ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10^{ο}
ΕΜΒΑΔΑ
10.4 ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ 1

Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο με πλευρές α, β και γ. Συμβολίζουμε με τα την **ημιπερίμετρο** του ΑΒΓ, δηλαδή: $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.

Το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον παρακάτω τύπο, που είναι γνωστός ως **τύπος του Ήρωνα**: $\mathrm{E} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$.

Απόδειξη

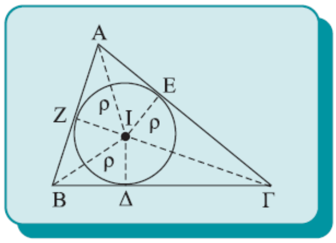
Στην παράγραφο 9.4 (Εφαρμογή 2) αποδείξαμε ότι $\upsilon_\alpha = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$,

οπότε έχουμε: $\mathrm{E} = \dfrac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha\dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$.

ΘΕΩΡΙΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Τότε το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $\mathrm{E} = \tau\rho$.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (Ι , ρ). Φέρουμε τα τμήματα ΙΑ, ΙΒ και ΙΓ και έτσι το τρίγωνο χωρίζεται στα τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΓΑ και ΙΑΒ που έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε έχουμε: $\mathrm{E} = (\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{IB\Gamma}) + (\mathrm{I\Gamma A}) + (\mathrm{IAB})$

$= \dfrac{1}{2}\alpha\rho + \dfrac{1}{2}\beta\rho + \dfrac{1}{2}\gamma\rho = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\rho = \dfrac{1}{2}2\tau\rho = \tau\rho$.

ΘΕΩΡΙΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Τότε το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $\mathrm{E} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$.

Απόδειξη

Είναι γνωστό από την εφαρμογή 5 στην παράγραφο 8.2, ότι: $\upsilon_\alpha = \dfrac{\beta\gamma}{2R}$.

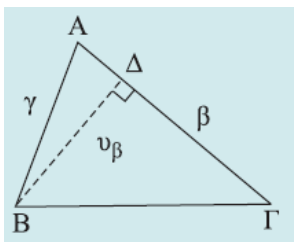
Με αντικατάσταση στον τύπο: $\mathrm{E} = \dfrac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha\dfrac{\beta\gamma}{2R} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$.

ΘΕΩΡΙΑ 4 (Τριγωνομετρικός τύπος εμβαδού τριγώνου)

Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\beta\gamma\cdot\eta\mu\mathrm{A} = \frac{1}{2}\alpha\gamma\cdot\eta\mu\mathrm{B} = \frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\eta\mu\Gamma.$$

Απόδειξη

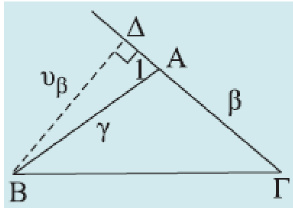


Φέρουμε το ύψος $\mathrm{B\Delta} = \upsilon_\beta$.

Αν $\widehat{\mathrm{A}} < 90^o$, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ έχουμε:

$\eta\mu\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \eta\mu\mathrm{A} = \dfrac{\upsilon_\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \upsilon_\beta = \gamma\cdot\eta\mu\mathrm{A}$.

Αν $\widehat{A} > 90^o$, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ έχουμε:



$$\eta\mu A_1 = \frac{B\Delta}{AB} \Leftrightarrow \eta\mu(180^o - A) = \frac{\upsilon_\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{\upsilon_\beta}{\gamma}.$$

$\Leftrightarrow \upsilon_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$.

Αν $\widehat{A} = 90^o$, τότε $\upsilon_\beta = \gamma = \gamma \cdot \eta\mu 90^o = \gamma \cdot \eta\mu A$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u>

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

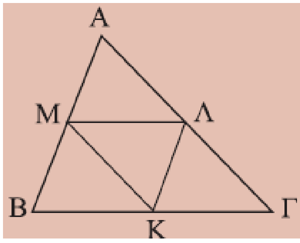
Από τις ισότητες: $E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A$ και $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$, έχουμε ότι:

$\dfrac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow \eta\mu A = \dfrac{\alpha}{2R} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R$. Όμοια προκύπτει:

$\dfrac{\beta}{\eta\mu B} = 2R$ και $\dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$, από τις οποίες προκύπτει το ζητούμενο.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 13, β = 14 και γ = 15.
Να υπολογίσετε:
(α) Το εμβαδόν του, (β) Τα ύψη του,
(γ) Τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου,



(δ) Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ.

<u>ΛΥΣΗ</u>

(α) Έχουμε ότι: $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow \tau = \dfrac{13+14+15}{2} = \dfrac{42}{2} = 21$.

Άρα έχουμε: $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$ και

$= \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84$.

(β) Έχουμε ότι: $E = \dfrac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha \Leftrightarrow 84 = \dfrac{1}{2}13\upsilon_\alpha \Leftrightarrow \upsilon_\alpha = \dfrac{168}{13}$. Όμοια έχουμε ότι:

$E = \dfrac{1}{2}\beta\upsilon_\beta \Leftrightarrow 84 = \dfrac{1}{2}14\upsilon_\beta \Leftrightarrow \upsilon_\beta = 12$ και $E = \dfrac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma \Leftrightarrow 84 = \dfrac{1}{2}15\upsilon_\gamma \Leftrightarrow \upsilon_\gamma = \dfrac{56}{5}$.

(γ) Έχουμε ότι: $E = \tau \cdot \rho \Leftrightarrow 84 = 21 \cdot \rho \Leftrightarrow \rho = 4$.

Επίσης έχουμε ότι: $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow 84 = \dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{4R} \Leftrightarrow R = \dfrac{13\cdot 14\cdot 15}{84\cdot 4} \Leftrightarrow R = \dfrac{65}{8}$.

(δ) Έχουμε ότι: $M\Lambda = \dfrac{13}{2}$, $M\Lambda = 7$ και $M\Lambda = \dfrac{15}{2}$. Άρα προκύπτει ότι:

$\tau = \dfrac{\frac{13}{2}+7+\frac{15}{2}}{2} \Leftrightarrow \tau = \dfrac{21}{2}$. Άρα έχουμε: $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

$$= \sqrt{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-\frac{13}{2}\right)\left(\frac{21}{2}-\frac{14}{2}\right)\left(\frac{21}{2}-\frac{15}{2}\right)} = \sqrt{\frac{21}{2}\cdot 4\cdot\frac{7}{2}\cdot 3} = \sqrt{21\cdot 7\cdot 3} = \sqrt{21^2} = 21.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Με τη βοήθεια του τύπου: $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu\mathrm{A}$, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E} \le \frac{1}{2}\beta\gamma$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

Άσκηση 2

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ) = 9 και ρ = 1,5. Ποια είναι η περίμετρός του;

Άσκηση 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\beta = 6$, $\gamma = 4$ και $\widehat{\mathrm{A}} = 30^o$. Να υπολογίσετε:

(α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

(β) Τα ύψη υ_β και υ_γ του τριγώνου ΑΒΓ.

Άσκηση 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με εμβαδόν 8 τ.μ., στο οποίο ισχύουν $\mathrm{A\Gamma} = 2\mathrm{AB}$ και $\widehat{\mathrm{A}} = 150^o$. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ.

Άσκηση 5

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\alpha = 10$, $\beta = 12$ και $\gamma = 14$. Να υπολογίσετε:

(α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

(β) Την ακτίνα του εγγεγραμμένου και την ακτίνα του περιγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ

(γ) Το ημΓ.

Άσκηση 6

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\mathrm{AB} = 4$, $\mathrm{A\Gamma} = 7$ και $\widehat{\mathrm{A}} = 60^o$. Να βρείτε το εμβαδόν του.

Άσκηση 7

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{\mathrm{A}} = 90^o$), με $\mathrm{AB} = 6$ και $\mathrm{A\Gamma} = 8$.

Να βρείτε:

(α) Το εμβαδόν, (β) Το ύψος υ_α,

(γ) Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου.

Άσκηση 8

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = 1$ και $\mathrm{B\Gamma} = \sqrt{3}$.

Να υπολογίσετε:

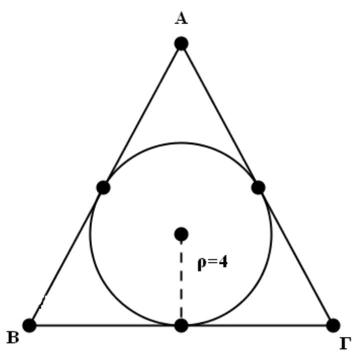
(α) Τη γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$, (β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

(γ) Τη διάμεσο $\mathrm{BM} = \mu_\beta$.

Άσκηση 9

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α, του οποίου ο εγγεγραμμένος κύκλος έχει ακτίνα $\rho = 4$.

Να βρείτε την πλευρά και το εμβαδόν του ΑΒΓ.

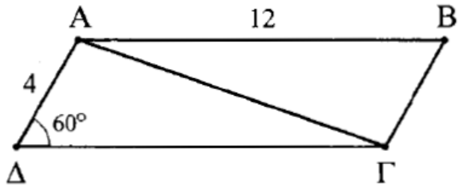


Άσκηση 10

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\alpha = 6$, $\gamma = 4$ και εμβαδόν $\mathrm{E} = 6\sqrt{3}$ τ.μ.
Να υπολογίσετε:
(α) Τη γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$, (β) Τη πλευρά β,
(γ) Την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Άσκηση 11

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με $\mathrm{AB} = 12$, $\mathrm{A\Delta} = 4$ και $\widehat{\Delta} = 60^o$.



Να υπολογίσετε:
(α) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ,
(β) Το μήκος της διαγωνίου ΑΓ,
(γ) Την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΓΔ.

Άσκηση 12

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$, να αποδείξετε ότι: $\widehat{\mathrm{A}} = 90^o$.

Άσκηση 13

Αν Ε το εμβαδόν του τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ, να αποδείξετε ότι:
(i) $\mathrm{E} < \tau(\tau - \alpha) \Leftrightarrow \mathrm{A} < 90^o$, (ii) $\mathrm{E} = \tau(\tau - \alpha) \Leftrightarrow \mathrm{A} = 90^o$, (iii) $\mathrm{E} > \tau(\tau - \alpha) \Leftrightarrow \mathrm{A} > 90^o$.

Άσκηση 14

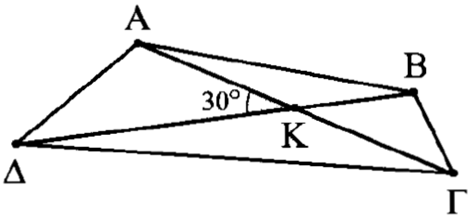
Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο να αποδείξετε
ότι: $\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'})} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}$.

Άσκηση 15

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγράψιμο σε κύκλο. Αν θέσουμε $\mathrm{AB} = \alpha$, $\mathrm{B\Gamma} = \beta$,
$\Gamma\Delta = \gamma$ και $\Delta\mathrm{A} = \delta$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Delta}} = \dfrac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta}$.

Άσκηση 16

Οι διαγώνιοι κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ σχηματίζουν γωνία 30^o.



Να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \dfrac{\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}}{4}$.

Άσκηση 17

Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου ΑΒΓ,
να αποδείξετε ότι: $\rho = \dfrac{\beta\gamma \cdot \eta\mu\mathrm{A}}{\alpha + \beta + \gamma}$.

Άσκηση 18

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του $\mathrm{AM}=\mu_\alpha$. Αν R, R_1 και R_2 είναι οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΜ και ΑΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $\beta R_1=\gamma R_2=\mu_\alpha R$.

Άσκηση 19

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\widehat{\mathrm{B}}=60^o$, και έστω δ_β η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$.

Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{3}}{\delta_\beta}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\gamma}$.

Άσκηση 20

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με εμβαδόν Ε, στο οποίο ισχύει ότι: $\dfrac{1}{\eta\mu\mathrm{B}}+\dfrac{1}{\eta\mu\Gamma}=\dfrac{\alpha^2}{\mathrm{E}}$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\beta+\gamma=2\alpha$,

(β) $\rho R=\dfrac{\beta\gamma}{6}$, όπου ρ και R οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ,

(γ) $\dfrac{1}{\upsilon_\beta}+\dfrac{1}{\upsilon_\gamma}=\dfrac{2}{\upsilon_\alpha}$.

Άσκηση 21

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\mathrm{AB}=5$, $\mathrm{A}\Gamma=12$, $\mathrm{B}\Gamma=13$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\widehat{\mathrm{A}}=90^o$,

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(γ) Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΒ

(δ) Αν Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ, να βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΜΑΓ.

Άσκηση 22

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\beta=14$, $\gamma=12$ και εμβαδόν $\mathrm{E}=24\sqrt{10}$ τ.μ, ενώ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι $\rho=\sqrt{10}$. Να υπολογίσετε:

(α) Το μήκος της πλευράς α,

(β) Την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ,

(γ) Το μήκος της διαμέσου ΑΜ,

(δ) Την ακτίνα του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΜΒ.

Άσκηση 23

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με μήκη πλευρών $\beta=1+\sqrt{2}$, $\gamma=2$ και εμβαδόν $(\mathrm{AB}\Gamma)=\dfrac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$.

(α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς α είναι ίσο με $\sqrt{3}$,

(β) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ,

(γ) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στην πλευρά ΒΓ.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 10.4
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1

$E \leq \frac{1}{2}\beta\cdot\gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}\beta\cdot\gamma\,\eta\mu A \leq \frac{1}{2}\beta\gamma \Leftrightarrow \eta\mu A \leq 1$, αφού $\hat{A} < 180^\circ$

Ισότητα: $E = \frac{1}{2}\beta\cdot\gamma \Leftrightarrow \eta\mu A = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 90^\circ}$

Άσκηση 2

Ισχύει $(AB\Gamma) = \tau\rho \Leftrightarrow 9 = \tau\cdot 1{,}5 \Leftrightarrow \tau = 6$

Άρα $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 6 \Leftrightarrow \boxed{\Pi = 12}$

Άσκηση 3

(α) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta\cdot\gamma\,\eta\mu A = \frac{1}{2}6\cdot 4\cdot\eta\mu 30^\circ = 6$ τμ

(β) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\upsilon_\beta = 6 \Leftrightarrow \boxed{\upsilon_\beta = 2}$

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\gamma\cdot\upsilon_\gamma = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\upsilon_\gamma = 6 \Leftrightarrow \boxed{\upsilon_\gamma = 3}$

Άσκηση 4

$(AB\Gamma) = 8$ τμ, $A\Gamma = 2AB$ και $\hat{A} = 150^\circ$

Ισχύει: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}A\Gamma\cdot AB\cdot\eta\mu\hat{A} \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2}2\cdot AB\cdot AB\cdot\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow AB = 4$ άρα $A\Gamma = 8$

Άσκηση 5

$\alpha = 10$, $\beta = 12$ και $\gamma = 14$

(α) $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{10+12+14}{2} = 18$

$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{18(18-10)(18-12)(18-14)}$

(2)

$$= \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \sqrt{6}$$

$= 24\sqrt{6}$ τμ

Ακτίνα εγγεγραμμένου: $E = \tau \cdot \rho \Leftrightarrow 24\sqrt{6} = 18 \cdot \rho$

$\Leftrightarrow \rho = \frac{4}{3}\sqrt{6}$

Ακτίνα περιγεγραμμένου: $E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R} \Leftrightarrow 24\sqrt{6} = \frac{10 \cdot 12 \cdot 14}{4R}$

$\Leftrightarrow R = \frac{5 \cdot 7 \cdot 12}{24\sqrt{6}} \Leftrightarrow R = \frac{35}{2\sqrt{6}} \Leftrightarrow R = \frac{35\sqrt{6}}{12}$

(γ) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu\Gamma \Leftrightarrow 24\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12\, \eta\mu\Gamma$

$\Leftrightarrow 5\,\eta\mu\Gamma = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \eta\mu\Gamma = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

Άσκηση 6

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$ τ.μ.

Άσκηση 7

(i) $E = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 = 24$ τ.μ

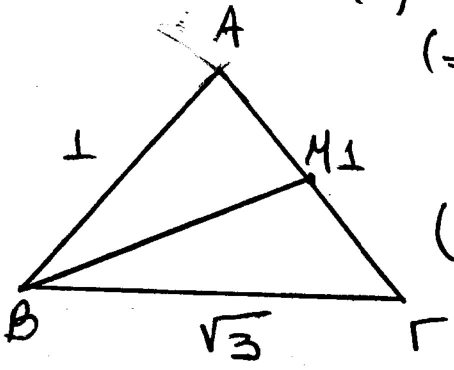
(ii) $E = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot U_a$. Από το Π.Θ $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow B\Gamma = 10$

$\Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot U_a \Leftrightarrow \boxed{U_a = \frac{24}{5}}$

(iii) $E = \tau \rho \Leftrightarrow 24 = 12 \cdot \rho \Leftrightarrow \boxed{\rho = 2}$

$\tau = \frac{10+8+6}{2} = 5+4+3 = 12$

Άσκηση 8



(α) $BΓ^2 = AB^2 + AΓ^2 - 2AB\cdot AΓ\cdot συν\hat{A}$

$\Leftrightarrow 3 = 1 + 1 - 2\cdot συν\hat{A} \Leftrightarrow συν\hat{A} = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{\hat{A} = 120°}$

(β) $E = \frac{1}{2}AB\cdot AΓ\cdot ημ\hat{A} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot ημ120°$

$\Leftrightarrow E = \frac{\sqrt{3}}{4}$ τ.μ

(γ) $BM^2 = \frac{2AB^2 + 2BΓ^2 - AΓ^2}{4} = \frac{2\cdot 1 + 2\cdot 3 - 1}{4} = \frac{7}{4}$

$\Leftrightarrow BM = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Άσκηση 9

$E = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ και $E = τ\cdot ρ$ άρα $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = τ\cdot ρ$

$\Leftrightarrow \frac{a^{\cancel{2}}\sqrt{3}}{4} = \frac{3\cancel{a}}{2}\cdot \overset{2}{\cancel{4}} \Leftrightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{24\cdot\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 8\cdot\sqrt{3}$

Άρα $E = \frac{64\cdot 3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow E = 48\sqrt{3}$ τ.μ

Άσκηση 10

$a = 6,\ γ = 4$ και $E = 6\sqrt{3}$

(α) $E = \frac{1}{2}aγ\cdot ημB \Leftrightarrow \cancel{6}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot\cancel{6}\cdot 4\cdot ημ\hat{B}$

$\Leftrightarrow ημ\hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 60°$

(β) $β^2 = a^2 + γ^2 - 2aγ\ συν\hat{B} \Leftrightarrow β^2 = 36 + 16 - \cancel{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{1}{\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow β^2 = 28 \Leftrightarrow \boxed{β = 2\sqrt{7}}$

(γ) $E = \dfrac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{4R} \Leftrightarrow \cancel{6}\sqrt{3} = \dfrac{\cancel{6}\cdot\cancel{4}\cdot 2\sqrt{7}}{\cancel{4}R} \Leftrightarrow R = \dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow E = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

Άσκηση 11

(α) $(\mathrm{A\Delta\Gamma}) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}\,\eta\mu\hat{\Delta} = \dfrac{1}{2}\,4\cdot 12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

άρα $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = 24\sqrt{3}$ τ.μ

(β) $\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{\Delta\Gamma}^2 - 2\,\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}\,\sigma\upsilon\nu\hat{\Delta}$

$\Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}^2 = 16 + 144 - 2\cdot 4\cdot 12\,\dfrac{1}{2} = 160 - 48$

$\Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}^2 = 112 \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{A\Gamma} = 4\sqrt{7}}$

(γ) $E = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}}{4R} \Leftrightarrow 12\cdot\sqrt{3} = \dfrac{12\cdot\cancel{4}\cdot 4\sqrt{7}}{\cancel{4}R}$

$\Leftrightarrow R = \dfrac{12\cdot 4\cdot\sqrt{7}}{12\cdot\sqrt{3}} \Leftrightarrow R = \dfrac{4\sqrt{21}}{3}$

Άσκηση 12

$E = \dfrac{1}{2}\beta\cdot\gamma\,\eta\mu A \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu\hat{A}$

$\Leftrightarrow \eta\mu\hat{A} = 1$, αφού $\beta\gamma = \alpha\cdot\upsilon_\alpha$

Όμως $0 < \hat{A} < 180^\circ$ άρα $\boxed{\hat{A} = 90^\circ}$

Άσκηση 13

(i) $E < \tau(\tau-a) \Leftrightarrow \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} < \tau(\tau-a)$

$\Leftrightarrow \cancel{\tau}\cancel{(\tau-a)}(\tau-\beta)(\tau-\gamma) < \tau^2(\tau-a)^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a+\beta+\gamma-2\beta}{2}\right)\left(\dfrac{a+\beta+\gamma-2\gamma}{2}\right) < \left(\dfrac{a+\beta+\gamma-2a}{2}\right)\left(\dfrac{a+\beta+\gamma}{2}\right)$

$\Leftrightarrow (a-\beta+\gamma)(a+\beta-\gamma) < (\beta+\gamma-a)(\beta+\gamma+a)$

$\Leftrightarrow [a-(\beta-\gamma)][a+(\beta-\gamma)] < (\beta+\gamma)^2-a^2$

$\Leftrightarrow a^2-(\beta-\gamma)^2 < \beta+\gamma-a \Leftrightarrow a^2-\beta^2-\gamma^2+\cancel{2\beta\gamma} < \beta^2+\gamma^2+\cancel{2\beta\gamma}-a^2$

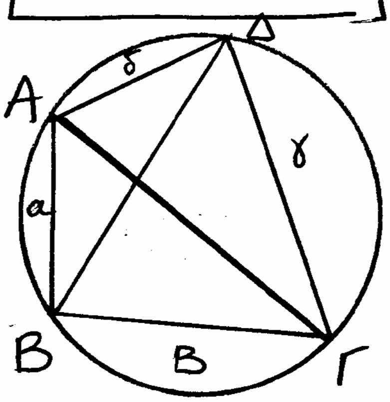
$\Leftrightarrow 2a^2 < 2\beta^2+2\gamma^2 \Leftrightarrow a^2 < \beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$

(ii), (iii) $\rightarrow$ Όμοια.

Άσκηση 14

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\dfrac{a\cdot\beta\cdot\gamma}{4R}}{\dfrac{a'\beta'\cdot\gamma'}{4R}} = \frac{a\beta\cdot\gamma}{a'\beta'\cdot\gamma'}$$

Άσκηση 15



Έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

• $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Delta) + (B\Gamma\Delta)$

$$= \frac{a\cdot\delta\cdot B\Delta}{4R} + \frac{\beta\cdot\gamma\cdot B\Delta}{4R} = \frac{(a\cdot\delta+\beta\gamma)}{4R}\cdot B\Delta \quad (1)$$

$$\bullet\ (AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma) = \frac{\alpha\cdot\beta\cdot A\Gamma}{4R} + \frac{\gamma\cdot\delta\cdot A\Gamma}{4R}$$

$$= \frac{\alpha\cdot\beta + \gamma\cdot\delta}{4R}\cdot A\Gamma \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε: $\dfrac{\alpha\cdot\delta + \beta\cdot\gamma}{4R}\cdot B\Delta = \dfrac{\alpha\beta + \gamma\delta}{4R}\cdot A\Gamma$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha\cdot\delta + \beta\cdot\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta} = \frac{A\Gamma}{B\Delta}.$$

Άσκηση 16

$$(AB\Gamma\Delta) = (KAB) + (KB\Gamma) + (K\Gamma\Delta) + (K\Delta A)$$

$$= \frac{1}{2}KA\cdot KB\cdot \eta\mu 150^\circ + \frac{1}{2}KB\cdot K\Gamma \eta\mu 30^\circ +$$

$$+ \frac{1}{2}K\Gamma\cdot KA\, \eta\mu 150^\circ + \frac{1}{2}KA\cdot K\Delta\, \eta\mu 30^\circ$$

$$= + \frac{1}{4}KA\cdot KB + \frac{1}{4}KB\cdot K\Gamma + \frac{1}{4}K\Gamma\cdot K\Delta + \frac{1}{4}KA\cdot K\Delta$$

$$= \frac{1}{4}KB(KA + K\Gamma) + \frac{1}{4}K\Delta(K\Gamma + KA)$$

$$= \frac{1}{4}(KA + K\Gamma)(KB + K\Delta) = \frac{A\Gamma + B\Delta}{4}$$

Άσκηση 17

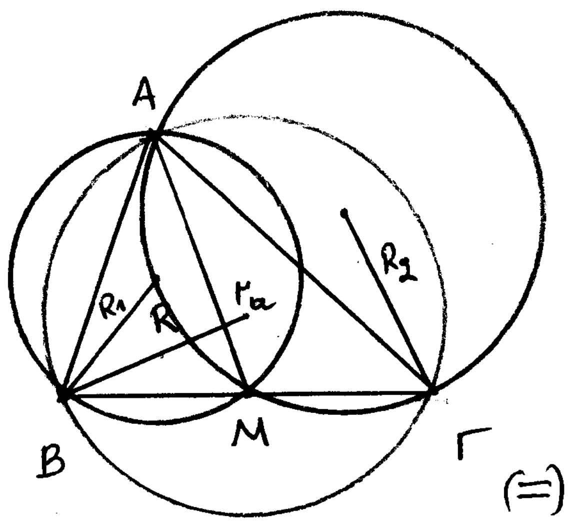
$E = \frac{1}{2}\beta\cdot\gamma\,\eta\mu A$, $E = \tau\cdot\rho$

Άρα $\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma\,\eta\mu A = \left(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\rho$

$$\Leftrightarrow \quad \rho = \frac{\beta\cdot\gamma\,\eta\mu A}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Άσκηση 18

Ν.δ.ο: $\beta R_1 = \gamma R_2 = \mu_\alpha R$



Αφού η ΑΜ είναι διάμεσος

έχουμε: $(AB M) = (AM\Gamma)$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma\cdot\mu_\alpha\cdot\frac{\alpha}{2}}{4R_1} = \frac{\mu_\alpha\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\beta}{4R_2}$$

$$\Leftrightarrow \gamma\cdot\cancel{\mu_\alpha}\cdot\cancel{\frac{\alpha}{2}}\cdot R_2 = \cancel{\mu_\alpha}\cdot\cancel{\frac{\alpha}{2}}\cdot\beta\cdot R_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\beta R_1 = \gamma\cdot R_2}\ (1)$$

Έχουμε: $2(ABM) = (AB\Gamma) \Leftrightarrow \dfrac{2\gamma\cdot\mu_\alpha\cdot\frac{\alpha}{2}}{4R_1} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

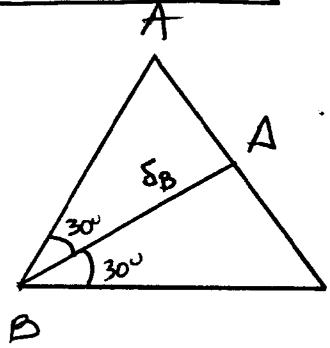
$$\Leftrightarrow \frac{\gamma\cdot\mu_\alpha\cdot\alpha}{4R_1} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow \cancel{\gamma}\cdot\mu_\alpha\cdot\cancel{\alpha}\cdot R = \cancel{\alpha}\beta\cancel{\gamma}\cdot R_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\beta R_1 = \mu_\alpha\cdot R}\ (2)$$

Από (1), (2) έχουμε: $\beta\cdot R_1 = \gamma R_2 = \mu_\alpha\cdot R$

Άσκηση 19

Ν.δ.ο: $\dfrac{\sqrt{3}}{\delta_B} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\gamma}$



$(AB\Gamma) = (AB\Delta) + (B\Gamma\Delta)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha\gamma\,\eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2}\gamma\cdot\delta_B\,\eta\mu 30^\circ + \frac{1}{2}\delta_B\cdot\alpha\,\eta\mu 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\,\alpha\gamma = \gamma\cdot\delta_B + \delta_B\cdot\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}\cancel{\alpha\gamma}}{\cancel{\alpha\gamma}\cdot\delta_B} = \frac{\cancel{\gamma}\cdot\cancel{\delta_B}}{\alpha\cancel{\gamma}\cdot\cancel{\delta_B}} + \frac{\cancel{\delta_B}\cdot\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}\gamma\cdot\cancel{\delta_B}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\delta_B} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$$

Άσκηση 20

Ισχύει: $\dfrac{1}{\eta\mu B} + \dfrac{1}{\eta\mu \Gamma} = \dfrac{\alpha^2}{E}$ (1)

(α) Ισχύει ότι: $\dfrac{\beta}{\eta\mu B} = 2R \Leftrightarrow \dfrac{1}{\eta\mu B} = \dfrac{2R}{\beta}$

Η (1) γίνεται: $\dfrac{2R}{\beta} + \dfrac{2R}{\gamma} = \dfrac{\alpha^2}{\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}} \Leftrightarrow \dfrac{2R}{\beta} + \dfrac{2R}{\gamma} = \dfrac{4R\alpha^{\cancel{2}}}{\cancel{\alpha}\beta\gamma}$

$\Leftrightarrow 2\cancel{R}\gamma + 2\cancel{R}\beta = 4\cancel{R}\alpha \Leftrightarrow \boxed{\beta+\gamma = 2\alpha}$ (2)

(β) Έχουμε $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow R = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4E}$ και $E = \tau\rho \Leftrightarrow \rho = \dfrac{E}{\tau}$

Άρα έχουμε: $\rho R = \dfrac{\cancel{E}}{\tau} \cdot \dfrac{\alpha\beta\cdot\gamma}{4\cancel{E}} = \dfrac{\alpha\beta\cdot\gamma}{4\tau} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)}$

$= \dfrac{\alpha\beta\gamma}{2(\alpha+\beta+\gamma)} \overset{(2)}{=} \dfrac{\alpha\beta\gamma}{2(\alpha+2\alpha)} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{6\alpha} = \dfrac{\beta\gamma}{6}$

(γ) $E = \dfrac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha \Leftrightarrow \upsilon_\alpha = \dfrac{2E}{\alpha}$. Όμοια: $\upsilon_\beta = \dfrac{2E}{\beta}$ και $\upsilon_\gamma = \dfrac{2E}{\gamma}$

Έχουμε: $\dfrac{1}{\upsilon_\beta} + \dfrac{1}{\upsilon_\gamma} = \dfrac{\beta}{2E} + \dfrac{\gamma}{2E} = \dfrac{\beta+\gamma}{2E} \overset{(2)}{=} \dfrac{\alpha}{E} = \dfrac{2}{\upsilon_\alpha}$

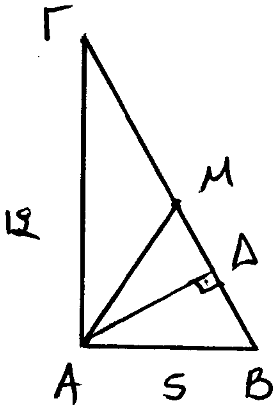
Άσκηση 21

(α) $B\Gamma^2 = 13^2 = 169$, $AB^2 + A\Gamma^2 = 25 + 144 = 169$

άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90°$

(β) $E = \dfrac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ τμ

(γ)



$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΔ$$

$$\Leftrightarrow 30 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot ΑΔ \Leftrightarrow \boxed{ΑΔ = \frac{60}{13}}$$

$$ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ \Leftrightarrow 25 = 13 \cdot ΒΔ \Leftrightarrow \boxed{ΒΔ = \frac{25}{13}}$$

άρα $(ΑΔΒ) = \frac{1}{2} ΒΔ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{13} \cdot \frac{60}{13} = \frac{750}{169}$ τ.μ.

(δ) $(ΜΑΓ) = \frac{1}{2} (ΑΒΓ) = 15$ τ.μ $\Leftrightarrow \frac{ΜΑ \cdot ΜΓ \cdot ΓΑ}{4R} = 15$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{13}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot 12}{15} = 4R \Leftrightarrow 3 \cdot 169 = 60R$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{169}{20}$$

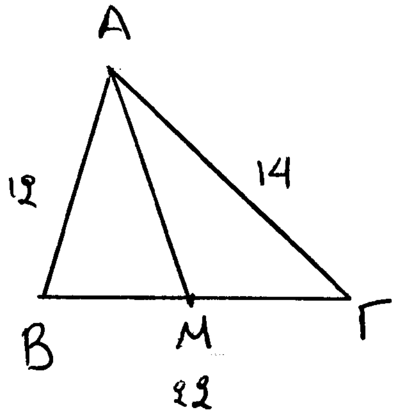
Άσκηση 22 $β = 14,\ γ = 12$

(α) $E = τ \cdot ρ \Leftrightarrow τ = \frac{24\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow τ = 24 \Leftrightarrow \frac{α+β+γ}{2} = 24$

$$\Leftrightarrow α + 14 + 12 = 48 \Leftrightarrow \boxed{α = 22}$$

(β) $E = \frac{αβγ}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{22 \cdot \cancel{14}^{7} \cdot \cancel{12}}{4 \cdot \cancel{24}\sqrt{10}} = \frac{77\sqrt{10}}{20}$

(γ)



$$ΑΜ^2 = \frac{2ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 - ΒΓ^2}{4} = \frac{2 \cdot 144 + 2 \cdot 196 - 484}{4}$$

$$= \frac{288 + 392 - 484}{4} = 49$$

$$\Leftrightarrow \boxed{ΑΜ = 7}$$

(δ) $(AMB) = \frac{AM+MB+BA}{2}\cdot \rho' \Leftrightarrow 12\sqrt{10} = \frac{7+11+12}{2}\cdot \rho'$ (10)

$\Leftrightarrow \rho' \cdot 30 = 24\sqrt{10} \Leftrightarrow \rho' = \frac{4\sqrt{10}}{5}$

$(AMB) = \frac{AM\cdot MB\cdot BA}{4R'} \Leftrightarrow 12\sqrt{10} = \frac{7\cdot 11\cdot \overset{3}{\cancel{12}}}{\cancel{4}R} \Leftrightarrow R = \frac{7\cdot 11\cdot 3}{12\sqrt{10}}$

$\Leftrightarrow R = \frac{77\sqrt{10}}{40}$

Άσκηση 23 $\gamma = 2,\ \beta = 1+\sqrt{2},\ (AB\Gamma) = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$

(α) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu\hat{A} \Leftrightarrow \frac{\beta\cdot\gamma\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\beta\cdot\gamma\,\eta\mu A$

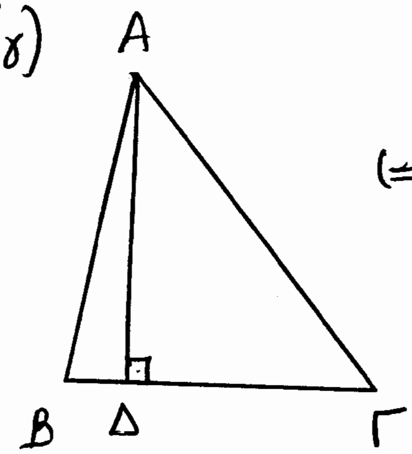
$\Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 45^\circ$

Άρα $a^2 = \beta^2+\gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu\hat{A} \Leftrightarrow a^2 = 1+2+2\sqrt{2}+4-2\cdot\cancel{2}(1+\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow a^2 = 3+\cancel{2\sqrt{2}}+\cancel{4}-\cancel{2\sqrt{2}}-\cancel{4} \Leftrightarrow \boxed{a=\sqrt{3}}$

(β) $(AB\Gamma) = \frac{a\cdot\beta\cdot\gamma}{4R} \Leftrightarrow \frac{\cancel{\beta}\cancel{\gamma}\sqrt{2}}{\cancel{4}} = \frac{a\cancel{\beta}\cancel{\gamma}}{\cancel{4}R} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(γ)



$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma\cdot B\Delta$

$\Leftrightarrow (1+\sqrt{2})^2 = 2^2 + 3 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot B\Delta$

$\Leftrightarrow \cancel{1}+\cancel{2}+2\sqrt{2} = 4+\cancel{3}-2\sqrt{3}\cdot B\Delta$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\,B\Delta = 4-2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow B\Delta = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{B\Delta = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}}$