ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11^{ο}
ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ
11.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ
11.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

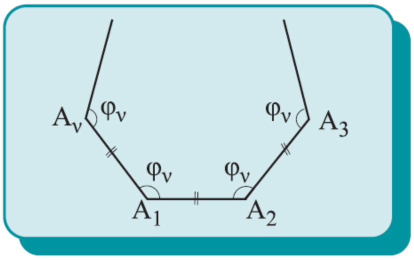
ΘΕΩΡΙΑ 1 (Ορισμός κανονικού πολυγώνου)

Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

(Α) Γωνία κανονικού ν-γώνου

Έστω $A_1A_2...A_\nu$ ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές και $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = ... = \widehat{A}_\nu = \varphi_\nu$ (σχ.1), Επειδή το άθροισμα των γωνιών κάθε κυρτού ν-γώνου είναι $(\nu-2)\cdot 180^o$, θα έχουμε: $\nu\varphi_\nu = (\nu-2)\cdot 180^o$

$$\Leftrightarrow \nu\varphi_\nu = 180^o\nu - 360^o \Leftrightarrow \varphi_\nu = 180^o - \frac{360^o}{\nu}.$$



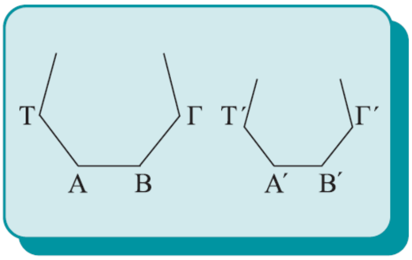
Σχήμα 1

(Β) Ομοιότητα κανονικών πολυγώνων

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο κανονικά πολύγωνα $AB\Gamma...T$, $A'B'\Gamma'...T'$ (σχ.2), με τον ίδιο αριθμό πλευρών ν. Τότε η γωνία καθενός είναι:

$180^o - \dfrac{360^o}{\nu}$, οπότε έχουμε:

$\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, ... , $\hat{T} = \hat{T}'$ (1).



Σχήμα 2

Επίσης, αφού $AB = B\Gamma = ... = TA$ και $A'B' = B'\Gamma' = ... = T'A'$

θα έχουμε: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = ... = \dfrac{TA}{T'A'}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι τα πολύγωνα $AB\Gamma...T$ και $A'B'\Gamma'...T'$ είναι όμοια.

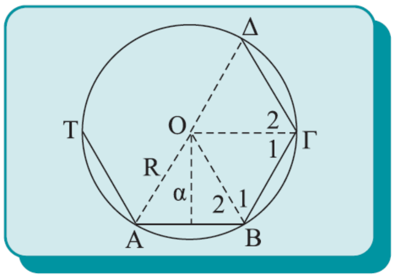
Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

ΘΕΩΡΙΑ 2 (Θεώρημα Ι)

Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

Απόδειξη

Έστω $AB\Gamma...T$ ένα κανονικό πολύγωνο (σχ.3), Θεωρούμε τον κύκλο (Ο,R) που διέρχεται από τις κορυφές Α, Β, Γ του πολυγώνου. Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος αυτός διέρχεται και από την κορυφή Δ, δηλαδή ότι: $O\Delta = R$. Επειδή $OB = O\Gamma = R$, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές και επομένως $\widehat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \sigma$, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν: $OB = O\Gamma, AB = \Gamma\Delta$ (Αφού το $AB\Gamma...T$ είναι κανονικό) και $\widehat{B}_2 = \widehat{B} - \sigma = \hat{\Gamma} - \sigma = \hat{\Gamma}_2$. Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι: $O\Delta = OA = R$.

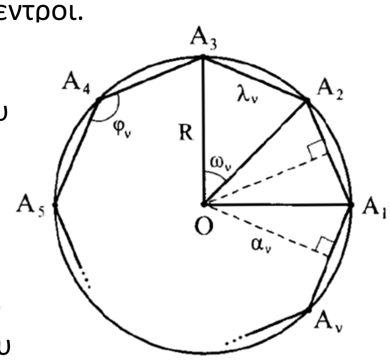


Σχήμα 3

Όμοια αποδεικνύεται ότι ο κύκλος (Ο,R) διέρχεται και από τις υπόλοιπες κορυφές Ε, Ζ, ..., Τ και επομένως το πολύγωνο είναι εγγράψιμο. Οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες χορδές του κύκλου (Ο,R), επομένως και τα αποστήματά τους θα είναι ίσα, έστω με α. Επομένως, ο κύκλος (Ο,α) εφάπτεται στις πλευρές του $AB\Gamma...T$, άρα το πολύγωνο είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

Είναι φανερό, από τα παραπάνω, ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος (O,R) και ο εγγεγραμμένος (O,α) του πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

Στοιχεία κανονικού πολυγώνου



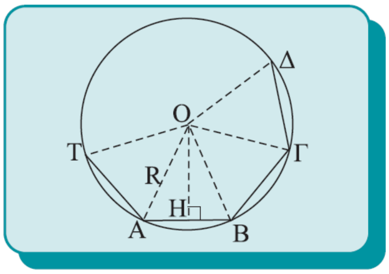
(α) Το κοινό κέντρο του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου ονομάζεται **κέντρο** του πολυγώνου.
(β) Η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται **ακτίνα** του πολυγώνου.
(γ) Η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του πολυγώνου, δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του πολυγώνου λέγεται **απόστημα** του πολυγώνου και συμβολίζεται με α_ν.
(δ) Η γωνία υπό την οποία φαίνεται κάθε πλευρά του πολυγώνου από το κέντρο του λέγεται κεντρική γωνία του πολυγώνου και συμβολίζεται με ω_ν.

ΘΕΩΡΙΑ 3 (Θεώρημα ΙΙ)

Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύουν οι εξής σχέσεις:

(α) $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$, (β) $\mathrm{P}_\nu = \nu\lambda_\nu$, (γ) $\omega_\nu = \dfrac{360^o}{\nu}$, (δ) $\mathrm{E}_\nu = \dfrac{1}{2}\mathrm{P}_\nu \alpha_\nu$.

Απόδειξη



Σχήμα 4

Έστω $\mathrm{AB\Gamma ...T}$ ένα κανονικό πολύγωνο (σχ.4), R η ακτίνα του, $\mathrm{AB} = \lambda_\nu$ η πλευρά του και $\mathrm{OH} = \alpha_\nu$, το απόστημά του.

(α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο $\mathrm{O\hat{A}H}$ έχουμε:

$$\mathrm{OH}^2 + \mathrm{AH}^2 = \mathrm{OA}^2 \Leftrightarrow \alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2.$$

(β) Επειδή $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma} = ... = \mathrm{TA} = \lambda_\nu$, θα είναι: $\mathrm{P}_\nu = \nu\lambda_\nu$.

(γ) Ισχύει ότι: $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = ... = \overset{\frown}{\mathrm{TA}}$, άρα έχουμε: $\mathrm{A\hat{O}B} = \mathrm{B\hat{O}\Gamma} = ... = \mathrm{T\hat{O}A} = \omega_\nu$.

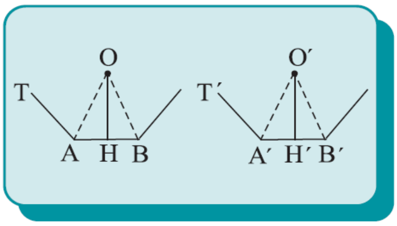
Ισχύει ότι: $\mathrm{A\hat{O}B} + \mathrm{B\hat{O}\Gamma} + ... + \mathrm{T\hat{O}A} = 360^o \Leftrightarrow \nu\omega_\nu = 360^o \Leftrightarrow \omega_\nu = \dfrac{360^o}{\nu}$.

(δ) Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ..., ΟΤΑ είναι ίσα από (ΠΠΠ), άρα και ισεμβαδικά και επομένως έχουμε: $\mathrm{E}_\nu = \nu(\mathrm{OAB}) = \nu \cdot \dfrac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{OH} = \dfrac{1}{2}\nu\lambda_\nu\alpha_\nu \overset{(\beta)}{=} \dfrac{1}{2}\mathrm{P}_\nu\alpha_\nu$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε δύο κανονικά ν-γωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτίνων τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

Απόδειξη



Σχήμα 5

θεωρούμε δύο κανονικά πολύγωνα $\mathrm{AB\Gamma ...T}$ και $\mathrm{A'B'\Gamma' ...T'}$ (σχ.5), με το ίδιο πλήθος πλευρών, έστω ν $(\nu \geq 3)$. Αν O, O′ τα κέντρα των πολυγώνων, τα τρίγωνα OAB και O′A′B′ είναι όμοια γιατί είναι ισοσκελή και έχουν: $\mathrm{A\hat{O}B} = \mathrm{A'\hat{O}'B'} = \dfrac{360^o}{\nu}$ και επομένως

$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{O'A'}} = \dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{O'H'}} \Leftrightarrow \dfrac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \dfrac{R}{R'} = \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu}$, όπου OH, O′H′ τα ύψη των τριγώνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1
Ένα κυρτό πολύγωνο είναι κανονικό όταν:
(α) Έχει μόνον τις πλευρές του ίσες, (β) Έχει μόνον τις γωνίες του ίσες,
(γ) Είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έχει τις πλευρές του ίσες.
Να κυκλώσετε το σωστό γράμμα.

Άσκηση 2
Μεταξύ των λ_ν, α_ν και R ισχύει:
(α) $\lambda_\nu^2 + \frac{\alpha_\nu^2}{4} = R^2$, (β) $\lambda_\nu^2 + \alpha_\nu^2 = 4R^2$, (γ) $\lambda_\nu^2 = 4\left(R^2 - \alpha_\nu^2\right)$, (δ) $\lambda_\nu^2 + \alpha_\nu^2 = \frac{R^2}{4}$.
Να κυκλώσετε το σωστό γράμμα.

Άσκηση 3
Μεταξύ των ω_ν και φ_ν ισχύει:
(α) $\omega_\nu + \varphi_\nu = 90^o$, (β) $\omega_\nu + \varphi_\nu = 180^o$, (γ) $\omega_\nu + \varphi_\nu = 270^o$.
Να κυκλώσετε το σωστό γράμμα.

Άσκηση 4
Να βρεθούν η γωνία και η κεντρική γωνία ενός κανονικού: πενταγώνου, εξαγώνου, δεκαγώνου και δωδεκαγώνου.

Άσκηση 5
Αν η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 108^o, τότε το πλήθος των πλευρών του είναι: (α) 15, (β) 12, (γ) 10, (δ) 5, (ε) 8.
Να κυκλώσετε το σωστό γράμμα.

Άσκηση 6
Σε δύο κανονικά πεντάγωνα ο λόγος των πλευρών τους είναι $\lambda = 2$. Ποιός είναι ο λόγος των αποστημάτων, των ακτίνων τους, των περιμέτρων τους και των εμβαδών τους.

Άσκηση 7
Να αποδείξετε ότι το μόνο κανονικό πολύγωνο με γωνία οξεία είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.

Άσκηση 8
Αν ένα κανονικό ν-γωνο και ένα κανονικό μ-γωνο $(\mu > \nu)$ είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι: (α) $\lambda_\nu^2 - \lambda_\mu^2 = 4\left(\alpha_\mu^2 - \alpha_\nu^2\right)$, (β) $\lambda_\nu > \lambda_\mu \Leftrightarrow \alpha_\nu < \alpha_\mu$.

Άσκηση 9
(α) Να βρείτε τη γωνία ενός κανονικού 9-γώνου.
(β) Να βρείτε το πλήθος ν των πλευρών ενός κανονικού ν-γώνου, του οποίου η γωνία είναι 160^o.
(γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό ν-γωνο με γωνία 130^o.

Άσκηση 10
Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου είναι τετραπλάσια από την κεντρική του γωνία.
Να βρείτε:
(α) Το πλήθος ν των πλευρών του ν-γώνου,
(β) Τη γωνία και την κεντρική γωνία του ν-γώνου.

Άσκηση 11
Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου και η γωνία ενός κανονικού 2ν-γώνου έχουν άθροισμα 300^o. Να βρείτε:
(α) Το πλήθος των πλευρών των δύο κανονικών πολυγώνων,
(β) Τις κεντρικές γωνίες των δύο κανονικών πολυγώνων.

Άσκηση 12
Ένα κανονικό ν-γωνο έχει 6 πλευρές περισσότερες και ένα κανονικό μ-γωνο, ενώ για τις κεντρικές γωνίες τους ισχύει ότι: $\omega_\nu = \frac{2}{3}\omega_\mu$. Να βρείτε τους αριθμούς ν και μ.

Άσκηση 13
Το δάπεδο ενός δωματίου στρώθηκε με πλακίδια σχήματος κανονικών πολυγώνων με πλήθος πλευρών: λ, μ, ν, όπου $\lambda \neq \mu$ και $\nu \neq \lambda$.
Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{2}$.

Άσκηση 14
Αν ένα πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο ομόκεντρους κύκλους, να αποδείξετε ότι είναι κανονικό.

Άσκηση 15
Αν Α, Β, Γ, Δ είναι διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού ν-γώνου $(\nu \geq 4)$, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A\Gamma}^2 - \mathrm{AB}^2 = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Delta}$.

Άσκηση 16
Αν $\mathrm{E}_{2\nu}$ είναι το εμβαδόν ενός κανονικού 2ν-γώνου $(\nu \geq 4)$, εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R), να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E}_{2\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{P}_\nu R$, όπου P_ν η περίμετρος του κανονικού ν-γώνου ακτίνας R.

Άσκηση 17
Αν λ_ν' είναι πλευρά κανονικού ν-γώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο και λ_ν, α_ν η πλευρά και το απόστημα αντίστοιχα, κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι: $R\cdot\lambda_\nu = \alpha_\nu \cdot \lambda_\nu'$.

Άσκηση 18
Αν $\mathrm{E}_\alpha, \mathrm{E}_\beta, \mathrm{E}_\gamma$ είναι εμβαδά κανονικών ν-γώνων που έχουν πλευρές ίσες αντίστοιχα με τις πλευρές α, β, γ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ $\left(\widehat{\mathrm{A}} = 90^o\right)$, να αποδείξετε ότι:
$\mathrm{E}_\beta + \mathrm{E}_\gamma = \mathrm{E}_\alpha$.

Άσκηση 19
Θεωρούμε ένα κανονικό ν-γωνο και ένα κανονικό μ-γωνο για τα οποία ισχύει ότι: $2\varphi_\nu - \omega_\mu = 180^o + \varphi_\nu - 2\omega_\mu$. Να αποδείξετε ότι τα δύο πολύγωνα είναι όμοια.

Άσκηση 20
Δίνεται ένα κανονικό ν-γωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 ... \mathrm{A}_\nu$ κέντρου Ο και ακτίνας R.
Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2)}{(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)} = \frac{R^2}{\lambda_\nu^2}$.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 11.1 και 11.2

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1

(γ)

Άσκηση 2

Ισχύει ότι $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow 4\alpha_\nu^2 + \lambda_\nu^2 = 4R^2$

$\Leftrightarrow \lambda_\nu^2 = 4(R^2 - \alpha_\nu^2)$ Σωστή η (γ)

Άσκηση 3

$\phi_\nu = 180° - \frac{360°}{\nu}$, $\omega_\nu = \frac{360°}{\nu}$, άρα $\phi_\nu + \omega_\nu = 180°$

Άρα σωστή η (β)

Άσκηση 4

Πεντάγωνο: $\omega_5 = \frac{360°}{5} = 72°$, $\phi_5 = 180° - 72° = 108°$

Εξάγωνο: $\omega_6 = \frac{360°}{6} = 60°$, $\phi_6 = 180° - 60° = 120°$

Δεκάγωνο: $\omega_{10} = \frac{360°}{10} = 36°$, $\phi_{10} = 180° - 36° = 144°$

Δωδεκάγωνο: $\omega_{12} = \frac{360°}{12} = 30°$, $\phi_{12} = 180° - 30° = 150°$

Άσκηση 5

$\phi_\nu = 108° \Leftrightarrow 180° - \frac{360°}{\nu} = 108° \Leftrightarrow \frac{360°}{\nu} = 180° - 108°$

$\Leftrightarrow \frac{360°}{\nu} = 72° \Leftrightarrow \boxed{\nu = 5}$ άρα σωστή η (δ)

Άσκηση 6

Επειδή τα κανονικά πολύγωνα έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια: $\frac{a_5}{a_5'} = \frac{R}{R'} = \frac{P_5}{P_5'} = \lambda = 2$

και $\frac{E_5}{E_5'} = \lambda^2 = 4$

Άσκηση 7

Θέλω $\phi_\nu < 90° \Leftrightarrow 180° - \frac{360°}{\nu} < 90°$

$\Leftrightarrow \frac{360°}{\nu} > 90° \Leftrightarrow \nu < \frac{360°}{90°} \Leftrightarrow \nu < 4$

άρα $\nu = 3$, που είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.

Άσκηση 8

(α) Ισχύουν οι σχέσεις:

$\frac{\lambda_\nu^2}{4} + a_\nu^2 = R^2 \ (1)$ και $\frac{\lambda_\mu^2}{4} + a_\mu^2 = R^2 \ (2)$

Από (1) − (2) $\frac{\lambda_\nu^2}{4} - \frac{\lambda_\mu^2}{4} + a_\nu^2 - a_\mu^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_\nu^2 - \lambda_\mu^2 = 4(a_\mu^2 - a_\nu^2)$

(β) Έχουμε: $\lambda_\nu > \lambda_\mu \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \lambda_\nu^2 > \lambda_\mu^2 \Leftrightarrow \lambda_\nu^2 - \lambda_\mu^2 > 0$

$\overset{(i)}{\Leftrightarrow} 4(a_\mu^2 - a_\nu^2) > 0 \Leftrightarrow a_\mu^2 - a_\nu^2 > 0 \Leftrightarrow a_\mu > a_\nu$

$\Leftrightarrow \boxed{a_\nu < a_\mu}$

Άσκηση 9

(α) $\phi_9 = 180° - \frac{360°}{9} = 180° - 40° = 140°$

(β) $\phi_\nu = 160° \Leftrightarrow 180° - \frac{360°}{\nu} = 160°$

$\Leftrightarrow \frac{360°}{\nu} = 20° \Leftrightarrow \boxed{\nu = 18}$

(γ) Θέλουμε: $\phi_\nu = 130° \Leftrightarrow 180° - \frac{360°}{\nu} = 130°$

$\Leftrightarrow \frac{360°}{\nu} = 180° - 130° \Leftrightarrow \frac{360°}{\nu} = 50° \Leftrightarrow \nu = \frac{36}{5} \notin \mathbb{N}$

Άρα δεν υπάρχει κανονικό ν-γωνο με γωνία 130°

Άσκηση 10

(α) $\phi_\nu = 4\omega_\nu \Leftrightarrow 180° - \frac{360°}{\nu} = 4\frac{360°}{\nu}$

$\Leftrightarrow 180° \cdot \nu - 360° - 4 \cdot 360° = 0$

$\Leftrightarrow 5 \cdot 360° = 180° \cdot \nu \Leftrightarrow \boxed{\nu = 10}$

(β) $\phi_{10} = 180° - \frac{360°}{10} = 180° - 36° = 144°$

άρα $\omega_{10} = 180° - 144° = 36°$

Άσκηση 11

(α) $\phi_\nu + \phi_{2\nu} = 300^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu} + 180^\circ - \frac{360^\circ}{2\nu} = 300$

$\Leftrightarrow \frac{2\cdot 360}{2\nu} + \frac{360^\circ}{2\nu} = 60^\circ \Leftrightarrow \frac{3\cdot 360^\circ}{2\nu} = 60^\circ$

$\Leftrightarrow \frac{3\cdot 180^\circ}{60^\circ} = \nu \Leftrightarrow \boxed{\nu = 9}$

Άρα έχουμε ένα κανονικό 9-γωνο και ένα κανονικό 18-γωνο.

(β) $\omega_9 = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ και $\omega_{18} = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$

Άσκηση 12

(α) $\nu = \mu + 6$ (1).

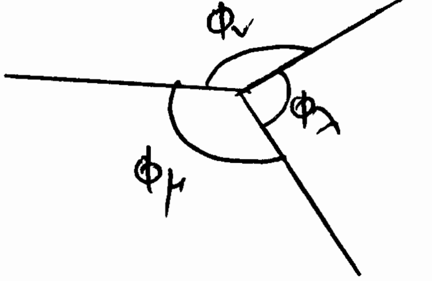
$\omega_\nu = \frac{2}{3}\omega_\mu \Leftrightarrow \frac{\cancel{360}}{\nu} = \frac{2}{3}\frac{\cancel{360^\circ}}{\mu}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\mu+6} = \frac{2}{3\mu} \Leftrightarrow 3\mu = 2\mu + 12 \Leftrightarrow \boxed{\mu = 12}$

Άρα $\boxed{\nu = 18}$

Άσκηση 13

Η κάλυψη με τα πλακίδια θα είναι πλήρης όταν σε κάθε σημείο που είναι κοινή κορυφή και των τριών πλακιδίων δεν υπάρχουν κενά.



Άρα πρέπει να ισχύει:

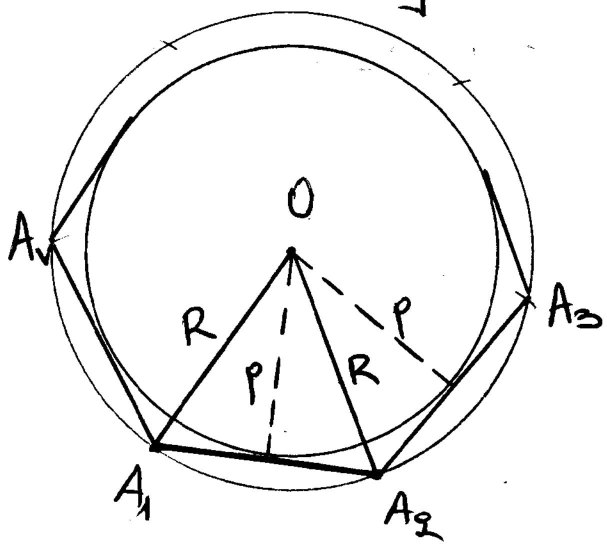
$\hat{\phi}_\nu + \hat{\phi}_\lambda + \hat{\phi}_\mu = 360^\circ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cancel{180^\circ} - \frac{360^\circ}{\nu} + \cancel{180^\circ} - \frac{360^\circ}{\lambda} + 180^\circ - \frac{360^\circ}{\mu} = \cancel{360^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{360^\circ}{\lambda} + \frac{360^\circ}{\mu} + \frac{360^\circ}{\nu} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}$$

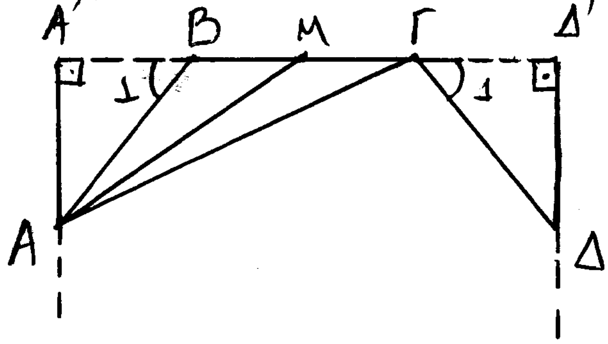
Άσκηση 14



Θεωρούμε το πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και περιγεγραμμένο σε κύκλο (O,ρ). Οι χορδές $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_\nu A_1$ του κύκλου (O,R) είναι ίσες μεταξύ τους, επειδή έχουν ίσα αποστήματα ίσα με την ακτίνα ρ του (O,ρ). Άρα και $\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \ldots = \overset{\frown}{A_\nu A_1}$

Επιπλέον καθεμία από τις εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_\nu$ στον κύκλο (O,R) αντιστοιχεί σε $\nu-2$ ίσα τόξα, άρα όλες οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_\nu$ είναι ίσες μεταξύ τους και το πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ είναι κανονικό.

Άσκηση 15



Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Φέρνουμε τις:

$A'A \perp B\Gamma$ και $\Delta\Delta' \perp B\Gamma$

Με εφαρμογή του $2^{ου}$ Θεωρ. διαμέσων στο $AB\Gamma$ έχουμε:

$A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma \cdot A'M$ (1)

Τα τρίγωνα $A\hat{A'}B$ και $\Delta\hat{\Delta'}\Gamma$ είναι ίσα διότι:

(1) $AB = \Gamma\Delta$ (πλευρά κανονικού πολυγώνου)

(2) $A' = \Delta' = 90°$

(3) $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών)

Άρα $A'B = \Gamma\Delta' \Leftrightarrow A'B + BM = \Gamma\Delta' + M\Gamma$

$\Leftrightarrow A'M = M\Delta'$ (2)

Η (1) γίνεται $A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma \cdot A'M = (B\Gamma + B\Gamma)\cdot A'M$

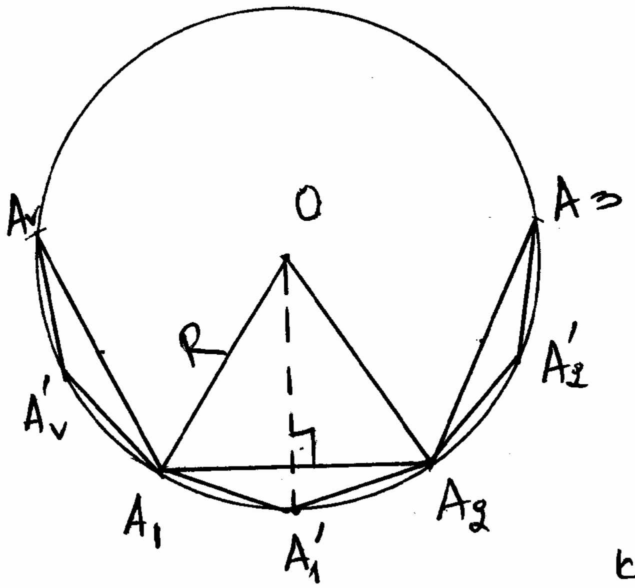
$= B\Gamma \cdot A'M + B\Gamma \cdot A'M \overset{(2)}{=\!=} B\Gamma \cdot A'M + B\Gamma \cdot M\Delta'$

$= B\Gamma(A'M + M\Delta') = B\Gamma \cdot A'\Delta' = B\Gamma \cdot A\Delta$

$A'\Delta' = A\Delta$ διότι το $AA'\Delta'\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Επιπλέον $B\Gamma = AB$ άρα $A\Gamma^2 - AB^2 = AB \cdot A\Delta$

$\boxed{\text{Άσκηση 16}}$



Έστω $A_1A_1'A_2A_2'A_3A_3' \ldots A_\nu A_\nu'$ είναι το κανονικό 2ν-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Τότε το $A_1A_2 \ldots A_\nu$ είναι κανονικό ν-γωνο ακτίνας R

Τα ν σε πλήθος τετράπλευρα $OA_1A_1'A_2$, $OA_2A_2'A_3$, $OA_\nu A_\nu' A_1$ είναι ίσα μεταξύ τους άρα και ισεμβαδικά.

Επομένως $E_{2\nu} = \nu(OA_1A_1'A_2)$ (1)

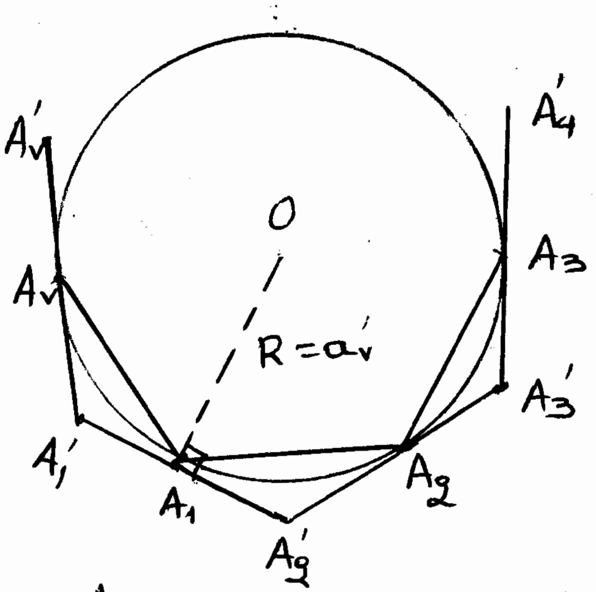
Το A_1' είναι το μέσο του $\overset{\frown}{A_1A_2}$ άρα $OA_1' \perp A_1A_2$

Επομένως το τετράπλευρο $OA_1A_1'A_2$ έχει κάθετες διαγώνιες, οπότε $(OA_1A_1'A_2)=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot OA_1'=\frac{1}{2}\lambda_\nu\cdot R$

Επομένως η (1) γίνεται: $\left.\begin{matrix} E_{2\nu}=\nu\cdot\frac{1}{2}\lambda_\nu\cdot R \\ P_\nu=\nu\lambda_\nu \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{E_{2\nu}=\frac{1}{2}P_\nu\cdot R}$$

Άσκηση 17



Έστω $A_1'A_2'\dots A_\nu'$ κανονικό πολύγωνο περιγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και $A_1A_2\dots A_\nu$ κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R).

Αυτά είναι όμοια άρα $\lambda=\frac{\lambda_\nu'}{\lambda_\nu}=\frac{a_\nu'}{a_\nu}$ (1)

Όμως $R=a_\nu'$ από την (1) έχουμε:

$$\frac{\lambda_\nu'}{\lambda_\nu}=\frac{R}{a_\nu}\Leftrightarrow\boxed{\lambda_\nu R=\lambda_\nu' a_\nu}$$

Άσκηση 18

Έστω E_α, E_β, E_γ τα εμβαδά των κανονικών πολυγώνων με πλευρές τις ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα. Τα κανονικά αυτά πολύγωνα, αφού έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών, είναι όμοια.

Επομένως είναι: $\frac{E_\beta}{E_\alpha}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ (1) και $\frac{E_\gamma}{E_\alpha}=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$ (2)

Από (1)+(2) έχουμε: $\frac{E_\beta+E_\gamma}{E_\alpha}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$ (3)

Το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο άρα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Άρα η (3) γίνεται: $\dfrac{E_\beta + E_\gamma}{E_\alpha} = 1 \Leftrightarrow E_\beta + E_\gamma = E_\alpha$

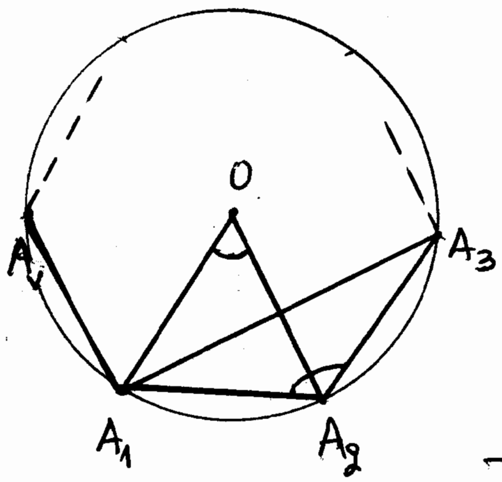
Άσκηση 19

Έχουμε: $2\varphi_\nu - \omega_\mu = 180^\circ + \varphi_\nu - 2\omega_\mu \Leftrightarrow \varphi_\nu + \omega_\mu = 180^\circ$

$\Leftrightarrow \cancel{180^\circ} - \dfrac{360^\circ}{\nu} + \dfrac{360^\circ}{\mu} = \cancel{180^\circ} \Leftrightarrow \dfrac{360^\circ}{\nu} = \dfrac{360^\circ}{\mu} \Leftrightarrow \boxed{\mu = \nu}$

Άρα τα δύο κανονικά πολύγωνα έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών, άρα είναι όμοια.

Άσκηση 20



Τα τρίγωνα $O\hat{A_1}A_2$ και $A_1\hat{A_2}A_3$ έχουν $A_1\hat{O}A_2 + A_1\hat{A_2}A_3 =$

$= \hat{\omega}_\nu + \hat{\varphi}_\nu = 180^\circ$

Άρα ισχύει ότι:

$$\frac{(OA_1A_2)}{(A_1A_2A_3)} = \frac{OA_1 \cdot OA_2}{A_2A_1 \cdot A_2A_3} = \frac{R \cdot R}{\lambda_\nu \cdot \lambda_\nu} = \frac{R^2}{\lambda_\nu^2}$$