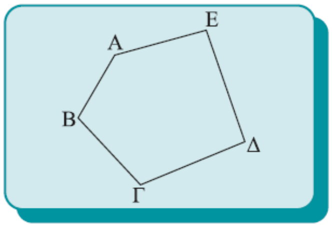
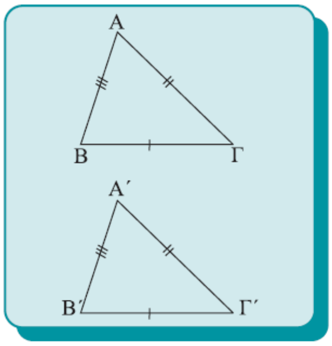
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10^{ο}
ΕΜΒΑΔΑ
10.1 ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΑ ΧΩΡΙΑ
10.2 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜ. ΣΧΗΜ. – ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜ. ΣΧΗΜ.
10.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ 1 (Πολυγωνικά χωρία)



Σχήμα 1

Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, για παράδειγμα ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 1). Το πολύγωνο μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν ένα χωρίο, που λέγεται **πολυγωνικό χωρίο** που ορίζεται από το ΑΒΓΔΕ.
Ένα πολυγωνικό χωρίο που ορίζεται από τρίγωνο, τετράπλευρο, ... , ν-γωνο λέγεται αντίστοιχα **τριγωνικό, τετραπλευρικό, ... ,ν-γωνικό**.
Επίσης, δύο πολυγωνικά χωρία λέγονται ίσα όταν τα αντίστοιχα πολύγωνα είναι ίσα (σχ. 2).
Τέλος ένα σχήμα που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών χωρίων, που ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγεται **πολυγωνική επιφάνεια**. Για παράδειγμα, το σχήμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 3) είναι μια πολυγωνική επιφάνεια.



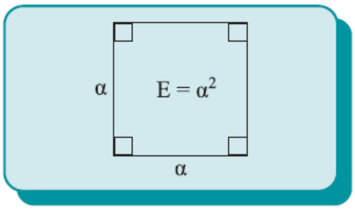
Σχήμα 2

ΘΕΩΡΙΑ 2

- Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.
- Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται **ισοδύναμα** ή **ισεμβαδικά.**

ΘΕΩΡΙΑ 3 (Εμβαδόν Τετραγώνου)

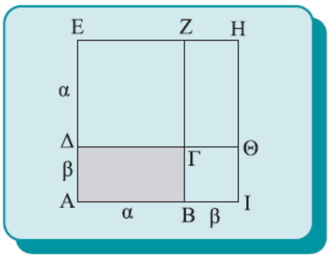
Το εμβαδόν ενός **τετραγώνου** πλευράς α είναι: α^2, δηλαδή: $\mathrm{E}=\alpha^2$.



ΘΕΩΡΙΑ 4 (Εμβαδόν Ορθογωνίου)

Το εμβαδόν ενός **ορθογωνίου** ισούται με το γινόμενο των πλευρών του. Δηλαδή αν α, β οι πλευρές και Ε το εμβαδόν είναι: $\mathrm{E}=\alpha\cdot\beta$.

Απόδειξη

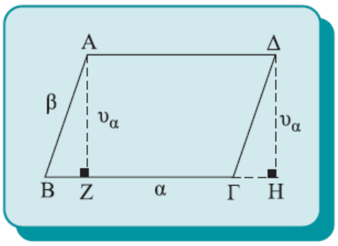


Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με $\mathrm{AB}=\alpha$ και $\mathrm{A\Delta}=\beta$.
Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E}=\alpha$, την ΑΒ κατά $\mathrm{BI}=\beta$ και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά $\alpha+\beta$ και επομένως είναι: $(\mathrm{AIHE})=(\alpha+\beta)^2$ (1).
Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Έτσι έχουμε: $(\Delta\Gamma\mathrm{ZE})=\alpha^2$, $(\mathrm{BI}\Theta\Gamma)=\beta^2$ και $(\Gamma\Theta\mathrm{HZ})=(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)$ (2)

Είναι φανερό όμως ότι: $(\mathrm{AIHE})=(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)+(\Gamma\Theta\mathrm{HZ})+(\mathrm{BI}\Theta\Gamma)+(\Delta\Gamma\mathrm{ZE})\Leftrightarrow$
$(\alpha+\beta)^2=2(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)+\alpha^2+\beta^2\Leftrightarrow 2(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2-\beta^2\Leftrightarrow$
$2(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=2\alpha\beta\Leftrightarrow(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=\alpha\cdot\beta$.

ΘΕΩΡΙΑ 5 (Εμβαδόν Παραλληλογράμμου)

Το εμβαδόν ενός **παραλληλογράμμου** ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή: $\mathrm{E} = \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta$, όπου α, β οι πλευρές και $\upsilon_\alpha, \upsilon_\beta$ τα αντίστοιχα ύψη.



Απόδειξη

Έστω ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, και ας θεωρήσουμε το ύψος ΑΖ που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι: $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{AZ}$.

Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ.

Τότε τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΗΓΔ είναι ίσα διότι:

(α) $\widehat{\mathrm{Z}} = \widehat{\mathrm{H}} = 90^o$, (β) $\mathrm{AB} = \Delta\Gamma$ (Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο),

(γ) $\mathrm{AZ} = \Delta\mathrm{H} = \upsilon_\alpha$ (ύψη)

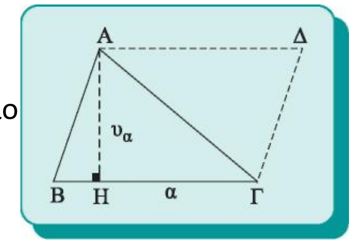
Κατά συνέπεια $(\mathrm{ZBA}) + (\mathrm{H\Gamma\Delta})$ (1). Από το σχήμα έχουμε ότι:

$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{ABZ}) + (\mathrm{AZ\Gamma\Delta})$, οπότε σύμφωνα με την (1) έχουμε ότι:

$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\Delta\Gamma\mathrm{H}) + (\mathrm{AZ\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AZH\Delta}) = \mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{AZ} = \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{AZ}$. Αφού $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{B\Gamma}$.

ΘΕΩΡΙΑ 6 (Εμβαδόν Τριγώνου)

Το εμβαδόν ενός **τρίγωνου** ισούται με το ημιγινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος: $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$



Απόδειξη

Με πλευρές ΑΒ και ΒΓ σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι: $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \alpha \cdot \upsilon_\alpha$ (1).

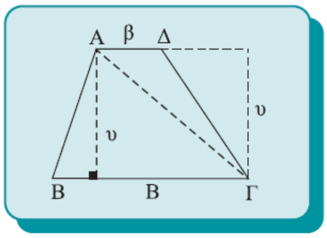
Όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ίσα, οπότε:

$(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{A\Delta\Gamma})$ (2). Από το σχήμα έχουμε ότι:

$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB\Gamma}) + (\mathrm{A\Gamma\Delta}) \Leftrightarrow \alpha \cdot \upsilon_\alpha = 2(\mathrm{AB\Gamma}) \Leftrightarrow (\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha$.

ΘΕΩΡΙΑ 7 (Εμβαδόν Τραπεζίου)

Το εμβαδόν ενός **τραπεζίου** ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του: $\mathrm{E} = \frac{(\mathrm{B} + \beta)}{2} \cdot \upsilon$, όπου Β, β οι βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του.



Απόδειξη

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ), με βάσεις $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B}$, $\mathrm{A\Delta} = \beta$ και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε: $\mathrm{E} = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB\Gamma}) + (\mathrm{A\Gamma\Delta})$ (1). Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ Έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως: $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\mathrm{B} \cdot \upsilon$ και $(\mathrm{AB\Delta}) = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon$ (2). Άρα ή (1) γίνεται μέσω της (2)

$\mathrm{E} = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}\mathrm{B} \cdot \upsilon + \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon \Leftrightarrow \mathrm{E} = \frac{\mathrm{B} + \beta}{2} \cdot \upsilon$.

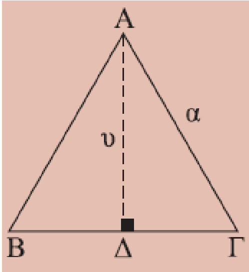
ΠΟΡΙΣΜΑ

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Το εμβαδόν Ε ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με: $\mathrm{E} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

ΛΥΣΗ

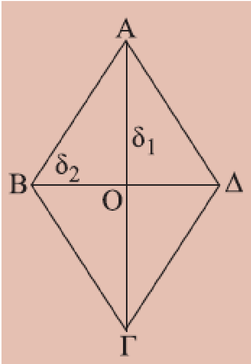


Φέρουμε το ύψος ΑΔ το οποίο είναι και διάμεσος, αφού το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ, από το πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε: $\upsilon^2 = \mathrm{A}\Delta^2 = \alpha^2 - \Delta\Gamma^2 =$.
$\alpha^2 - \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = \dfrac{3\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \upsilon = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Άρα: $\mathrm{E} = \dfrac{1}{2}\alpha\upsilon = \dfrac{1}{2}\alpha\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Το εμβαδόν ενός ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

ΛΥΣΗ



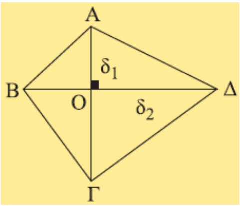
Από το σχήμα έχουμε ότι: $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB\Delta}) + (\mathrm{B\Gamma\Delta})$ (1)
Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες και διχοτομούνται έχουμε: $(\mathrm{AB\Delta}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{AO} = \dfrac{1}{2}\delta_2\cdot\dfrac{\delta_1}{2} \Leftrightarrow (\mathrm{AB\Delta}) = \dfrac{1}{4}\delta_1\cdot\delta_2$ (2).
Όμοια έχουμε: $(\mathrm{B\Gamma\Delta}) = \dfrac{1}{4}\delta_1\cdot\delta_2$ (3). Η (1) γίνεται μέσω των (2), (3) $\mathrm{E} = \dfrac{1}{2}\delta_1\cdot\delta_2$.

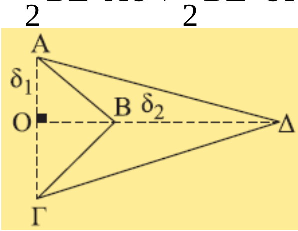
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να αποδείξετε ότι ο τύπος: $\mathrm{E} = \dfrac{1}{2}\delta_1\cdot\delta_2$, ισχύει στην περίπτωση οποιουδήποτε κυρτού ή μη κυρτού, τετράπλευρου με κάθετες διαγωνίους.

ΛΥΣΗ

Από το σχήμα έχουμε ότι: $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB\Delta}) + (\mathrm{B\Gamma\Delta}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{AO} + \dfrac{1}{2}\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{O\Gamma} =$
$= \dfrac{1}{2}\mathrm{B\Delta}\cdot(\mathrm{AO}+\mathrm{O\Gamma}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{A\Gamma}$.



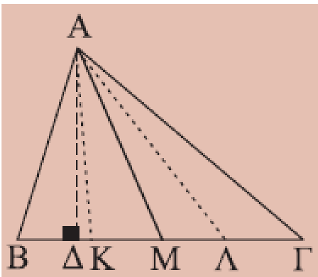


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

(i) Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΔ να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{ABM}) = (\mathrm{AM\Gamma})$.
(ii) Από την κορυφή Α να φέρετε τρεις ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τέσσερα ισοδύναμα τρίγωνα.

ΛΥΣΗ

(i) Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ, το οποίο είναι ύψος στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ, οπότε έχουμε: $(\mathrm{ABM}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{BM}\cdot\mathrm{A\Delta} = \dfrac{1}{2}\mathrm{M\Gamma}\cdot\mathrm{A\Delta} = (\mathrm{AM\Gamma})$, αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ.
(ii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι οι ζητούμενες ευθείες είναι οι φορείς των διαμέσων ΑΜ, ΑΚ και ΑΛ των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΜ και ΑΜΓ αντίστοιχα.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1
Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 16. Πόσο είναι το εμβαδόν του;

Άσκηση 2
Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις α=9, β=4 και είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς x. Να βρεθεί το x.

Άσκηση 3
Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha < \beta$. Με ποια ανισοτική σχέση συνδέονται τα υ_α και υ_β

Άσκηση 4
Ένας ρόμβος έχει μήκη διαγωνίων 4 και 5 αντίστοιχα, με τι ισούται το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος.

Άσκηση 5
Ένας χωρικός αντάλλαξε έναν αγρό, που είχε σχήμα τετραγώνου πλευράς 60m, με έναν άλλο αγρό (με την ίδια ποιότητα χώματος) που είχε σχήμα ορθογωνίου με πλάτος 40m και περίμετρο ίση με την περίμετρο του πρώτου. Έχασε ή κέρδισε ο χωρικός από την ανταλλαγή αυτή. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 6
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=6$, $\mathrm{A\Gamma}=8$ και $\widehat{\mathrm{A}}=60^o$. Να βρεθούν:
(i) Το ύψος υ_β, (ii) Το εμβαδόν (ΑΒΓ), (iii) Το ύψος υ_α

Άσκηση 7
Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με $\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\mathrm{B}}=90^o$, $\mathrm{A\Delta}=15m$, $\mathrm{B\Gamma}=20m$ και $\mathrm{AB}=12m$. Ένας καινούργιος δρόμος περνάει παράλληλα προς τη ΔΓ και αποκόπτει μια λωρίδα πλάτους 3m. Πόσο τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο που απομένει;

Άσκηση 8
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\widehat{\mathrm{A}}=90^o$, στο οποίο ισχύουν (ΑΒΓ) = 600, ΑΒ = 40 και έστω ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Να βρείτε:
(α) Το μήκος της πλευράς ΑΓ, (β) Το μήκος της πλευράς ΑΔ,
(γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΓ.

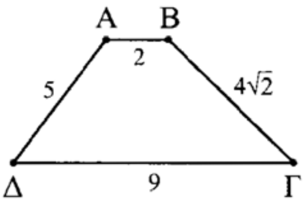
Άσκηση 9
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\mathrm{AB}=6$, $\mathrm{A\Gamma}=3\sqrt{3}$ και $\mathrm{B\Gamma}=3\sqrt{7}$.
(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
(β) Να βρείτε την πλευρά ισόπλευρο τριγώνου που είναι ισοδύναμο με το ΑΒΓ.

Άσκηση 10
Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 18 και διαγώνιο ίση με 7. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Άσκηση 11
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, με βάσεις ΑΒ < ΓΔ, το οποίο έχει εμβαδόν 30 και διάμεσο $\mathrm{MN}=5$.
(α) Να βρείτε το ύψος του τραπεζίου.
(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι: $(\Gamma\Delta\mathrm{MN})=(\mathrm{ABNM})+6$, να βρείτε τα μήκη των ΑΒ και ΓΔ.

Άσκηση 12

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, με βάσεις $\mathrm{AB}=2$, $\Gamma\Delta=9$ και μη παράλληλες πλευρές $\mathrm{A}\Delta=5$ και $\mathrm{B}\Gamma=4\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.



Άσκηση 13

Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 3cm, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 81 cm^2. Να βρείτε την πλευρά του τετραγώνου αυτού.

Άσκηση 14

Δίνεται ένα ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ, ΑΒ < ΓΔ, $\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\Delta}=90^{o}$, $\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{A}\Delta=3$ και $\mathrm{B}\Gamma=5$. Να υπολογίσετε:

(α) Την προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ, (β) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ,

(γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

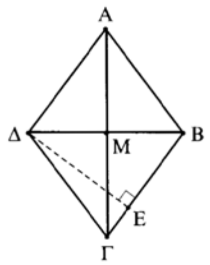
Άσκηση 15

Ο ρόμβος ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος έχει εμβαδόν 96 cm^2 και διαγώνιο $\mathrm{A}\Gamma=16cm$. Να υπολογίσετε το μήκος:

(α) Της διαγωνίου ΒΔ,

(β) Της πλευράς του ρόμβου,

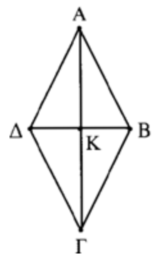
(γ) Του ύψους ΔΕ του ρόμβου.



Άσκηση 16

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς $\sqrt{5}$, με ΑΓ > ΒΔ. Αν η απόσταση δύο απέναντι πλευρών του ρόμβου είναι: $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, να βρείτε: (α) Το εμβαδόν του ρόμβου,

(β) Τα μήκη των διαγωνίων ΑΓ και ΔΒ.



Άσκηση 17

Αν Σ είναι σημείο μιας πλευράς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι: $(\Sigma\mathrm{A}\Gamma)+(\Sigma\mathrm{B}\Delta)=(\mathrm{AB}\Gamma)$.

Άσκηση 18

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ). Αν Μ το μέσο της πλευράς του ΑΒ, να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=2(\mathrm{M}\Gamma\Delta)$.

Άσκηση 19

Αν ω είναι η γωνία των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=\dfrac{1}{2}\mathrm{A}\Gamma\cdot\mathrm{B}\Delta\cdot\eta\mu\omega$.

Άσκηση 20

Ο ιδιοκτήτης ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, του οποίου το μήκος 18m μεγαλύτερο του πλάτους, θέλει να σχηματίσει γύρω από το οικόπεδο και εξωτερικά αυτού μια δενδροστοιχία πλάτους 2,5m. Έτσι αναγκάζεται να αγοράσει από τους γείτονες του $695m^2$. Να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου.

Άσκηση 21

Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ, το μέσο Ν του ΓΜ και το μέσο Ρ του ΒΝ. Να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{MNP})=\dfrac{1}{8}(\mathrm{AB}\Gamma)$.

Άσκηση 22
Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε: $\mathrm{Z\Gamma} = \mathrm{H\Delta} = \dfrac{\alpha}{4}$.
(i) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΖ και ΒΗ τέμνονται κάθετα σε σημείο Κ.
(ii) Να υπολογισθούν τα μήκη των τμημάτων: ΑΚ, ΑΗ και ΚΗ.
(iii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΚΗΔ.

Άσκηση 23
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ο στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
(i) $(\mathrm{OAB}) + (\mathrm{O\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB\Gamma})$, (ii) $(\mathrm{OA\Gamma}) + (\mathrm{OB\Gamma}) = (\mathrm{O\Gamma\Delta})$.

Άσκηση 24
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{BM\Delta N}) = \dfrac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{2}$.

Άσκηση 25
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο της πλευράς ΓΔ, ώστε:
$(\mathrm{AB\Gamma E}) = 2(\mathrm{A\Delta E})$. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{\Gamma E} = \dfrac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{3}$.

Άσκηση 26
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ < ΓΔ. Από το Β φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ, που τέμνει τη ΓΔ στο Ε. Αν Μ είναι το μέσο του ΓΕ, να αποδείξετε ότι:
$(\mathrm{BM\Delta}) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$.

Άσκηση 27
Δίνεται τυχαίο κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{AM\Gamma N}) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$.

Άσκηση 28
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΑΓ κατά τμήμα $\mathrm{\Gamma E} = \mathrm{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{B\Gamma\Delta E}) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta})$.

Άσκηση 29
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{MA\Gamma}) + (\mathrm{M\Delta B}) = \dfrac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}{2}$.

Άσκηση 30
Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΗ έχουν την ίδια περίμετρο.
Να αποδείξετε ότι: $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(\mathrm{EZH})$.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 10.1 – 10.2 – 10.3
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1

Έστω α η πλευρά του τετραγώνου. Άρα $\Pi = 16$
$\Leftrightarrow 4\alpha = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$. Επομένως $E = \alpha^2 = 4^2 = 16$.

Άσκηση 2

$E = \alpha\beta = 9 \cdot 4 = 36$. Άρα $E_{τετρ} = x^2 = 36 \Leftrightarrow \boxed{x = 6}$

Άσκηση 3

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha \cdot u_\alpha$, $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta u_\beta$. Άρα $\frac{1}{2}\alpha \cdot u_\alpha = \frac{1}{2}\beta u_\beta$

$\Leftrightarrow \frac{u_\alpha}{u_\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$, όμως $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} > 1$

Άρα $\frac{u_\alpha}{u_\beta} = \frac{\beta}{\alpha} > 1 \Leftrightarrow \boxed{u_\alpha > u_\beta}$

Άσκηση 4

$E = \frac{1}{2}\delta_1\delta_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$

Το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος είναι το εμβαδόν του ρόμβου, άρα είναι 10.

Άσκηση 5

$\alpha = 60m \rightarrow$ τετράγωνο, $x = 40m$, $\Pi_{ορθ} = \Pi_{τετρ}$

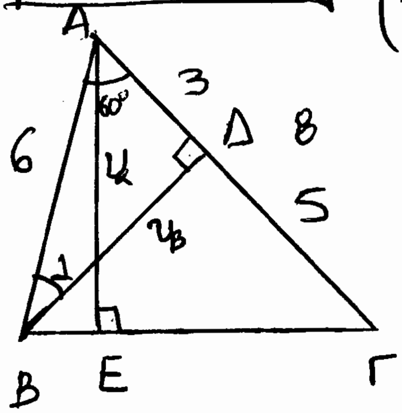
$\Pi_{τετρ} = 4 \cdot \alpha = 240m = \Pi_{ορθ}$

$\Pi_{ορθ} = 2x + 2y = 240 \Leftrightarrow 80 + 2y = 240 \Leftrightarrow \boxed{y = 80m}$

Άρα $E_{ορθ} = x \cdot y = 40 \cdot 80 = 3200m^2$, $E_{τετρ} = 60^2 = 3600m^2$

Άρα $E_{ορθ} < E_{τετρ}$, άρα έχασε

Άσκηση 6



(i) $\hat{B}_1 = 30°$. Άρα $A\Delta = \frac{AB}{2} = 3$

Από Π.Θ στο $A\hat{B}\Delta$ έχουμε: $\upsilon_B^2 = AB^2 - A\Delta^2$

$\Leftrightarrow \upsilon_B^2 = 36 - 9 \Leftrightarrow \boxed{\upsilon_B = 3\sqrt{3}\ \mu}$

(ii) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \cdot B\Delta = \frac{1}{2} 8 \cdot 3\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow (AB\Gamma) = 12\sqrt{3}$ τμ.

(iii) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot \upsilon_a$ (1)

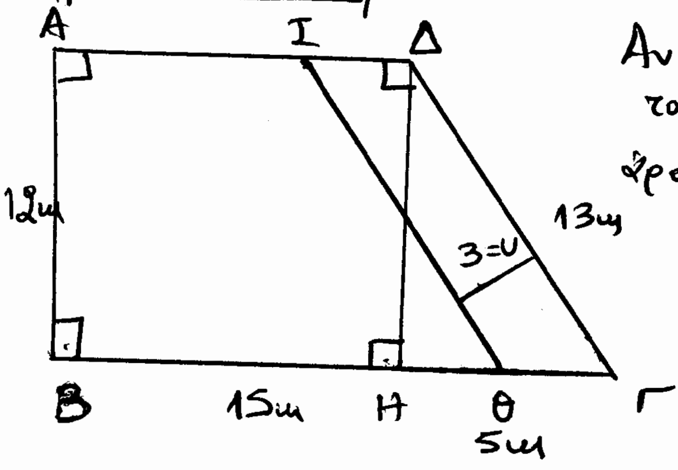
Από Π.Θ στο $B\hat{\Delta}\Gamma$ έχουμε: $B\Gamma^2 = \upsilon_\beta^2 + \Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 27 + 25$

$\Leftrightarrow B\Gamma^2 = 52 \Leftrightarrow \boxed{B\Gamma = 2\sqrt{13}\ \mu}$

Άρα η (1) γίνεται: $12\sqrt{3} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\sqrt{13} \cdot \upsilon_a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \upsilon_a = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \boxed{\upsilon_a = \frac{12\sqrt{39}}{13}\ \mu}$

Άσκηση 7



Αν ΔΗ είναι το ύψος του τραπεζίου τότε ΑΒΗΔ είναι ορθογώνιο (έχει 3 ορθές)

άρα $BH = A\Delta = 15\mu$

$H\Gamma = B\Gamma - BH = 20 - 15 = 5\mu$

Από Π.Θ στο $\Gamma\hat{\Delta}H$ έχουμε:

$\Delta\Gamma^2 = \Delta H^2 + H\Gamma^2 = 12^2 + 5^2$

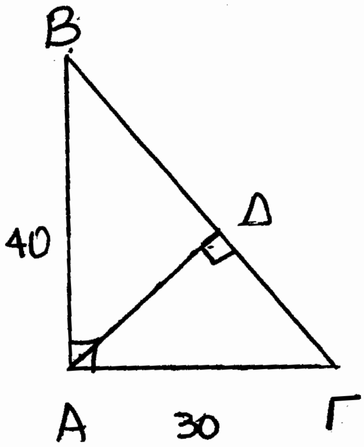
$\Leftrightarrow \Delta\Gamma^2 = 144 + 25 = 169 \Leftrightarrow \boxed{\Delta\Gamma = 13\mu}$

$E_{\Theta I\Delta\Gamma} = \Delta\Gamma \cdot \upsilon = 13 \cdot 3 = 39\ \mu^2$

$(AB\Theta I) = (AB\Gamma\Delta) - (\Theta I\Delta\Gamma) = \frac{B\Gamma + A\Delta}{2} \cdot AB - 39$

$= \frac{20 + 15}{2} \cdot 12 - 39 = 35 \cdot 6 - 39 = 210 - 39 = 171\ \mu^2$

Άσκηση 8 $(AB\Gamma) = 600$, $AB = 40$



(α) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \Leftrightarrow 600 = \frac{1}{2} 40 \cdot A\Gamma$

$\Leftrightarrow 20 A\Gamma = 600 \Leftrightarrow \boxed{A\Gamma = 30}$

(β) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta$ (1)

Από Π.Θ στο $AB\Gamma$ έχουμε: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

$\Leftrightarrow B\Gamma^2 = 40^2 + 30^2 \Leftrightarrow B\Gamma = 50$

Άρα η (1) γίνεται $600 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot A\Delta \Leftrightarrow 50 \cdot A\Delta = 1200$

$\Leftrightarrow \boxed{A\Delta = 24}$

(γ) $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow 900 = 50 \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \boxed{\Gamma\Delta = 18}$

Άρα $(A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot A\Delta \cdot \Gamma\Delta = \frac{1}{2} 24 \cdot 18 = 216$

Άσκηση 9

(α) $B\Gamma^2 = 9 \cdot 7 = 63$

$AB^2 + A\Gamma^2 = 36 + 27 = 63$ άρα $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

$\Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$

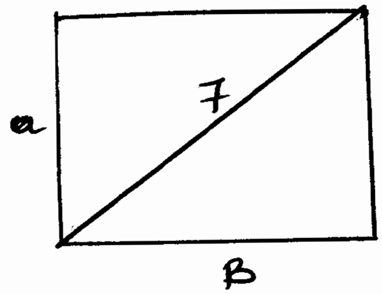
(β) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

Έστω x η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου

έχουμε $\frac{x^2 \cancel{\sqrt{3}}}{4} = 9 \cdot \cancel{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{x = 6}$

Άσκηση 10

$\Pi_{o\rho\theta} = 18$



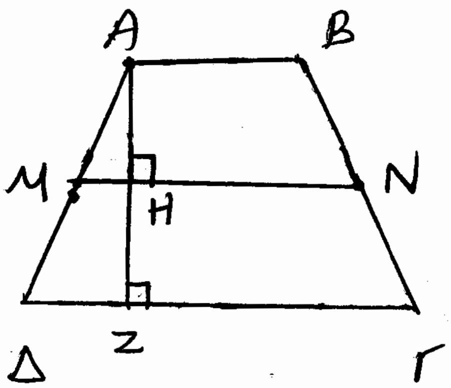
Από το Π.Θ $a^2+\beta^2=49$ (1)

$2a+2\beta=18 \Leftrightarrow a+\beta=9$

$\Leftrightarrow (a+\beta)^2 = 81 \Leftrightarrow a^2+\beta^2+2a\beta=81 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 49+2a\beta=81$

$\Leftrightarrow 2a\beta=32 \Leftrightarrow a\beta=16 \Leftrightarrow E=16$ τμ

Άσκηση 11



$MN = \frac{AB+\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \boxed{AB+\Delta\Gamma=10 \ (1)}$

(α) $(AB\Gamma\Delta) = \frac{AB+\Delta\Gamma}{2}\cdot u$

$\Leftrightarrow 30 = \frac{10}{2}\cdot u \Leftrightarrow \boxed{u=6}$

(β) Στο $A\Delta Z$ το M μέσο της $A\Delta$ και $MH \parallel \Delta Z$ άρα H μέσο της AZ

Άρα $MH = \frac{\Delta Z}{2}$. Άρα $(\Gamma\Delta MN) = (ABNM)+6$

$\Leftrightarrow \frac{\Delta\Gamma+MN}{2}\cdot HZ = \frac{AB+MN}{2}\cdot AH + 6$

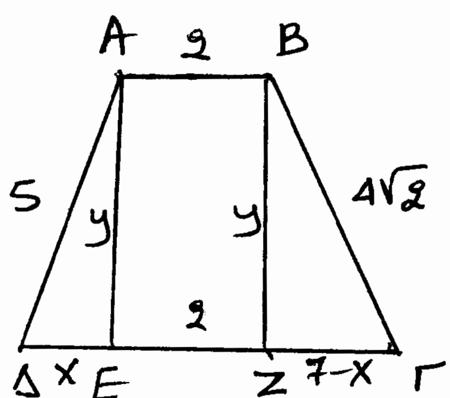
$\Leftrightarrow (\Delta\Gamma+5)\cdot 3 = (AB+5)\cdot 3 + 12$

$\Leftrightarrow \Delta\Gamma+\cancel{5} = AB+\cancel{5}+4 \Leftrightarrow \boxed{\Delta\Gamma = AB+4}$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $AB+AB+4=10 \Leftrightarrow \boxed{AB=3}$

και $\boxed{\Delta\Gamma=7}$

Άσκηση 12



Από Π.Θ στο $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ έχουμε:

$x^2+y^2=25$ (1)

Από Π.Θ στο $\overset{\triangle}{B\Gamma Z}$ έχουμε:

$(7-x)^2+y^2 = 16\cdot 2 \Leftrightarrow 49-14x+x^2+y^2=32$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 49-14x+25=32 \Leftrightarrow 14x=42$

$\Leftrightarrow \boxed{x=3}$ Άρα $y^2=16 \Leftrightarrow \boxed{y=4}$

Άρα $(AB\Gamma\Delta) = \frac{\Delta\Gamma + AB}{2} \cdot u = \frac{2+9}{2} \cdot 4 = 22$ τ.μ

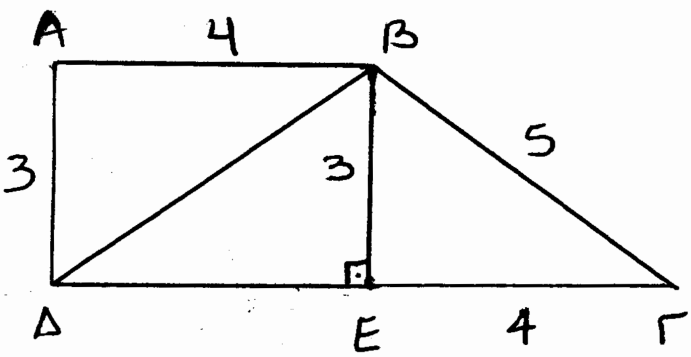
Άσκηση 13

Έστω α η πλευρά του τετραγώνου, τότε:

$(a+3)^2 = a^2 + 81 \Leftrightarrow \cancel{a^2} + 6a + 9 = \cancel{a^2} + 81$

$\Leftrightarrow 6a = 72 \Leftrightarrow \boxed{a = 12 \text{ cm}}$

Άσκηση 14



(α) $BE = 3$

Από Π.Θ στο $\overset{\triangle}{B\Gamma E}$ έχουμε:

$\Gamma E^2 = B\Gamma^2 - BE^2 \Leftrightarrow \boxed{\Gamma E = 4}$

(β) $(AB\Gamma\Delta) = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} \cdot BE$

$\Leftrightarrow (AB\Gamma\Delta) = \frac{4+8}{2} \cdot 3 = 18$ τμ

(γ) $(\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} \Delta\Gamma \cdot BE = \frac{1}{2} \, 8 \cdot 3 = 12$ τμ

Άσκηση 15

(α) $(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot B\Delta = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot B\Delta \Leftrightarrow 96 = 8 \cdot B\Delta$

$\Leftrightarrow B\Delta = 12$ cm

(β) $MB = \frac{B\Delta}{2} = 6$ cm και $AM = \frac{A\Gamma}{2} = 8$ cm

Από Π.Θ στο $\overset{\triangle}{AMB}$ έχουμε: $AB^2 = AM^2 + MB^2$

$\Leftrightarrow AB^2 = 64 + 36 \Leftrightarrow \boxed{AB = 10 \text{ cm}}$

(γ) $(AB\Gamma\Delta) = A\Delta \cdot \Delta E \Leftrightarrow 96 = 10 \cdot \Delta E \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta E = \frac{48}{5}$ cm

Άσκηση 16

(α) $(ΑΒΓΔ) = ΑΔ \cdot υ = \sqrt{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = 4 τμ$.

(β) $(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΒΔ \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΒΔ \Leftrightarrow \boxed{ΑΓ \cdot ΒΔ = 8}$ (1)

Από το Π.Θ στο ΑΚΒ έχουμε: $ΑΚ^2 + ΚΒ^2 = ΑΒ^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{ΑΓ}{2}\right)^2 + \left(\frac{ΒΔ}{2}\right)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow \boxed{ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = 20}$ (2)

Η (2) $\xrightarrow{(1)} \left(\frac{8}{ΒΔ}\right)^2 + ΒΔ^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{64}{ΒΔ^2} + ΒΔ^2 = 20$

$\Leftrightarrow ΒΔ^4 - 20ΒΔ^2 + 64 = 0$ θέτω $ω = ΒΔ^2$

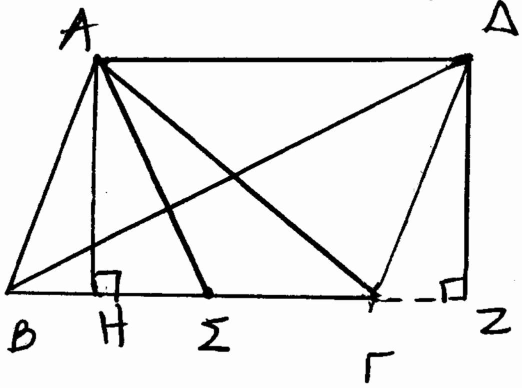
$ω^2 - 20ω + 64 = 0 \Leftrightarrow Δ = 400 - 256 = 144$

$ω_{1,2} = \frac{20 \pm 12}{2}$ <
- 16 Για $ΒΔ^2 = 16 \Leftrightarrow ΒΔ = 4$
- 4 Για $ΒΔ^2 = 4 \Leftrightarrow ΒΔ = 2$

• Για $ΒΔ = 4$ έχουμε $ΑΓ = 2$ απορρ αφού $ΒΔ < ΑΓ$

• Για $ΒΔ = 2$ " $ΑΓ = 4$

Άσκηση 17



Ν.δ.ο: $(ΣΑΓ) + (ΣΒΔ) = (ΑΒΓ)$

$$\left.\begin{aligned}(ΣΑΓ) &= \frac{1}{2} ΣΓ \cdot ΑΗ \\ (ΣΒΔ) &= \frac{1}{2} ΣΒ \cdot ΔΖ\end{aligned}\right\} (+)$$

$ΑΗ = ΔΖ$ ως απόσταση παραλλήλων

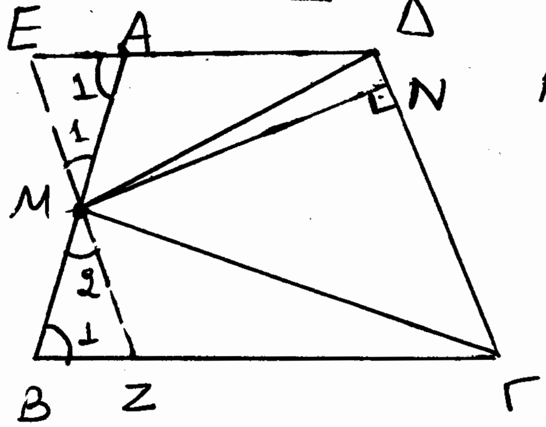
$$(ΣΑΓ) + (ΣΒΔ) = \frac{1}{2} ΑΗ (ΣΒ + ΣΓ)$$

$$= \frac{1}{2} ΑΗ \cdot ΒΓ$$

$$= (ΑΒΓ)$$

Άσκηση 18

$(AB\Gamma\Delta) = 2(M\Gamma\Delta)$



Από το M φέρουμε $EZ \parallel \Delta\Gamma$

Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{MAE}$ και $\overset{\triangle}{MBZ}$ έχουν

(α) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν

(β) $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ ως εντός εναλλάξ των $\Delta E \parallel B\Gamma$ και AB τέμνουσα

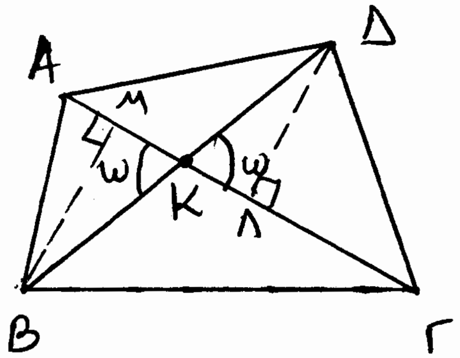
(γ) $AM = MB$, M μέσο της AB

άρα $(MAE) = (MBZ)$

$(AB\Gamma\Delta) = (AMZ\Gamma\Delta) + (MBZ) = (AMZ\Gamma\Delta) + (MAE)$

$= (EZ\Gamma\Delta) = \Delta\Gamma \cdot MN = 2\dfrac{1}{2}\Delta\Gamma \cdot MN = 2(M\Gamma\Delta)$

Άσκηση 19



$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta)$

$= \dfrac{1}{2}A\Gamma \cdot BM + \dfrac{1}{2}A\Gamma \cdot \Delta\Lambda \quad (1)$

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABK}$ έχουμε: $\eta\mu\omega = \dfrac{BM}{BK}$

$\Leftrightarrow BM = BK \cdot \eta\mu\omega \quad (2)$

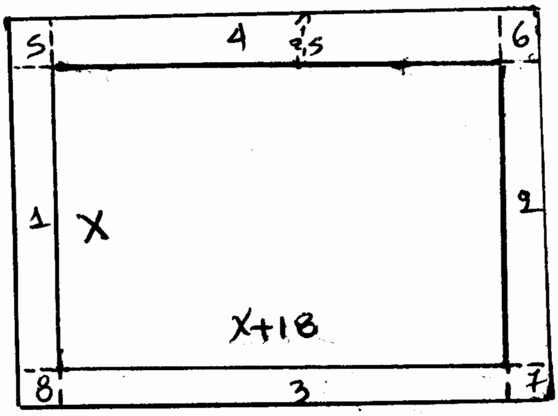
Όμοια στο $\Delta\hat{\Gamma}K$ έχουμε: $\eta\mu\omega = \dfrac{\Delta\Lambda}{\Delta K}$

$\Leftrightarrow \Delta\Lambda = \eta\mu\omega \cdot \Delta K \quad (3)$

Η $(1) \xRightarrow{(2),(3)} (AB\Gamma\Delta) = \dfrac{1}{2}A\Gamma \cdot BK \cdot \eta\mu\omega + \dfrac{1}{2}A\Gamma \cdot \Delta K\, \eta\mu\omega$

$= \dfrac{1}{2}A\Gamma(BK + K\Delta) \cdot \eta\mu\omega = \dfrac{1}{2}A\Gamma \cdot B\Delta \cdot \eta\mu\omega$

Άσκηση 20



$E_1+E_2 = x\cdot 2,5 + x\cdot 2,5$
$= 5x\ m^2$

$E_3+E_4 = (x+18)\cdot 2,5\cdot 2$
$= 5(x+18)\ m^2$

$E_5+\ \ +E_7+E_8 = (2,5)^2\cdot 4 = 25\ m^2$

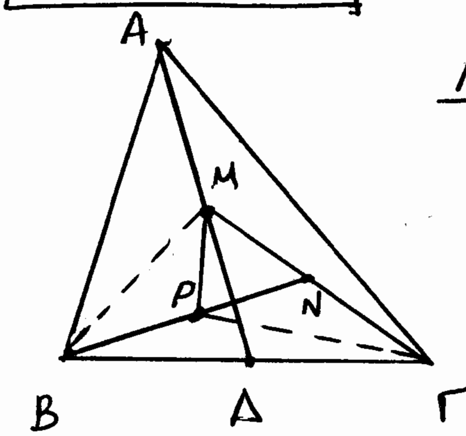
$E_1+E_2+\dots+E_8 = 695 \iff 5x+5(x+18)\quad 25 = 695$

$\iff x+x+18+5 = 139 \iff 2x = 116 \iff \boxed{x=58}$

Πλάτος $\rightarrow$ 58 m, Μήκος $\rightarrow$ 76 m

Άσκηση 21

$(MNP) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$



Λύση:

Η MP διάμεσος άρα $(MNP) = \frac{1}{2}(BMN)$ (1)

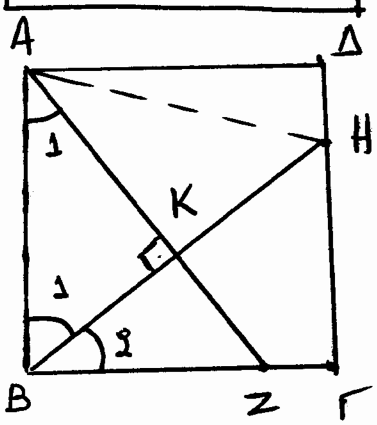
Η BN " άρα $(BMN) = \frac{1}{2}(BM\Gamma)$ (2)

Η MΔ " άρα $(BM\Gamma) = (BM\Delta)+(\Gamma M\Delta)$

$= \frac{1}{2}(AB\Delta) + \frac{1}{2}(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$ (3)

Άρα $(MNP) = \frac{1}{2} BMN \overset{(2)}{=\!=} \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}(BM\Gamma) = \frac{1}{2^3}(AB\Gamma) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$

Άσκηση 22



(i) Τα τρίγωνα $A\hat{B}Z$ και $B\hat{H}\Gamma$ έχουν

(α) $AB = B\Gamma = \alpha$

(β) $BZ = H\Gamma = \frac{3\alpha}{4}$ άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$ (1)

(γ) $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$

Άρα $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 \overset{(1)}{=} \hat{B}_2 + \hat{B}_1 = \hat{B} = 90^\circ$ άρα $\boxed{\hat{K} = 90^\circ}$

(ii) Από το ΠΘ στο $\overset{\triangle}{ABZ}$ έχουμε $AZ^2 = AB^2 + BZ^2$

$\Leftrightarrow AZ^2 = a^2 + \frac{9a^2}{16} \Leftrightarrow \boxed{AZ = \frac{5a}{4}}$

Στο $\overset{\triangle}{ABZ}$ έχουμε: $AB^2 = AZ \cdot AK \Leftrightarrow a^2 = \frac{5a}{4} \cdot AK$

$\Leftrightarrow \boxed{AK = \frac{4a}{5}}$

Από το ΠΘ στο $\overset{\triangle}{A\Delta H}$ έχουμε: $A\Delta^2 + \Delta H^2 = AH^2$

$\Leftrightarrow a^2 + \frac{a^2}{16} = AH^2 \Leftrightarrow AH^2 = \frac{17}{16} a^2 \Leftrightarrow \boxed{AH = \frac{a}{4}\sqrt{17}}$

Από το Π.Θ στο $\overset{\triangle}{KAH}$ έχουμε: $AH^2 = AK^2 + KH^2$

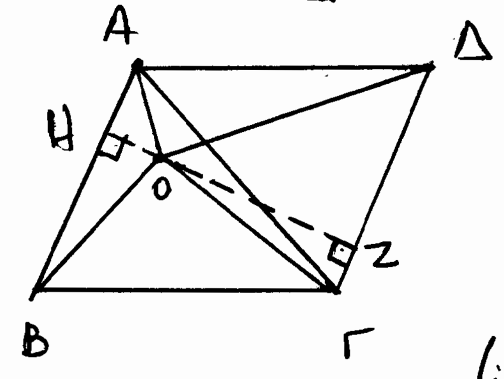
$\Leftrightarrow \frac{16a^2}{25} + KH^2 = \frac{17}{16} a^2 \Leftrightarrow KH^2 = \frac{17a^2}{16} - \frac{16a^2}{25}$

$\Leftrightarrow KH^2 = \frac{425a^2 - 256a^2}{400} = \frac{169a^2}{400} \Leftrightarrow \boxed{KH = \frac{13a}{20}}$

(iii) $(AKH\Delta) = (AKH) + (AH\Delta) = \frac{1}{2} AK \cdot KH + \frac{1}{2} A\Delta \cdot \Delta H$

$= \frac{1}{2} \frac{4a}{5} \cdot \frac{13a}{20} + \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{4} = \frac{52a^2}{200} + \frac{a^2}{8} = \frac{77a^2}{200}$ τμ

Άσκηση 23



(i) $(OAB) + (O\Gamma\Delta)$

$= \frac{1}{2} AB \cdot OH + \frac{1}{2} \Delta\Gamma \cdot OZ$

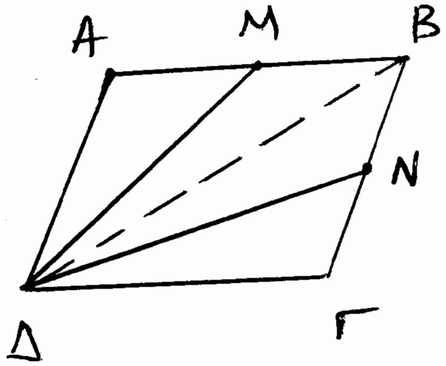
$= \frac{1}{2} AB(OH + OZ) = \frac{1}{2} AB \cdot HZ$

$= \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma)$

(ii) $(OA\Gamma) + (OB\Gamma) = (AB\Gamma) - (OAB)$

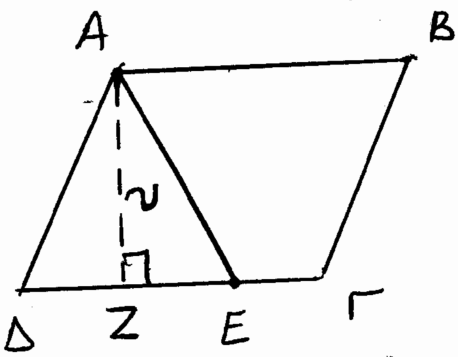
$= (OAB) + (O\Gamma\Delta) - (OAB) = (O\Gamma\Delta)$

Άσκηση 24



$$(BM\Delta N) = (BM\Delta) + (BN\Delta)$$
$$= \frac{(AB\Delta)}{2} + \frac{(B\Gamma\Delta)}{2} = \frac{(AB\Delta)+(B\Gamma\Delta)}{2}$$
$$= \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2}$$

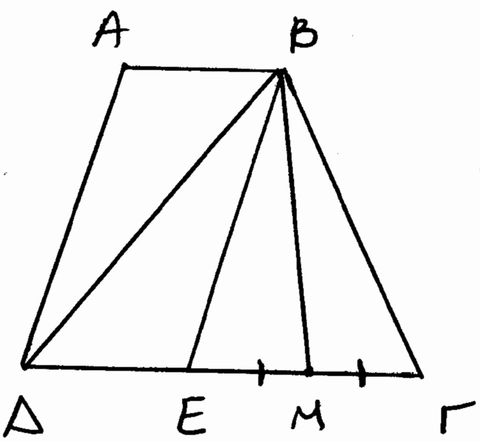
Άσκηση 25



$$(AB\Gamma E) = 2(A\Delta E)$$
$$\Leftrightarrow \frac{AB+\Gamma E}{2}\cdot\cancel{\upsilon} = 2\cdot\frac{1}{2}\,\Delta E\cdot\cancel{\upsilon}$$
$$\Leftrightarrow AB+\Gamma E = 2\Delta E$$
$$\Leftrightarrow \Delta\Gamma+\Gamma E = 2(\Delta\Gamma - E\Gamma)$$
$$\Leftrightarrow \Gamma\Delta + \Gamma E = 2\Gamma\Delta - 2\Gamma E \Leftrightarrow 3\Gamma E = \Gamma\Delta \Leftrightarrow \boxed{\Gamma E = \frac{\Gamma\Delta}{3}}$$

Άσκηση 26

Ν.δ.ο $(BM\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$



Λύση:

Το ΑΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο άρα $(B\Delta E) = \frac{1}{2}(ABE\Delta)$ (1)

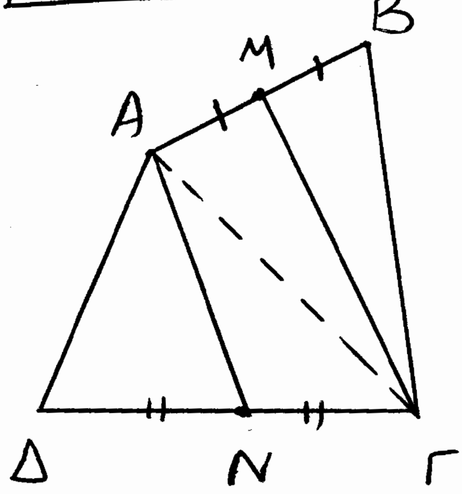
Το Μ μέσο της ΓΕ άρα $(BME) = \frac{1}{2}(B\Gamma E)$ (2)

Από (1)+(2)

$$(B\Delta E) + (BME) = \frac{1}{2}(ABE\Delta) + \frac{1}{2}(B\Gamma E)$$
$$\Leftrightarrow (BM\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$$

Άσκηση 27

$$(AM\Gamma N) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$$



Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ η ΓΜ είναι διάμεσος

άρα $(\Gamma MA) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$ (1)

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$ η ΑΝ είναι διάμεσος

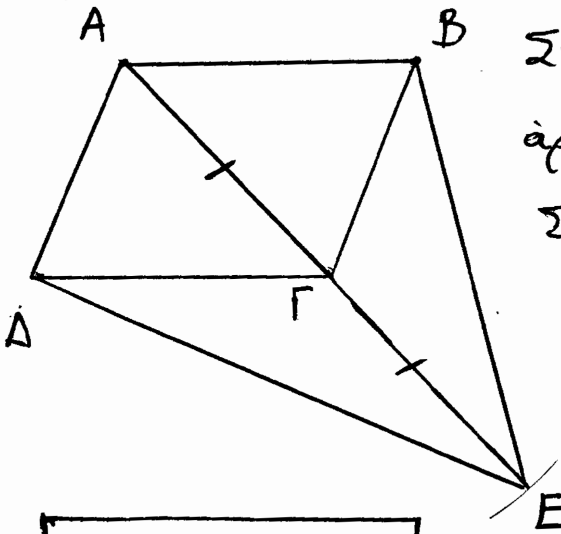
άρα $(AN\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Gamma\Delta)$ (2)

(1)+(2) $(\Gamma MA)+(AN\Gamma) = \frac{1}{2}\left[(AB\Gamma)+(A\Gamma\Delta)\right]$

$\Leftrightarrow (AM\Gamma N) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$

Άσκηση 28

$$(B\Gamma\Delta E) = (AB\Gamma\Delta)$$



Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABE}$ η ΒΓ είναι διάμεσος

άρα $(AB\Gamma) = (B\Gamma E)$ (1)

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ η ΔΓ είναι διάμεσος

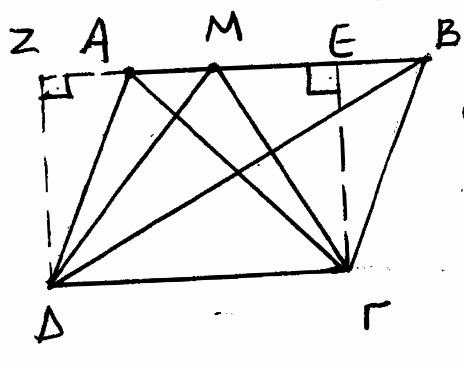
άρα $(A\Delta\Gamma) = (\Delta\Gamma E)$ (2)

(1) + (2) $(AB\Gamma)+(A\Delta\Gamma) = (B\Gamma E)+(\Delta\Gamma E)$

$\Leftrightarrow (AB\Gamma\Delta) = B\Gamma\Delta E)$

Άσκηση 29

$$(MA\Gamma) + (M\Delta B) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2}$$



Λύση:

$(MA\Gamma) + (M\Delta B) = \frac{1}{2} AM \cdot \Gamma E + \frac{1}{2} MB \cdot Z\Delta$

$= \frac{1}{2} \Gamma E (AM + MB) = \frac{1}{2} AB \cdot \Gamma E = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2}$

Άσκηση 30

Αν a είναι η πλευρά του τετραγώνου και β είναι η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου τότε:

$$\Pi_{τετρ} = \Pi_{ισοπλ} \Leftrightarrow 4a = 3\beta \Leftrightarrow a = \frac{3\beta}{4}$$

- $(ΑΒΓΔ) = a^2 = \dfrac{9\beta^2}{16}$

- $(ΕΖΗ) = \dfrac{\beta^2\sqrt{3}}{4}$

Επομένως: $\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{(ΕΖΗ)} = \dfrac{\frac{9\beta^2}{16}}{\frac{\beta^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\cancel{4}\cdot 9 \cdot \cancel{\beta^2}}{\underset{4}{\cancel{16}}\cdot\cancel{\beta^2}\sqrt{3}} = \dfrac{9}{4\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow \frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΕΖΗ)} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\cancel{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow (ΑΒΓΔ) = \frac{3\sqrt{3}}{4}(ΕΖΗ)$$