = \frac{2\lambda}{3}(AB\Gamma) \quad (1)$$

Η $\hat{\Gamma}$ κοινή στα τρίγωνα $\Gamma\hat{E}Z$ και $A\hat{B}\Gamma$ άρα:

$$\frac{(\Gamma EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma Z \cdot \Gamma E}{B\Gamma \cdot A\Gamma} = \frac{\lambda \cancel{\Gamma A} \cdot (B\Gamma - BE)}{B\Gamma \cdot \cancel{A\Gamma}} = \frac{\lambda(B\Gamma - \lambda B\Gamma)}{B\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow (\Gamma EZ) = \lambda(1-\lambda)(AB\Gamma) \quad (2)$$

Άρα έχουμε: $\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{(AB\Gamma) - (A\Delta Z) - (B\Delta E) - (\Gamma EZ)}{(AB\Gamma)}$

$$= \frac{(AB\Gamma) - \frac{(1-\lambda)}{3}(AB\Gamma) - \frac{2\lambda}{3}(AB\Gamma) - (\lambda - \lambda^2)(AB\Gamma)}{(AB\Gamma)}$$

$$= \frac{\left[\frac{3 - (1-\lambda) - 2\lambda - 3(\lambda - \lambda^2)}{3}\right]\cancel{(AB\Gamma)}}{\cancel{(AB\Gamma)}} = \frac{3 - 1 + \lambda - 2\lambda - 3\lambda + 3\lambda^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{3\lambda^2 - 4\lambda + 2}{3}$$

(γ) Απο το (β) έχουμε: $(\Delta EZ) = (3\lambda^2 - 4\lambda + 2) \cdot \frac{(AB\Gamma)}{3}$

Το $\frac{(AB\Gamma)}{3}$ είναι σταθερό, άρα το (ΔEZ) γίνεται ελάχιστο, όταν το τριώνυμο $3\lambda^2 - 4\lambda + 2$ παρει την ελάχιστη τιμή του, δηλαδή όταν:

$$\lambda = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$