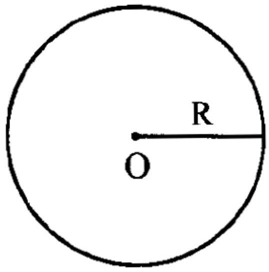
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11^{Ο}
ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ
11.6 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ
11.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ
11.8 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΚΥΚΛΟΥ



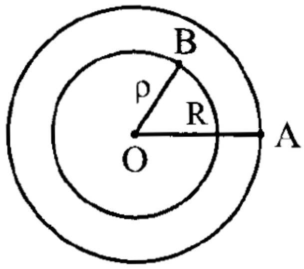
ΘΕΩΡΙΑ 1 (Εμβαδόν κυκλικού δίσκου)

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο, R). Ο κύκλος αυτός μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν τον **κυκλικό δίσκο** με κέντρο Ο και ακτίνα R.

Θεώρημα

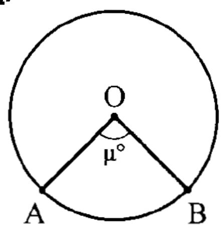
Το εμβαδόν Ε ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R δίνεται από την σχέση: $\mathrm{E} = \pi R^2$.

Κυκλικός Δακτύλιος



Έστω (Ο, R) και (Ο, ρ) δύο ομόκεντροι κύκλοι, με $R > \rho$. Το μέρος του κυκλικού δίσκου (Ο, R) στο οποίο δεν ανήκουν τα εσωτερικά σημεία του κύκλου (Ο, ρ). λέγεται **κυκλικός δακτύλιος**. Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (Ο, R) και (Ο, ρ) ισούται με: $\mathrm{E} = \pi R^2 - \pi \rho^2$.

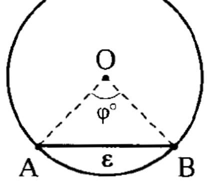
ΘΕΩΡΙΑ 2 (Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος)



Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο, R) και μια επίκεντρη γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$. Το σύνολο των κοινών σημείων του κυκλικού δίσκου (Ο, R) και της επίκεντρης γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ λέγεται **κυκλικός τομέας** κέντρου Ο και ακτίνας R και συμβολίζεται με $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}}$. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα, όταν η γωνία του είναι σε μοίρες (μ^o) δίνεται από τον τύπο: $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}} = \dfrac{\pi R^2 \mu^o}{360^o}$.

Ενώ όταν δίνεται σε rad έχουμε τον τύπο: $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{2}\alpha R^2$.

Κυκλικό Τμήμα



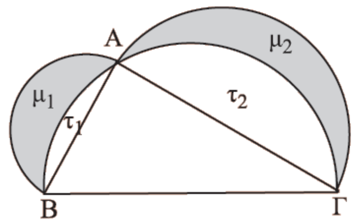
Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο, R) και μια χορδή του ΑΒ. Η χορδή ΑΒ χωρίζει τον κυκλικό δίσκο σε δύο μέρη. Καθένα από αυτά λέγεται **κυκλικό τμήμα**.
Το εμβαδόν ε του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ υπολογίζεται αφαιρώντας από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}}$ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ. Δηλαδή είναι: $\varepsilon = (\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}}) - (\mathrm{OAB})$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{\mathrm{A}} = 90^o)$. Με διαμέτρους ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ γράφουμε ημικύκλια στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α). Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
(Μηνίσκος είναι το σχήμα που <<περικλείεται>> από δύο τόξα που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της).

ΛΥΣΗ

Συμβολίζουμε με μ_1, μ_2 τα εμβαδά των σχηματιζόμενων μηνίσκων τ_1, τ_2 τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων με χορδές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, το ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ.



Έχουμε:

$\mu_1 = (\mu_1 + \tau_1) - \tau_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2 - \tau_1 = \frac{1}{8}\pi\mathrm{AB}^2 - \tau_1$ και

$\mu_2 = (\mu_2 + \tau_2) - \tau_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}\right)^2 - \tau_2 = \frac{1}{8}\pi\mathrm{A\Gamma}^2 - \tau_2$, από τις οποίες, χρησιμοποιώντας και τη σχέση: $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2$ βρίσκουμε:

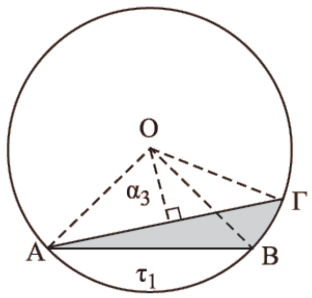
$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{8}\pi(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2) - (\tau_1 + \tau_2) = \frac{1}{8}\pi(\mathrm{B\Gamma}^2) - (\tau_1 + \tau_2) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}\right)^2 - (\tau_1 + \tau_2) =$$
$$= (\mathrm{AB\Gamma}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και δύο χορδές του $\mathrm{AB} = R\sqrt{2}$ και $\mathrm{A\Gamma} = R\sqrt{3}$. Να υπολογισθεί η περίμετρος και το εμβαδόν Ε του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.

ΛΥΣΗ

Επειδή $\mathrm{AB} = R\sqrt{2}$ και $\mathrm{A\Gamma} = R\sqrt{3}$, έχουμε αντίστοιχα $\mathrm{AB} = \lambda_4$ και $\mathrm{A\Gamma} = \lambda_3$, $\mathrm{A\widehat{O}B} = 90^o$ και $\mathrm{A\widehat{O}\Gamma} = 120^o$ και επομένως $\mathrm{B\widehat{O}\Gamma} = 30^o$. Έτσι το μήκος l του τόξου $\widehat{\mathrm{B\Gamma}}$ είναι $l = \frac{\pi R \cdot 30}{180} = \frac{\pi R}{6}$. Άρα η περίμετρος S του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ είναι:



$$S = R\sqrt{2} + R\sqrt{3} + \frac{\pi R}{6} = R\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right).$$

Για το εμβαδόν Ε έχουμε: $\mathrm{E} = (\mathrm{O\widehat{A\Gamma}}) - (\mathrm{OA\Gamma}) - \tau_1$ (1), όπου τ_1 το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος με χορδή ΑΒ. Έχουμε: $(\mathrm{O\widehat{A\Gamma}}) = \frac{\pi R^2 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$,

$(\mathrm{OA\Gamma}) = \frac{1}{2}\lambda_3\alpha_3 = \frac{1}{2}R\sqrt{3}\frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ και

$\tau_1 = (\mathrm{O\widehat{AB}}) - (\mathrm{OAB}) = \frac{\pi R^2 90}{360} - \frac{1}{2}\lambda_4\alpha_4 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2}R\sqrt{2}\frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$,

οπότε αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε ότι: $\mathrm{E} = \frac{R^2}{12}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται κύκλος (O,R) και το ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε αυτόν. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

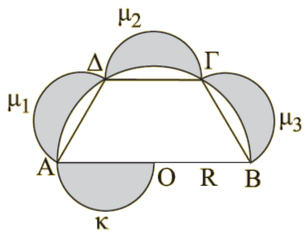
Άσκηση 2

Δίνεται κύκλος (K) και τόξο του $\widehat{AB} = 60^o$. Αν το τόξο $\widehat{AB}$ έχει μήκος 4π cm, να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου (K).

Άσκηση 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Γράφουμε τα τόξα των κύκλων (Α, α), (Β, α) και (Γ, α) που περιέχονται στις γωνίες $\widehat{A}, \widehat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Άσκηση 4

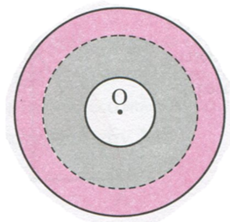


Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί ένα ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2R$ και εξωτερικά του τα ίσα ημικύκλια με διαμέτρους $OA, A\Delta$, $\Delta\Gamma$ και ΓB. Αν $(\mu_1), (\mu_2), (\mu_3)$ είναι τα εμβαδά των τριών σχηματιζόμενων μηνίσκων και (κ) το εμβαδόν του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι: $(\mu_1) + (\mu_2) + (\mu_3) + (\kappa) = (AB\Gamma\Delta)$.

Άσκηση 5

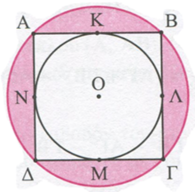
Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία Α, Β και Γ. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.

Άσκηση 6



Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, R) και (O, 3R). Ένας κύκλος (O, ρ) χωρίζει τον δακτύλιο μεταξύ των (O, R) και (O, 3R) σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την ακτίνα ρ συναρτήσει του R.

Άσκηση 7

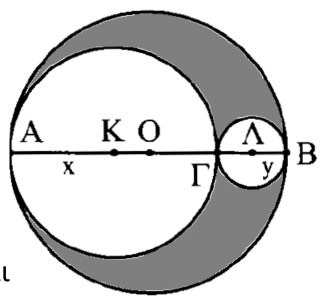


Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ και έστω (O, ρ) ο εγγεγραμμένος κύκλος του ΑΒΓΔ. Να βρείτε:

(α) Το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου συναρτήσει του R,

(β) Τον λόγο των εμβαδών των κύκλων (O, R) και (O, ρ).

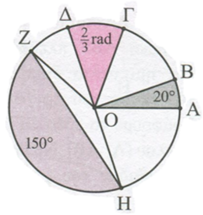
Άσκηση 8



Δίνεται κύκλος (O, R) και στο εσωτερικό του οι κύκλοι (K, x) και (Λ, y), με $x > y$, οι οποίοι εφάπτονται, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου ισούται με τα $\frac{3}{8}$ του εμβαδού του κύκλου (O, R). Να υπολογίσετε τις ακτίνες x και y συναρτήσει του R.

Άσκηση 9

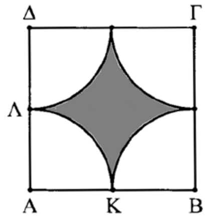
Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε τα τόξα: $\widehat{AB} = 20^o$, $\widehat{\Gamma\Delta} = \frac{2}{3} rad$ και $\widehat{ZH} = 150^o$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ισχύει ότι: $(O\widehat{AB}) = 2\pi cm^2$, να βρείτε:



(α) Την ακτίνα R, (β) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\widehat{\Gamma\Delta}$,
(γ) Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΖΗ.

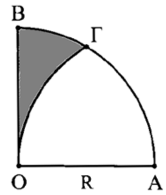
Άσκηση 10

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Με κέντρα τις κορυφές Α, Β, Γ, Δ και ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ γράφουμε τεταρτοκύκλια μέσα στο τετράγωνο. Να βρείτε το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου συναρτήσει του α.



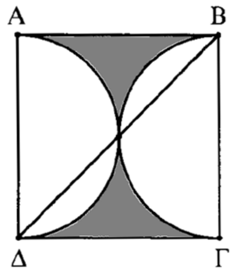
Άσκηση 11

Θεωρούμε τεταρτοκύκλιο $\widehat{AB}$ κέντρου Ο και ακτίνας R.
Ο κύκλος (Α, ΑΟ) τέμνει το τεταρτοκύκλιο $\widehat{AB}$ στο Γ.
Να βρείτε συναρτήσει του R την περίμετρο και το εμβαδόν του χρωματισμένου μικτόγραμμου τριγώνου ΟΒΓ.



Άσκηση 12

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με διαγώνιο: $B\Delta = 2\sqrt{2}$, οι πλευρές $B\Gamma, A\Delta$ είναι διάμετροι των δύο εφαπτόμενων ημικυκλίων. Να υπολογίσετε:
(α) Την πλευρά του τετραγώνου,
(β) Το εμβαδόν του τετραγώνου,
(γ) Το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου.

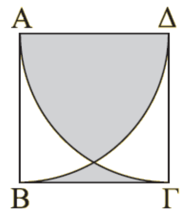


Άσκηση 13

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και ακτίνα του ΟΑ. Στην προέκταση της ΟΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Β, ώστε $OA = AB$. Αν ΒΓ είναι το εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το Β προς τον κύκλο, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Άσκηση 14

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και τα τόξα $\widehat{B\Delta}$ και $\widehat{A\Gamma}$ των κύκλων (Α, α) και (Δ, α) αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου.



Άσκηση 15

Δυο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{2}$. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

Άσκηση 16

Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και στο εσωτερικό του τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ και ΓΒ, όπου Γ σημείο της διαμέτρου ΑΒ. Η κάθετος της ΑΒ στο Γ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου ΓΔ.

Άσκηση 17

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και το τόξο του $\widehat{\mathrm{AB}} = 60^o$. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στον κυκλικό τομέα $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}}$.

Άσκηση 18

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι αντίστοιχα πλευρές κανονικού εξαγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Να υπολογισθούν:

(α) Το μήκος της πλευράς ΑΓ,

(β) Ο λόγος των εμβαδών του τριγώνου ΑΒΓ και του κύκλου (Ο, R),

(γ) Το εμβαδόν των τριών κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ και περιέχονται στις αντίστοιχες κυρτές γωνίες.

Άσκηση 19

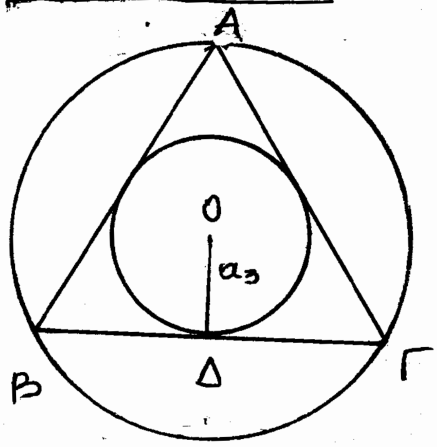
Δίνεται κύκλος (Ο, R). Με κέντρο τυχαίο σημείο του και ακτίνα την πλευρά του τετραγώνου του εγγεγραμμένου σε αυτόν, γράφουμε κύκλο. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κυκλικών δίσκων.

Άσκηση 20

Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{3}$. Να βρείτε, ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

ΛΥΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 11.6 – 11.7 – 11.8

Άσκηση 1



$$\rho = a_3 = \frac{R}{2}$$

Άρα $E = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$

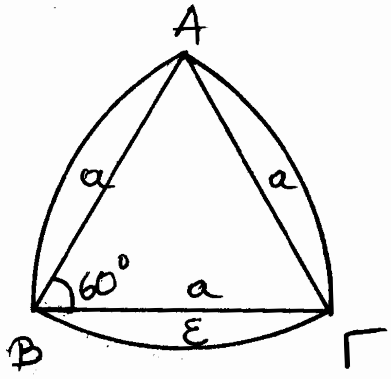
Άσκηση 2

$\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$, $\ell_{\overset{\frown}{AB}} = 4\pi$ cm

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi \cdot R \cdot \mu}{180^\circ} \Leftrightarrow 4\cancel{\pi} = \frac{\cancel{\pi} \cdot R \cdot 60^\circ}{180^\circ} \Leftrightarrow R = 12 \text{ cm}$$

$$E = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$$

Άσκηση 3



$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi \cdot a \cdot 60}{180^\circ} = \frac{1}{3}\pi \cdot a$$

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \ell_{\overset{\frown}{\Gamma A}} = \frac{1}{3}\pi \cdot a$$

$$\Pi_{(AB\Gamma)} = 3\,\frac{1}{3}\,\pi \cdot a = \pi \cdot a$$

$$\varepsilon = (\overset{\frown}{AB\Gamma}) - (AB\Gamma) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi a^2 - 3\sqrt{3}a^2}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})a^2}{12}$$

Εμβαδόν του μεικτόγραμμου είναι:

$$E = (AB\Gamma) + 3\varepsilon = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \cancel{3}\,\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\cdot a^2}{\cancel{12}\,4}$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3} + (2\pi - 3\sqrt{3})a^2}{4} = \frac{(2\pi - 2\sqrt{3})\cdot a^2}{4} = \frac{(\pi - \sqrt{3})\cdot a^2}{2}$$

Άσκηση 4

Έστω τ_1, τ_2, τ_3 τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων με χορδές ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ αντίστοιχα. Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε, ισοδύναμα γίνεται:

$$(\mu_1) + (\mu_2) + (\mu_3) + (\kappa) = (AB\Gamma\Delta)$$

$$\Leftrightarrow [(\mu_1) + (\tau_1)] + [(\mu_2) + (\tau_2)] + [(\mu_3) + (\tau_3)] + (\kappa)$$

$$= (AB\Gamma\Delta) + (\tau_1) + (\tau_2) + (\tau_3)$$

$$\Leftrightarrow 4(\kappa) = (O\overset{\frown}{AB}) \Leftrightarrow 4\frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi R^2$$

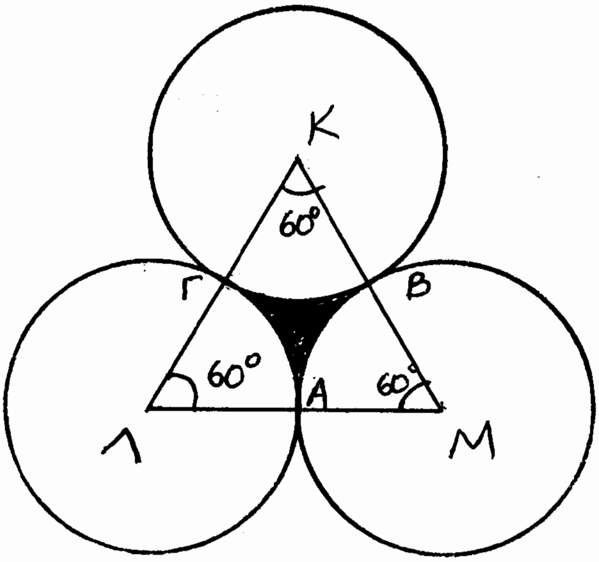
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad \text{ισχύει}$$

Άσκηση 5

Τα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{\Gamma A}$ είναι ίσα, άρα

$$\ell_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R \cdot 60}{180^\circ} = \frac{1}{3}\pi R$$

Άρα $\Pi_{AB\Gamma} = 3\,\frac{1}{3}\pi R = \pi R$



Έστω ε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$ άρα έχουμε:

$$\varepsilon = (K\Lambda M) - 3(M\widehat{AB}) \quad (1)$$

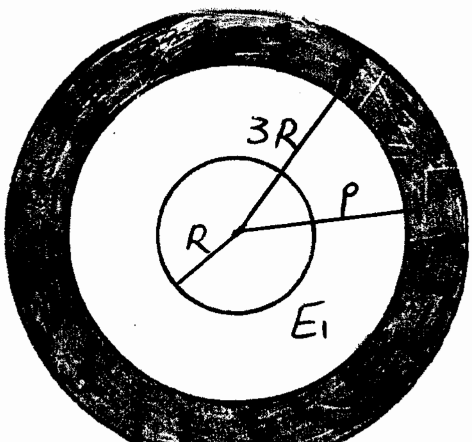
$$(K\Lambda M) = \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$$

$$(M\widehat{AB}) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}\pi R^2$$

Άρα η (1) $\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{3}\cdot R^2 - \frac{3\pi R^2}{6} = \frac{2\sqrt{3}R^2 - \pi R^2}{2}$

$$= \frac{R^2}{2}(2\sqrt{3} - \pi)$$

Άσκηση 6



$$E_1 = E_2 \iff \pi\rho^2 - \pi R^2 = \pi(3R)^2 - \pi\rho^2$$

$$\iff 2\pi\rho^2 = \pi R^2 + 9\pi R^2$$

$$\iff 2\cancel{\pi}\rho^2 = 10\cancel{\pi}R^2 \iff \boxed{\rho = \sqrt{5}R}$$

Άσκηση 7

(α) Έστω E το χρωματισμένο χωρίο

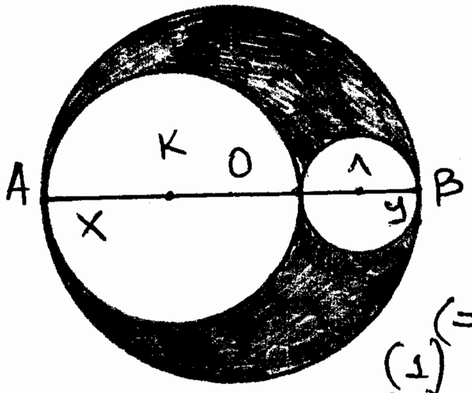
$$E = \pi R^2 - (AB\Gamma\Delta) = \pi R^2 - (R\sqrt{2})^2 = \pi R^2 - 2R^2$$

$$\boxed{AB = \lambda_4 = R\sqrt{2}} \qquad = R^2(\pi - 2)$$

(β) $\rho = a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\cancel{\pi} R^2}{\cancel{\pi}\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{R^2}{\frac{2R^2}{4}} = \frac{4R^2}{2R^2} = 2$$

Άσκηση 8



Έχουμε $AB = A\Gamma + \Gamma B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 2y = 2R \Leftrightarrow \boxed{y = R - x}$ (1)

$$\pi R^2 - \pi x^2 - \pi y^2 = \frac{3}{8}\pi R^2$$

$$\Leftrightarrow 8\cancel{\pi} x^2 + 8\cancel{\pi} y^2 = 5R^2\cancel{\pi} \Leftrightarrow 8x^2 + 8y^2 = 5R^2$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 8x^2 + 8(R-x)^2 = 5R^2$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 8R^2 - 16R\cdot x + 8x^2 = 5R^2 \Leftrightarrow 16x^2 - 16Rx + 3R^2 = 0$$

$a = 16$, $\beta = -16R$, $\gamma = 3R^2$

$$\Delta = 256R^2 - 4\cdot 16\cdot 3R^2 = 64R^2$$

$$x_{1,2} = \frac{16R \pm 8R}{32} = \begin{cases} \dfrac{3R}{4} & \text{άρα } y = \dfrac{R}{4} \text{ Δεκτή} \\ \dfrac{R}{4} & \text{, άρα } y = \dfrac{3R}{4} \text{ απορρ. αφού } x > y \end{cases}$$

Άσκηση 9

(α) $(O\widehat{AB}) = 2\pi \ cm^2 \Leftrightarrow \frac{\cancel{\pi} R^2 \mu}{360^\circ} = 2\cancel{\pi}$

$\Leftrightarrow \frac{R^2 \cdot \overset{10}{\cancel{20^\circ}}}{360} = \cancel{2} \Leftrightarrow R^2 = 36 \Leftrightarrow \boxed{R = 6 \ cm}$

(β) $(O\widehat{\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2} a \cdot R^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{3} \cdot 6^2 = 12 \ cm^2$

(γ) $(OZH) = \frac{1}{2} R^2 \eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2} R^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{4} R^2 = 9 \ cm^2$

$E = (O\widehat{ZH}) - (OZH) = \frac{\pi R^2 \cdot 15\cancel{0}}{36\cancel{0}} - 12 = \frac{\pi R^2 \cdot 5}{12} - 9$

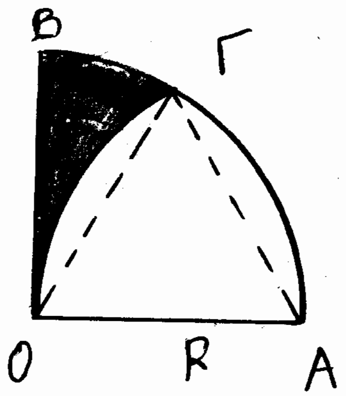
$= \frac{\pi \cdot 36 \cdot 5}{12} - 12 = 15\pi - 9 \ cm^2$

Άσκηση 10

$E = (AB\Gamma\Delta) - 4(A\widehat{K\Lambda}) = a^2 - 4 \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} =$

$= a^2 \frac{4 - \pi}{4}$

Άσκηση 11



Το τρίγωνο $O\overset{\triangle}{\Gamma}A$ είναι ισόπλευρο

$\ell_{\widehat{O\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot R}{3}$

$\ell_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 30^\circ}{180} = \frac{\pi \cdot R}{6}$

$$L = OB + \ell_{\overset{\frown}{O\Gamma}} + \ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = R + \frac{\pi R}{6} + \frac{\pi R}{3} =$$

$$= R\left(\frac{6}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) = R\left(\frac{3\pi+6}{6}\right) = R\left(\frac{\pi+2}{2}\right)$$

Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος χορδής ΟΓ είναι:

$$\varepsilon = (A\overset{\frown}{O\Gamma}) - (OA\Gamma) = \frac{\pi R^2 \cdot 60}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12} = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

Άρα $E = (O\overset{\frown}{B\Gamma}) - \varepsilon = \frac{\pi R^2 \cdot 3\cancel{0}}{36\cancel{0}^\circ} - \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$

$$= \frac{\pi R^2 - R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{12}$$

Άσκηση 12

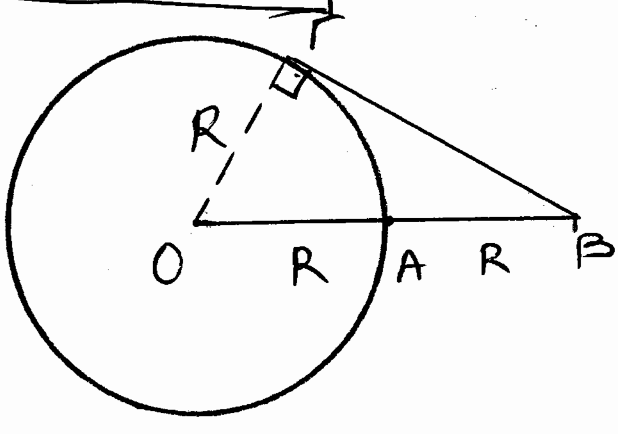
(α) Από το Π.Θ στο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ έχουμε:

$AB^2 + A\Delta^2 = B\Delta^2 \Leftrightarrow \cancel{2}AB^2 = 4\cdot\cancel{2} \Leftrightarrow AB = 2 = B\Gamma$

(β) $E = AB^2 = 4$

(γ) $E_x = E - 2\cdot E_{\eta\mu} = 4 - \pi\cdot 1^2 = 4 - \pi$

Άσκηση 13



Έχουμε $OB = 2R$ και $O\Gamma = R$

Η $\hat{\Gamma}$ είναι ορθή αφού η ΒΓ είναι εφαπτομένη. Από το Π.Θ στο $\overset{\triangle}{OB\Gamma}$ έχουμε:

$B\Gamma^2 + O\Gamma^2 = OB^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 4R^2 - R^2$

$\Leftrightarrow \boxed{B\Gamma = R\sqrt{3}}$

Ισχύει ότι $O\Gamma = \frac{OB}{2}$ άρα $\hat{B} = 30^\circ$ και $\hat{O} = 60^\circ$

$$\ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 6\cancel{0}}{18\cancel{0}} = \frac{\pi R}{3}$$

Άρα η περίμετρος του μεικτόγραμμου είναι:

$$AB + B\Gamma + \ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = R + R\sqrt{3} + \frac{\pi R}{3} = R\left(1 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

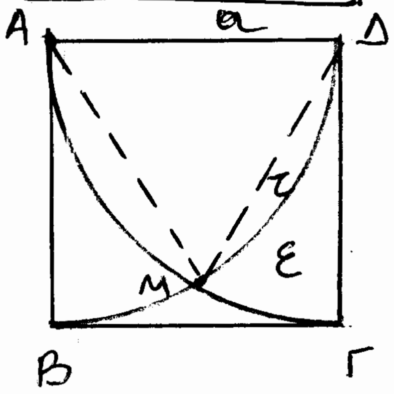
$$(OB\Gamma) = \frac{1}{2} O\Gamma \cdot \Gamma B = \frac{1}{2} R \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$(O\overset{\frown}{A\Gamma}) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{6}$$

Άρα $E = (OB\Gamma) - (O\overset{\frown}{A\Gamma}) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi R^2}{6} =$

$$= \frac{R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{6}$$

Άσκηση 14



Έστω M το κοινό σημείο των δύο τόξων. Το εμβαδόν των μεικτόγραμμων ABM και ΔΓΜ είναι ίσο.

$(AB\Gamma\Delta) = a^2$ (1)

Το τρίγωνο $A\hat{\Delta}M$ είναι ισόπλευρο πλευράς a

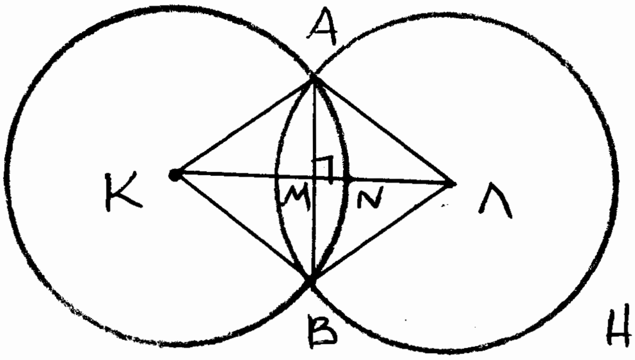
$A\hat{\Delta}M = M\hat{A}\Delta = 60^\circ$ και $M\hat{\Delta}\Gamma = 30^\circ$

Άρα $\varepsilon = (\Delta\overset{\frown}{M\Gamma}) - \varepsilon = \frac{\pi a^2 \cdot 30}{360} - \left[(A\overset{\frown}{M\Delta}) - (AM\Delta)\right]$

$$= \frac{\pi a^2}{12} - \frac{\pi a^2 \cdot 60}{360^\circ} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{12} = \frac{a^2}{12}(3\sqrt{3} - \pi) \quad (2)$$

Άρα $E = (AB\Gamma\Delta) - 2\varepsilon \overset{(1),(2)}{=\!=} \frac{a^2}{6}(6 - 3\sqrt{3} + \pi)$

Άσκηση 15



Έχουμε: $0<\sqrt{2}<2$

Άρα $R-R<R\sqrt{2}<R+R$

Επομένως οι κύκλοι (K,R) και (Λ,R) τέμνονται: Έστω A και B τα σημεία τομής

Η διάκεντρος $K\Lambda$ και η κοινή χορδή AB τέμνονται κάθετα στο M και $KM=\frac{R\sqrt{2}}{2}$

Άρα $AM^2=KA^2-KM^2=R^2-\frac{2R^2}{4}=\frac{2R^2}{4}$

$\Leftrightarrow AM=\frac{R\sqrt{2}}{2}$

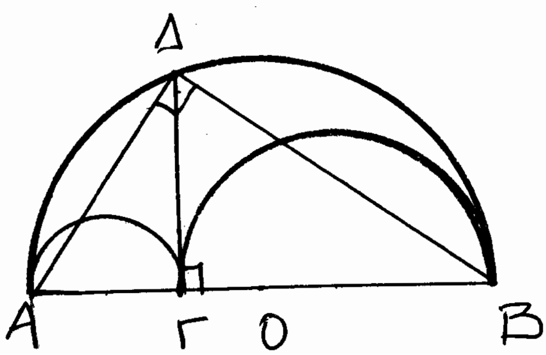
Επομένως το $K\hat{A}M$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $A\hat{K}M=45^\circ$ και $A\hat{K}B=A\hat{\Lambda}B=90^\circ$

$$E_{\widehat{ANB}}=(K\widehat{AB})-(KAB)=\frac{\pi R^2\cdot 90^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}R\cdot R$$

$$=\frac{\pi R^2}{4}-\frac{R^2}{2}=\frac{\pi R^2-2R^2}{4}$$

Επομένως $E=2E_{\widehat{ANB}}=\frac{(\pi-2)R^2}{2}$

Άσκηση 16



Έχουμε $E=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\Gamma B}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow E=\frac{1}{8}\pi AB^2-\frac{1}{8}\pi A\Gamma^2-\frac{1}{2}\pi\Gamma B^2$

$\Leftrightarrow E=\frac{1}{8}\pi\left(AB^2-A\Gamma^2-\Gamma B^2\right)$

$\Leftrightarrow E=\frac{1}{8}\pi\left[(A\Gamma+\Gamma B)^2-A\Gamma^2-\Gamma B^2\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E=\frac{1}{8}\pi\left(\cancel{A\Gamma^2}+2A\Gamma\cdot\Gamma B\cancel{+\Gamma B^2}\cancel{-A\Gamma^2}\cancel{-\Gamma B^2}\right)$

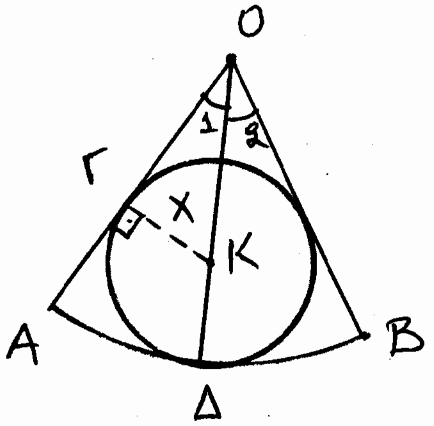
$\Leftrightarrow E = \frac{1}{4} \pi \, A\Gamma \cdot \Gamma B \quad (1)$

Το $A\hat{\Delta}B$ είναι ορθογώνιο άρα $A\Gamma \cdot \Gamma B = \Gamma\Delta^2 \; (2)$

$\Leftrightarrow$ Η $(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} E = \frac{1}{4} \pi \cdot \Gamma\Delta^2 \Leftrightarrow E = \pi \left(\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^2$

Άρα είναι ίσο με το εμβαδόν κύκλου διαμέτρου ΓΔ.

Άσκηση 17



Έστω (K, x) ο εγγεγραμμένος κύκλος στον τομέα $O\overset{\frown}{AB}$, όπου $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$

Έχουμε: $OK = R - x$ και $K\Gamma = x$

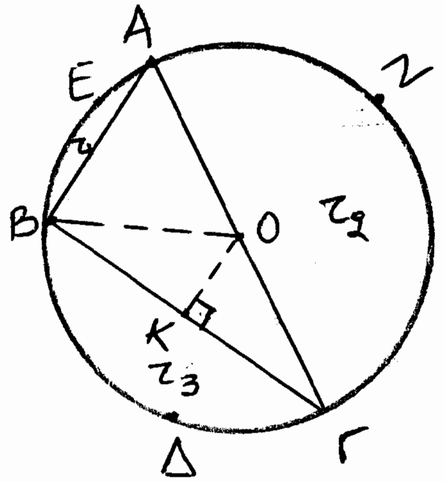
$\hat{O}_1 = 30^\circ$ αφού ΟΚ διακεντρική ευθεία (άρα διχοτόμος της $\hat{O}$)

Στο ορθογώνιο $O\hat{\Gamma}K$ έχουμε $\Gamma K = \frac{OK}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{R - x}{2} \Leftrightarrow R = 3x \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$

Άρα $E = \pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{E = \pi \frac{R^2}{9}}$

Άσκηση 18



(α) Έχουμε $AB = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_3$

άρα $A\hat{O}\Gamma = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$

Άρα η ΑΓ είναι διάμετρος το (O, R)

και $\boxed{A\Gamma = 2R}$

(β) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot B\Gamma = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R\sqrt{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$

Άρα $\frac{(AB\Gamma)}{E} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cancel{R^2}}{\pi \cancel{R^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$

(γ) $(\tau_2) = \frac{E}{2} = \frac{1}{2}\pi R^2$

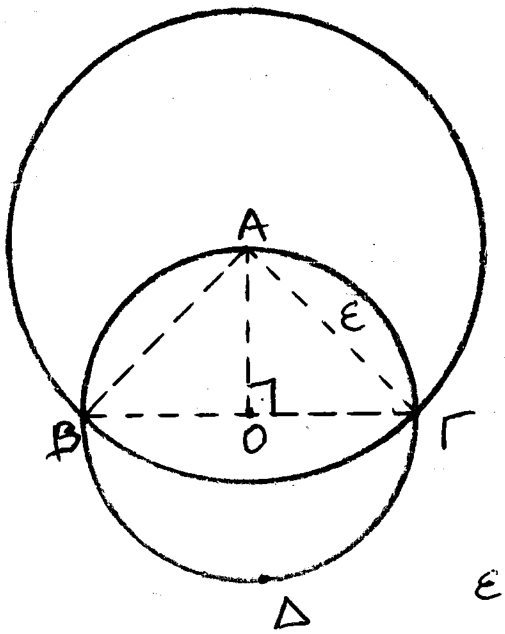
$(\tau_3) = (O\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}) - (OB\Gamma) = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360^\circ} - \frac{1}{2}R\sqrt{3}\,\frac{R}{2}$

$= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$

$(\tau_1) = (O\overset{\frown}{AEB}) - (OAB) = \frac{\pi R^2 \cdot 60}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$

$\boxed{\text{Άσκηση 19}}$



Έχουμε $AB = A\Gamma = \lambda_4$

Άρα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma} = 90^\circ$. Επομένως

$\overset{\frown}{B\Delta\Gamma} = 180^\circ$ και $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$E = (A\overset{\frown}{B\Gamma}) + 2\varepsilon \quad (1)$

$(A\overset{\frown}{B\Gamma}) = \frac{1}{4}\pi AB^2 = \frac{1}{4}\pi (R\sqrt{2})^2$

$= \frac{1}{2}\pi R^2 \quad (2)$

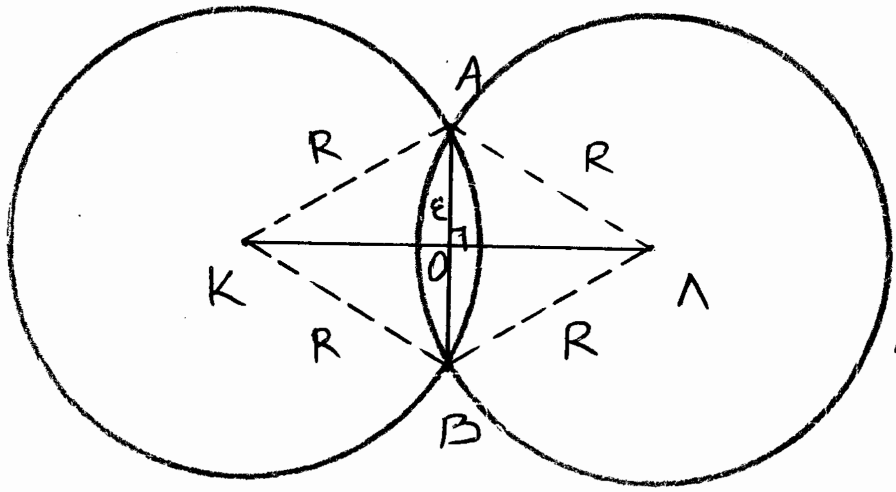
$\varepsilon = (O\overset{\frown}{A\Gamma}) - (OA\Gamma) = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 \quad (3)$

Η (1) $\overset{(2),(3)}{\Longrightarrow}$ $E = \frac{1}{2}\pi R^2 + 2\left(\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2\right)$

$= \frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2 - R^2 = \pi R^2 - R^2 = R^2(\pi - 1)$

Άσκηση 20

Έχουμε: $R-R < R\sqrt{3} < R+R$ άρα οι κύκλοι τέμνονται.



Έστω (K,R), (Λ,R) οι κύκλοι και AB η κοινή τους χορδή.
Ισχύει: $KA = A\Lambda = \Lambda B = KB = R$
Άρα το $KA\Lambda B$ είναι ρόμβος.

$$KO = \frac{K\Lambda}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \alpha_6 . \text{ Άρα } AB = \lambda_6 = R$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = 2\varepsilon$

$$\Leftrightarrow E = 2\left[(K\overset{\frown}{AB}) - (KAB)\right] = 2\left(\frac{\pi R^2 \cdot 60}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$