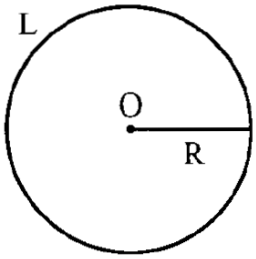
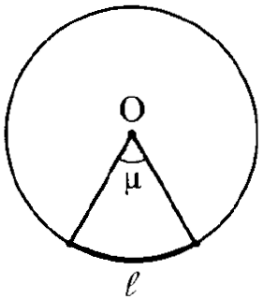
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11ο
ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ
11.4 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ
11.5 ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ 1 (Μήκος κύκλου)



Το μήκος του κύκλου (Ο, R) συμβολίζεται με L. Ο Ιπποκράτης ο Χίος απέδειξε ότι ο λόγος του μήκους ενός κύκλου προς τη διάμετρο του, δηλαδή ο λόγος $\frac{L}{2R}$ είναι σταθερός για κάθε κύκλο. Η σταθερή τιμή του λόγου $\frac{L}{2R}$ συμβολίζεται διεθνώς με το Ελληνικό γράμμα π. Άρα ισχύει ότι: $\frac{L}{2R} = \pi \Leftrightarrow L = 2\pi R$. Ο αριθμός π είναι ένας άρρητος και υπερβατικός αριθμός, δηλαδή δεν είναι ρίζα αλγεβρικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Στην πράξη χρησιμοποιούμε την προσέγγιση του $\pi \simeq 3{,}14$.

ΘΕΩΡΙΑ 2 (Μήκος Τόξου)



Ο κύκλος (Ο, R) είναι τόξο 360° με μήκος $2\pi R$. Άρα το τόξο 1° θα έχει μήκος: $\frac{2\pi R}{360^o} = \frac{\pi R}{180^o}$. Επομένως ένα τόξο μ^o θα έχει μήκος: $l = \frac{\pi R \mu}{180^o}$.

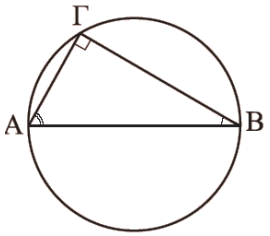
Ένα τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα R λέγεται ακτίνιο (rad).

Άρα ένα τόξο α rad έχει μήκος: $l = \alpha R$. Ο τύπος αλλαγής από μοίρες σε ακτίνια ή από ακτίνια σε μοίρες είναι: $\frac{\pi R \mu}{180^o} = \alpha R \Leftrightarrow \frac{\mu}{180^o} = \frac{\alpha}{\pi}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τις χορδές ΑΓ και ΒΓ, ώστε $\text{ΑΓ} = 2cm$ και $\text{ΒΓ} = 2\sqrt{3}cm$. Να βρεθεί το μήκος του κύκλου και τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΓΒ}}$, που είναι μικρότερα του ημικυκλίου.

ΛΥΣΗ



Επειδή η ΑΒ είναι διάμετρος, η γωνία $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β}$ θα είναι ορθή, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ έχουμε:

$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΒΓ}^2 \Leftrightarrow (2R)^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow 4R^2 = 16$

$\Leftrightarrow R = 2$. Άρα $L = 2\pi R = 4\pi$ cm. Επειδή $\text{ΑΓ} = 2 = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$,

θα είναι $\hat{\text{Β}} = 30^o$, οπότε $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}} = 60^o$. Κατά συνέπεια $l_{\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}} = \frac{\pi R \mu}{180^o} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 60^o}{180^o} = \frac{2}{3}\pi$ cm.

Τέλος, αφού $\hat{\text{Α}} = 60^o$, θα είναι $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}} = 120^o$. Οπότε: $l_{\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}} = \frac{\pi R \mu}{180^o} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 120^o}{180^o} = \frac{4}{3}\pi$ cm.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Το μήκος L τόξου, κύκλου ακτίνας R με χορδή λ_6 είναι:

(α) $6R$, (β) πR, (γ) $\frac{1}{3}\pi R$, (δ) $2\pi R$, (ε) $\frac{1}{3}R$.

Να κυκλώσετε το σωστό γράμμα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 2

Πάνω σε ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Αν $L_1, L_2, L_3,$ και L είναι τα μήκη των κύκλων με διαμέτρους $\text{ΑΒ}, \text{ΒΓ}, \text{ΓΔ}$ και ΑΔ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι: $L_1 + L_2 + L_3 = L$.

Άσκηση 3

Να βρείτε το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου σε κανονικό εξάγωνο πλευράς 10cm.

Άσκηση 4

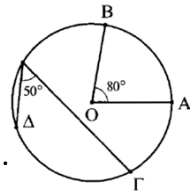
Να βρεθεί το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά κανονικού 10-γώνου εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 5cm.

Άσκηση 5

Όταν ένα ποδήλατο διανύει μια απόσταση, ο ένας τροχός του που έχει ακτίνα R κάνει ν στροφές, ενώ ο άλλος, που έχει ακτίνα ρ κάνει 2ν στροφές. Να αποδείξετε ότι: $R = 2\rho$.

Άσκηση 6

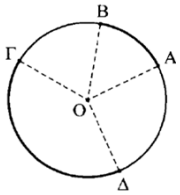
Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τα διαδοχικά του σημεία Α, Β, Γ, ώστε να είναι: $\text{ΑΒ} = R\sqrt{2}$ και $\text{ΒΓ} = R\sqrt{3}$. Να βρεθούν τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}, \overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΓΑ}}$, ως συνάρτηση του R.



Άσκηση 7

Ο κύκλος (Ο,R) του διπλανού σχήματος έχει περίμετρο $L = 18\pi$ cm. Να βρείτε: (α) Την ακτίνα R, (β) Τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$.

Άσκηση 8



Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας $R = 20$ cm. Θεωρούμε τα τόξα του $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$, που έχουν μήκη 6π cm και 16π cm αντίστοιχα.

Να βρείτε τα μετρά των τόξων $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$ σε μοίρες και σε ακτίνια.

Άσκηση 9

Δύο τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$ ενός κύκλου (Ο,R) έχουν μέτρα 36° και $\frac{\pi}{8}$ rad αντίστοιχα.

Αν το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ έχει μήκος 8π cm, να βρείτε: (α) Την ακτίνα R, (β) Το μήκος του $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$.

Άσκηση 10

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με: $\hat{\text{Α}} = 90^o$, $\text{ΑΒ} = 5$ cm $\text{ΑΓ} = 12$ cm.

Να βρείτε το μήκος:

(α) Του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ,

(β) Του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Άσκηση 11

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς $\sqrt{48}$ cm. Να βρείτε το μήκος:
(α) Του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ,
(β) Του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Άσκηση 12

Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού εξαγώνου έχει μήκος π $\sqrt{108}$ cm. Να βρείτε
(α) Το μήκος του περιγεγραμμένου κύκλου του εξαγώνου,
(β) Το εμβαδόν του εξαγώνου.

Άσκηση 13

Με διάμετρο την ακτίνα ΟΑ ενός κύκλου (Ο,R) γράφουμε κύκλο (Κ) και από το Ο φέρουμε ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο (Ο) στο Γ και τον κύκλο (Κ) στο Δ.
Να αποδείξετε ότι τα τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΑΔ}}$ έχουν ίσα μήκη.

Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι το μήκος του κύκλου, που εφάπτεται σε δύο ομόκεντρους κύκλους, ισούται με το ημιάθροισμα ή την ημιδιαφορά των μηκών αυτών, όταν αντίστοιχα ο κύκλος αυτός περιέχει στο εσωτερικό του ή όχι το μικρότερο κύκλο.

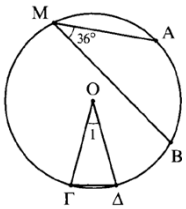
Άσκηση 15

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με: $\alpha = 13cm$, $\beta = 14cm$ cm και $\gamma = 15cm$.Να βρείτε το μήκος:
(α) Του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ,
(β) Του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Άσκηση 16

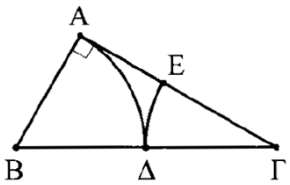
Δίνεται ημικύκλιο (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ. Με διαμέτρους τις ΑΟ και ΟΒ γράφουμε στο εσωτερικό του πρώτου ημικύκλια. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται των τριών αυτών ημικυκλίων, ως συνάρτηση του R.

Άσκηση 17



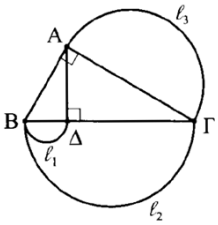
Στο διπλανό σχήμα είναι: $\text{ΑΜΒ} = 36^o$ το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ έχει μήκος 4π και η χορδή ΓΔ έχει μήκος: $10\sqrt{2-\sqrt{3}}cm$. Να βρείτε:
(α) Την ακτίνα του κύκλου, (β) Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}}$.

Άσκηση 18



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{\text{Α}} = 90^o$, $\text{ΑΒ} = 2cm$ και $\text{ΑΓ} = 2\sqrt{3}cm$. Γράφουμε το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΔ}}$ του κύκλου (Β, ΒΑ) και το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΔΕ}}$ του κύκλου (Γ, ΓΔ). Να βρείτε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΔΕ.

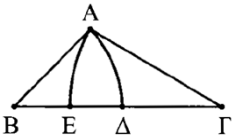
Άσκηση 18



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{\text{Α}} = 90^o$, και το ύψος του ΑΔ. Αν l_1, l_2, l_3 είναι τα μήκη ημικυκλίων με διαμέτρους ΒΔ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $l_3^2 = l_2\left(l_2 - l_1\right)$.

Άσκηση 19

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\text{ΑΒ} = \sqrt{2}$, $\text{ΑΓ} = 2$ και $\text{ΒΓ} = 1 + \sqrt{3}$.Γράφουμε το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΔ}}$ του κύκλου (Β, ΒΑ) και το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΕ}}$ του κύκλου (Γ, ΓΑ).
(α) Να αποδείξετε ότι $\hat{\text{Β}} = 45^o$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$
(β) Να βρείτε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΕΔ.



ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 11.4 – 11.5 – ΛΥΣΕΙΣ

Άσκηση 1

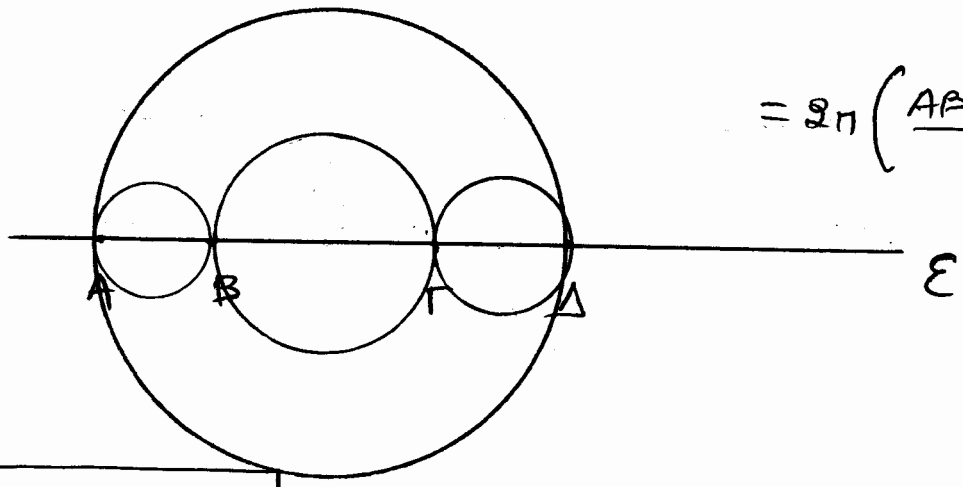
Έχουμε $\lambda_6 = R$ και $\omega_6 = \frac{360°}{60} = 60°$

$$l = \frac{\pi R \cdot \mu}{180°} = \frac{\pi \cdot R \cdot 60}{180°} = \frac{\pi R}{3}$$ άρα το (γ)

Άσκηση 2

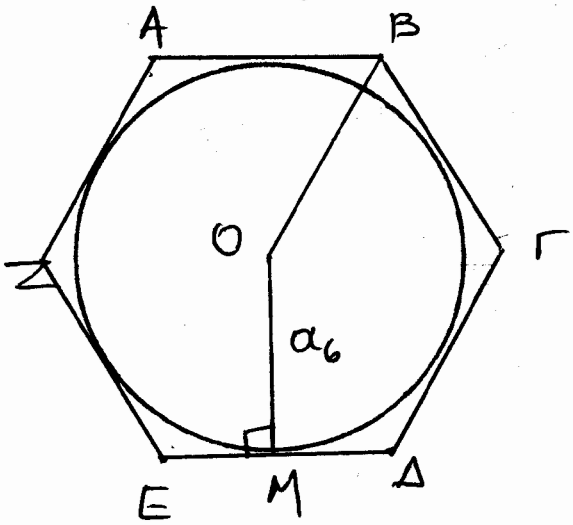
$$L_1 + L_2 + L_3 = 2\pi \frac{AB}{2} + 2\pi \frac{B\Gamma}{2} + 2\pi \frac{\Gamma\Delta}{2}$$

$$= 2\pi \left(\frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta}{2} \right) = 2\pi \cdot \frac{A\Delta}{2} = L$$



Άσκηση 3

Έστω $\lambda_6 = R = 10$ cm

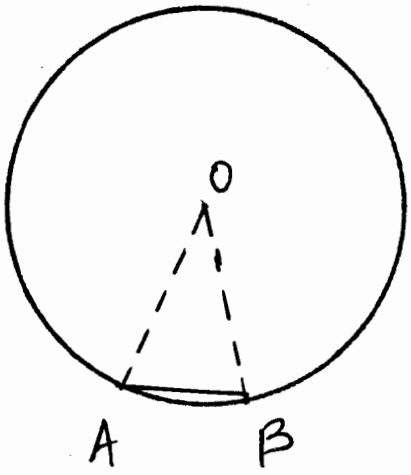


$$\rho = a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

Άρα $L = 2\pi\rho = 2\pi \cdot 5\sqrt{3} = 10\pi\sqrt{3}$ cm

Άσκηση 4

$$\omega_{10} = \frac{360}{10} = 36^\circ \quad , R = 5\,cm$$



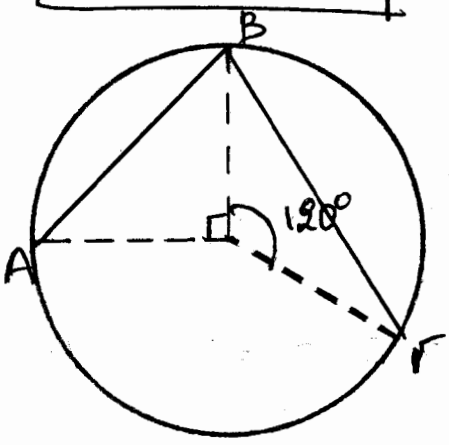
$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi \cdot R\,\mu}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 36^\circ}{180^\circ} = \pi\ cm$$

Άσκηση 5

Έστω L_1 και L_2 τα μήκη των τροχών με ακτίνες R, ρ αντιστοίχα. Άρα: $\gamma L_1 = 2\gamma \cdot L_2 \Leftrightarrow \cancel{2}\cancel{\pi} R = 2 \cdot \cancel{2}\cancel{\pi}\rho \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{R = 2\rho}$$

Άσκηση 6



$AB = R\sqrt{2} = \lambda_4$ άρα $\overset{\frown}{AB} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{2}$$

$B\Gamma = R\sqrt{3} = \lambda_3$, άρα $\overset{\frown}{B\Gamma} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

$$l_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 120^\circ}{180} = \frac{2\pi R}{3}$$

Άρα $\overset{\frown}{\Gamma A} = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 150^\circ$

$$l_{\overset{\frown}{\Gamma A}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 150^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi R}{6}$$

Άσκηση 7

$L = 18\pi$

(α) $L = 2\pi R = 18\pi \Leftrightarrow \boxed{R = 9\ cm}$

(β) $l_{AB} = \dfrac{\pi \cdot R \cdot \mu}{180^\circ} = \dfrac{\pi \cdot 9 \cdot 80^\circ}{180^\circ} = 4\pi$

$l_{\Gamma\Delta} = \dfrac{\pi \cdot R \cdot \mu}{180^\circ} = \dfrac{\pi \cdot 9 \cdot 100}{180} = 5\pi$ cm

Άσκηση 8

$l_{AB} = 6\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi \cdot R \cdot \mu}{180} = 6\pi \Leftrightarrow 20 \cdot \mu = 6 \cdot 180$

$\Leftrightarrow \mu = 54^\circ$ άρα $\dfrac{a}{\pi} = \dfrac{\mu}{180} \Leftrightarrow \dfrac{a}{\pi} = \dfrac{54}{180^\circ}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{\pi} = \dfrac{3}{10} \Leftrightarrow a = \dfrac{3\pi}{10}$ rad

$l_{\Gamma\Delta} = 16\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi \cdot R \mu}{180} = 16\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi \cdot 20 \cdot \mu}{180} = 16 \cdot \pi$

$\Leftrightarrow \mu = 144^\circ$, άρα $\dfrac{a}{\pi} = \dfrac{\mu}{180} \Leftrightarrow \dfrac{a}{\pi} = \dfrac{144}{180^\circ}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{4\pi}{5}$ rad

Άσκηση 9

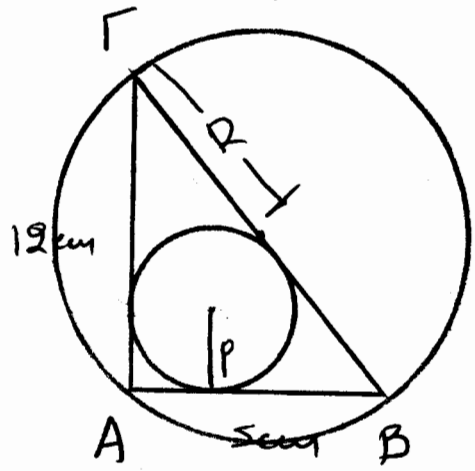
(α) $l_{\overset{\frown}{AB}} = 8\pi \Leftrightarrow \frac{\pi \cdot R \cdot \varphi}{180} = 8\pi \Leftrightarrow \frac{R \cdot 36}{180^\circ} = 8$

$\Leftrightarrow R = 40$ cm

(β) $l_{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}} = \alpha \cdot R \Leftrightarrow l_{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}} = \frac{\pi}{8} \cdot 40 \Leftrightarrow l_{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}} = 5\pi$ cm

Άσκηση 10

(α)



Από Π.Θ στο $A\hat{B}\Gamma$ έχουμε:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

$\Leftrightarrow B\Gamma^2 = 25 + 144 = 169$

$\Leftrightarrow B\Gamma = 13$

άρα $R = \frac{13}{2}$ cm

Άρα $L_1 = 2\pi R = 2\pi \frac{13}{2} = 13\pi$ cm

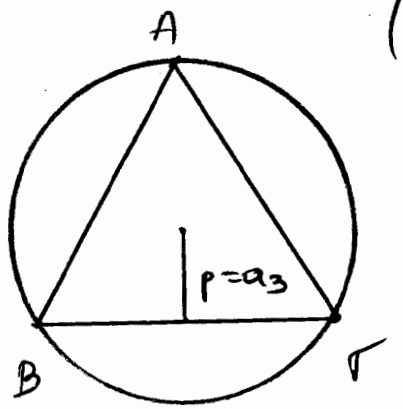
(β) $\tau = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2} = \frac{5 + 12 + 13}{2} = \frac{30}{2} = 15$ cm

$E = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = 30$ cm^2

Άρα $E = \tau \cdot \rho \Leftrightarrow 30 = 15 \cdot \rho \Leftrightarrow \rho = 2$ cm

$L_2 = 2\pi \cdot \rho = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi$ cm

Άσκηση 11



(α) $\lambda_3 = R\sqrt{3} = \sqrt{48} \Leftrightarrow R\cancel{\sqrt{3}} = \cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{16}$

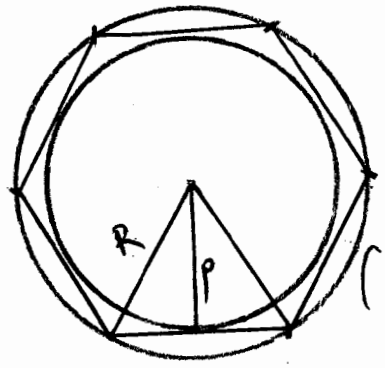
$\Leftrightarrow R = 4$ cm

$L_1 = 2\pi R = 2\pi\cdot 4 = 8\pi$ cm

(β) $\alpha_3 = \frac{R}{2} = \rho \Leftrightarrow \rho = 2$ cm

Άρα $L_2 = 2\pi\rho = 4\pi$ cm

Άσκηση 12



Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου είναι ρ και του περιγεγραμμένου R.

$\rho = \alpha_6 \Leftrightarrow \rho = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

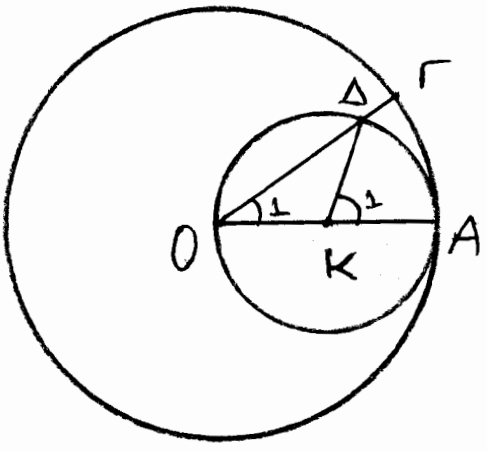
(α) $\cancel{2}\cancel{\pi}\rho = \cancel{\pi}\sqrt{108} \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}R\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{108}$

$\Leftrightarrow R\cdot\cancel{\sqrt{3}} = \cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{36} \Leftrightarrow R = 6$ cm

Άρα $L = 2\pi R = 2\pi\cdot 6 = 12\pi$ cm

(β) $E_6 = \frac{1}{2}\, 6\cdot\alpha_6\cdot\lambda_6 = 3\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2}\cdot 6 = 54\sqrt{3}$ cm^2

Άσκηση 13



$\hat{K}_1 = 2\hat{O}_1$, διότι η $\hat{K}_1$ είναι επίκεντρη που βαίνει στο $\overset{\frown}{A\Delta}$ και η $\hat{O}_1$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο $\overset{\frown}{A\Delta}$

Θέτω $\hat{O}_1 = \rho^\circ$ άρα $\hat{K}_1 = 2\rho^\circ$

Άρα $\overset{\frown}{AΔ} = 2\gamma^\circ$

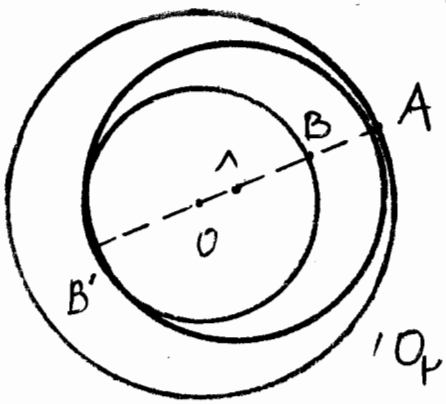
$$l_{\overset{\frown}{AΓ}} = \frac{\pi R \gamma}{180} \quad (1)$$

$$l_{\overset{\frown}{AΔ}} = \frac{\pi \frac{R}{2} \cdot 2\gamma}{180^\circ} = \frac{\pi R \gamma}{180} \quad (2)$$

Από (1), (2) $l_{\overset{\frown}{AΓ}} = l_{\overset{\frown}{AΔ}}$

Άσκηση 14

Έστω O το κοινό κέντρο των κύκλων και Λ το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται σε αυτούς.



1η Περίπτωση:

Επειδή οι κύκλοι: (O, OA) και $(Λ, ΛA)$ εφάπτονται εσωτερικά στο A ισχύει:

$OΛ = OA - ΛA \quad (1)$

Όμοια, οι κύκλοι (O, OB) και $(Λ, ΛA)$ εφάπτονται εσωτερικά στο B' ισχύει: $OΛ = ΛB' - OB'$

$\Leftrightarrow OΛ = ΛA - OB \quad (2)$

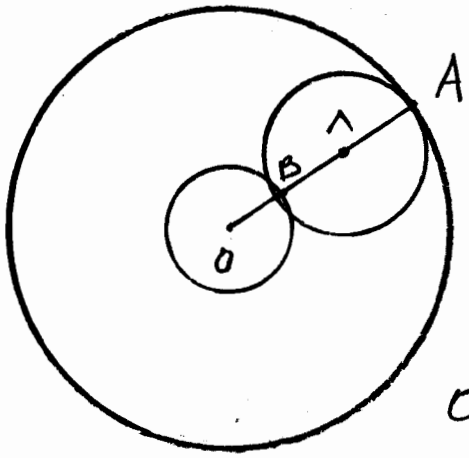
Από (1), (2) $OA - ΛA = ΛA - OB \Leftrightarrow 2ΛA = OA + OB \quad (3)$

Άρα $L_1 + L_2 = 2\pi(OA) + 2\pi(OB) = 2\pi((OA)+(OB)) \overset{(3)}{=}$

$= 2\pi \cdot 2ΛA = 2(2\pi ΛA) = 2L$

$\Leftrightarrow L_1 + L_2 = 2L \Leftrightarrow \boxed{L = \frac{L_1 + L_2}{2}}$

2η Πρόταση:



Οι κύκλοι (O, OA) και $(\Lambda, \Lambda A)$ εφάπτονται εσωτερικά στο A άρα:

$O\Lambda = O\Lambda - \Lambda A$ (1)

Οι κύκλοι (O, OB) και $(\Lambda, \Lambda A)$ εφάπτονται εξωτερικά στο B, οπότε:

$O\Lambda = OB + \Lambda B \Leftrightarrow O\Lambda = OB + \Lambda A$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $OA - \Lambda A = OB + \Lambda A \Leftrightarrow 2\Lambda A = OA - OB$ (3)

Άρα $L_1 - L_2 = 2\pi(OA) - 2\pi(OB) = 2\pi(OA - OB) \overset{(3)}{=}$

$= 2\pi \cdot 2\Lambda A = 2(2\pi \Lambda A) = 2L$

$\Leftrightarrow L_1 - L_2 = 2L \Leftrightarrow \boxed{L = \dfrac{L_1 - L_2}{2}}$

Άσκηση 15

$a = 13$ cm, $B = 14$ cm, $\gamma = 15$ cm

(α) $\tau = \dfrac{a+B+\gamma}{2} = \dfrac{13+14+15}{2} = \dfrac{42}{2} \Leftrightarrow \tau = 21$ cm

$E = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-B)(\tau-\gamma)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{3^2 7^2 \cdot 2^2 \cdot 4}$

$= 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 = 84$ cm^2

Άρα $E = \tau \cdot \rho \Leftrightarrow \rho = \dfrac{E}{\tau} = \dfrac{84}{21} \Leftrightarrow \rho = 4$ cm

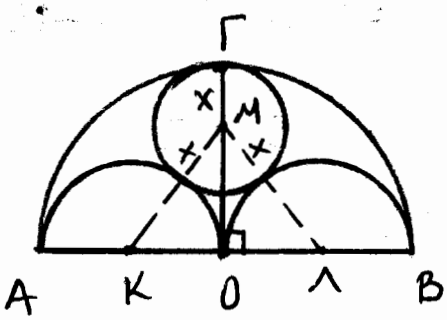
$L_1 = 2\pi\rho = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ cm

(β) $E = \frac{a\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow 84 = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}$ (8)

$\Leftrightarrow R = \frac{65}{8}$ cm

$L_{\varepsilon} = 2\pi R = 2\pi \frac{6}{8} = \frac{65\pi}{4}$

Άσκηση 16



Έστω M το κέντρο και x η ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται στα τρία ημικύκλια. Τότε έχουμε:

- $OM = O\Gamma - M\Gamma = R - x$
- $OK = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$
- $KM = K\Delta + \Delta M + \frac{R}{2} + x$

Το τρίγωνο OKM είναι ορθογώνιο στο O, άρα:

$OK^2 + OM^2 = KM^2 \Leftrightarrow \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R-x)^2 = \left(\frac{R}{2} + x\right)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{\frac{R^2}{4}} + R^2 - 2Rx + \cancel{x^2} = \cancel{\frac{R^2}{4}} + Rx + \cancel{x^2}$

$\Leftrightarrow R^{\cancel{2}} = 3\cancel{R}x \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{R}{3}}$

Επομένως το μήκος του κύκλου (M, x) είναι:

$L = 2\pi x = \frac{2\pi R}{3}$

Άσκηση 17

(α) $\widehat{AB} = 72^\circ$ άρα $l_{\widehat{AB}} = 4\pi \Leftrightarrow \frac{\cancel{\pi} R \cdot 72}{180} = 4\cancel{\pi}$

$\Leftrightarrow R = 10\,cm$

(β) Από τον νόμο των συνημιτόνων στο $O\Gamma\Delta$

έχουμε: $\Gamma\Delta^2 = O\Gamma^2 + O\Delta^2 - 2O\Gamma \cdot O\Delta \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{O}_1$

$\Leftrightarrow 100(2-\sqrt{3}) = 100 + 100 - 200\,\sigma\upsilon\nu\hat{O}_1$

$\Leftrightarrow 200\,\sigma\upsilon\nu\hat{O}_1 = 100(\cancel{1}+\cancel{1}+\sqrt{3}-\cancel{2})$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{O}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \hat{O}_1 = 30^\circ$

Άρα $L_{\widehat{\Gamma\Delta}} = \frac{\pi R \cdot 30}{180} = \frac{5\pi}{3}\,cm$

Άσκηση 18

$$l_3^2 = \left(\frac{\cancel{2}M \cdot \frac{A\Gamma}{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\right)^2 = \frac{M^2}{4} A\Gamma^2 \quad (1)$$

$$l_2(l_2 - l_1) = l_2^2 - l_2 \cdot l_1 =$$

$$= \left(\frac{MB\Gamma}{2}\right)^2 - \frac{MB\Gamma}{2}\,\frac{M \cdot B\Delta}{2} = \frac{M^2}{4}\left(B\Gamma^2 - B\Gamma \cdot A\Delta\right)$$

$$= \frac{M^2}{4}\left(B\Gamma^2 - AB^2\right) = \frac{M^2}{4} \cdot A\Gamma^2 \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει το ζητούμενο.

Άσκηση 19

(α) Από τον νόμο των συνημιτόνων στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB\cdot B\Gamma\cdot \sigma\upsilon\nu B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{4} = 2 + \cancel{1} + \cancel{3} + 2\sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{B}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\hat{B} - 2\sqrt{6}\,\sigma\upsilon\nu\hat{B}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}\sqrt{2}\,\cancel{(1+\sqrt{3})}\,\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \cancel{2}\cancel{(1+\sqrt{3})} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

άρα $\boxed{\hat{B} = 45^\circ}$

Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2A\Gamma\cdot B\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow 2 = 4 + 1 + 3 + 2\sqrt{3} - 2\cdot 2(1+\sqrt{3})\,\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow 4(1+\sqrt{3})\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = 6 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2(1+\sqrt{3})\,\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = 3 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$$

(β) $l_{\overset{\frown}{A\Delta}} = \dfrac{\pi\cdot AB\cdot 45^\circ}{180} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$, $l_{\overset{\frown}{AE}} = \dfrac{\pi\cdot A\Gamma\cdot 30}{180} = \dfrac{\pi}{3}$

$$\cdot\ E\Delta = B\Delta - BE = B\Delta - (B\Gamma - \Gamma E) = BA - B\Gamma + \Gamma A$$
$$= 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

Άρα η περίμετρος είναι: $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\pi}{3} + 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$